FONDO PIZZOFALCONE

11.C.83

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio IX

Palchetto 6

Num.° d' ordine 33

NAZIONALE
B. Prov.
I
1.068
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

Digitized by Google

B. P.
I
1068

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE.

Digitized by Google

LIBRAIRIE DE BACHELIER.

Cet ouvrage se trouve aussi

A BORDEAUX. . .	chez CHAUMAS.
LILLE.	— VANACKÈRE.
LYON	— PERISSE frères.
	— BRUN et Cie.
MARSEILLE. . .	— Mme Vve CAMOIN.
METZ.	— WARION.
MONTPELLIER.	— SÉWALLE.
NANCY.	— G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES.	— FOREST aîné.
	— GUÉRAUD.
ORLÉANS.	— GATINEAU.
RENNES	— VERDIER.
ROUEN.	— LEBRUMENT.
STRASBOURG. .	— TREUTTEL et WURTZ.
	— Mme LEVRAULT.
	— DERIVAUX.
TOULOUSE. . . .	— Mlles GALLON sœurs.
	— PRIVAT.
	— GIMET.
AMSTERDAM. . . .	chez VAN BAKKENES.
BERLIN.	— B. BEHR.
BRUXELLES. . . .	— DECQ.
	— PÉRICHON.
CAMBRIDGE.	— DEIGTON.
COPENHAGUE. . . .	— HOST.
FLORENCE.	— PIATTI.
GÊNES.	— BEUF.
GENÈVE.	— CHERBULIEZ.
LA HAYE.	— VAN CLEEF frères.
LEIPSIG.	— MICHELSEN.
LONDRES.	— BAILLIÈRE.
MADRID.	— Mme POUPART et frère.
	— JAYMEBON et Cie.
	— MONIER.
ROME.	— BLEGGI.
NAPLES.	— GAETANO NOBILE.
TURIN.	— BOCCA.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

607247

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE,

PAR CHOQUET,

Docteur ès Sciences, ancien Répétiteur à l'École d'Artillerie de la Flèche, Professeur de Mathématiques;

ET MAYER,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Chef d'une Institution préparatoire pour cette École, Membre de la Légion d'honneur.

OUVRAGE AUTORISÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

Cinquième Edition,

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

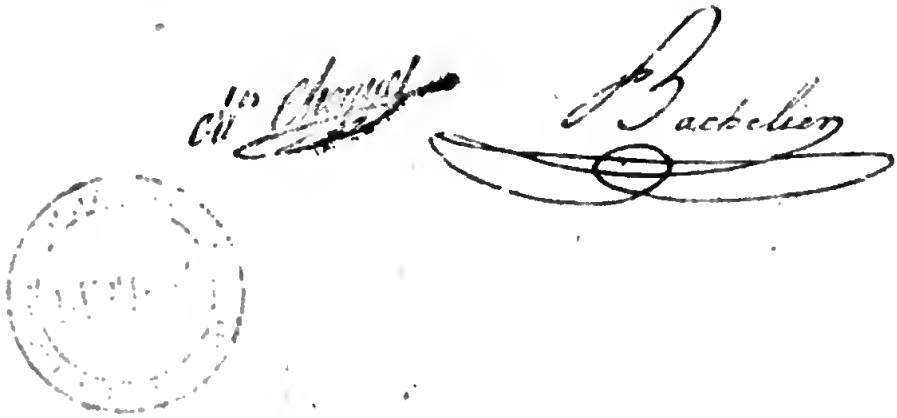
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1849

Digitized by Google

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne portera pas, comme ci-dessous, la signature de l'un des Auteurs et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants de ces exemplaires.



Digitized by Google

PRÉFACE

DE LA CINQUIÈME ÉDITION.

Toutes les parties de ce Traité ont été revues avec soin pour la présente édition, qui comprend, en outre, un assez grand nombre d'articles que l'on ne trouvait pas dans les précédentes. J'ai ajouté à la résolution des équations du premier degré la démonstration de la règle de Cramer, et j'en ai déduit une discussion générale des formules relatives à un système de n équations du premier degré à n inconnues, qui remplace la discussion des équations à trois inconnues. La résolution de deux équations du second degré à deux inconnues a reçu plus de développements. La théorie des maximums et minimums par la méthode élémentaire a été modifiée et rendue plus complète. Plusieurs propositions sur les nombres ont été ajoutées, entre autres, le théorème de Fermat et la détermination du nombre des entiers moindres qu'un nombre donné et premiers avec lui. La théorie des fractions continues, l'analyse indéterminée, la théorie des logarithmes et celle des intérêts composés ont été le sujet de plusieurs addi-

tions et de quelques modifications. J'expose la résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$ par le procédé que M. Catalan a indiqué, et qui n'est autre que le procédé ordinaire réduit aux seules opérations essentielles J'ai ajouté dans le chapitre XI la théorie des combinaisons et des arrangements qui contiennent des lettres répétées, la loi des puissances d'un polynôme, et la sommation des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression par différence. Dans les chapitres XIII, XIV, XV et XVI, qui ont pour objet les équations de degré quelconque, plusieurs propositions ont aussi été introduites; ces propositions sont: un théorème de M. Sturm qui augmente le nombre des cas où la règle des signes fait connaître qu'une équation n'a pas toutes ses racines réelles; le théorème de M. Budan, ou de Fourier, pour le cas où il n'y a pas de racines imaginaires; l'évaluation des racines imaginaires, et plusieurs théorèmes sur la résolution algébrique des équations binômes. Les propositions relatives aux limites des racines, la détermination des racines entières et la rectification de la méthode de Newton, reportée au chapitre XIV, ainsi que le théorème de Rolle, ont été présentées d'une manière plus simple. La théorie de l'abaissement des équations a été exposée avec quelques modifications dans les explications et dans le choix des exemples. La décomposition des fractions

rationnelles, avec un moyen simple pour l'effectuer dans le cas des facteurs multiples, a été reportée au chapitre XVII. Le chapitre XIX contient une théorie complète des dérivées pour les fonctions qui dépendent des diverses opérations de l'Algèbre, ou qui renferment des exponentielles et des logarithmes; la théorie des maximums et des minimums par le moyen des dérivées se trouve ainsi étendue à ces fonctions; et il en est de même des règles relatives à l'évaluation des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée. Le chapitre XX a été ajouté en entier; la table des matières fait connaître les sujets qui y sont traités.

Quelques suppressions ont été faites, afin d'éviter que le volume ne fût trop augmenté; mais elles n'ont porté que sur des articles peu essentiels, ou qui pouvaient être regardés comme superflus.

J'ai cité, en général, dans le cours de l'ouvrage, les savants qui ont découvert les théorèmes ou les démonstrations que j'ai exposés; toutefois, pour compléter ces citations, je dois rappeler que dans les avertissements placés en tête des éditions précédentes, il était indiqué que les démonstrations relatives aux quantités imaginaires, aux nombres figurés et aux développements en séries, étaient empruntées aux publications de M. Cauchy; et que, pour le théorème de cet illustre géomètre qui établit que toute équation a une racine, nous avions fait usage d'une démonstration due

à M. Sturm. Je dois ajouter encore qu'à l'égard de la rectification de la méthode de Newton, telle qu'elle est présentée dans l'édition actuelle, je me suis servi, pour les formules préliminaires, d'une démonstration qui se trouve dans l'*Algèbre* de M. Finck, et le reste de l'explication, à la rédaction près, appartient à M. Ossian Bonnet.

Octobre 1849.

CHOQUET.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

N. B. On a marqué d'une étoile les articles qui ne sont pas exigés pour l'admission à l'École Polytechnique.

Numéros.		Pages.
	Préface	v
	CHAPITRE Ier — INTRODUCTION.	
1... 3	Premier aperçu des procédés qui servent à faciliter la résolution des problèmes d'Arithmétique	1
4	Signes qu'on emploie en Algèbre	2
5... 19	Exemples de la résolution des problèmes à l'aide des signes algébriques	3
20... 29	Des quantités négatives	14
30... 35	Exemples qui font ressortir l'utilité de la considération des quantités négatives	20
36... 38	Des symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$	28
	CHAPITRE II. — CALCUL ALGÉBRIQUE.	
	ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, DIVISION, FRACTIONS.	
39... 41	Définitions. — Observations préliminaires	30
42... 46	Addition et soustraction des monômes et des polynômes	31
47 et 48	Réduction des termes semblables	33
49... 53	Multiplication des monômes	35
54... 59	Multiplication des polynômes	38
60... 62	Division des monômes. — Exposant zéro	46
63... 71	Division des polynômes	48
72... 79	Des fractions littérales	56
80... 84	Des exposants négatifs	61
	CHAPITRE III. — ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.	
85... 95	Définitions. — Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue	65
96...100	Des équations du premier degré à plusieurs inconnues. — Résolution de deux équations numériques à deux inconnues	72
101...103	Résolution d'un nombre quelconque d'équations qui renferment un pareil nombre d'inconnues	78
104...108	Problèmes qui dépendent des équations du premier degré	82
	Énoncés de problèmes à résoudre	90

Numéros Pages

109...111 Observations sur la résolution des problèmes. — Interprétation des valeurs négatives..... 93
112...122 Des cas d'impossibilité et d'indétermination dans les équations du premier degré..... 96

CHAPITRE IV. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER DEGRÉ. DISCUSSION DES FORMULES. EXPRESSIONS INFINIES ET INDÉTERMINÉES. PRINCIPES SUR LES INÉGALITÉS.

123...126 Résolution des équations générales du premier degré..... 104
127 Loi des valeurs des inconnues..... 108
128 * Démonstration générale de cette loi..... 110
129...132 Discussion des équations générales du premier degré à une et à deux inconnues..... 114
133...136 * Discussion des formules relatives à un système de n équations générales entre n inconnues..... 117
137 Examen des cas où, dans les équations du premier degré à trois inconnues, les termes connus sont nuls..... 121
138...141 De la discussion des problèmes..... 122
142...147 Observations sur les expressions indéterminées et les valeurs infinies..... 128
148...153 Principes sur les inégalités..... 133

CHAPITRE V. — RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES. CALCUL DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

154 et 155 Notations. — Double valeur de la racine carrée et des racines de degré pair. — Racines imaginaires..... 139
156 et 157 Racines carrées des monômes. — Expressions irrationnelles..... 140
158...164 Calcul des radicaux du second degré..... 141
165...170 Des carrés et de la racine carrée des polynômes..... 146

CHAPITRE VI. — ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

171...176 Résolution des équations du second degré à une inconnue. 154
177 Problèmes qui dépendent des équations du second degré à une inconnue..... 158
178...182 Examen des diverses particularités des équations du second degré..... 161
183...188 Décomposition du trinôme x^2+px+q en facteurs du premier degré. — Propositions sur les racines de l'équation $x^2+px+q=0$..... 167
189...192 Des équations trinômes réductibles au second degré. — Réduction de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$..... 127

Numéros. Pages.

193...197 Élimination d'une inconnue entre deux équations du second degré..... 175
PROBLÈMES..... 180
198...202 Des questions de maximum et de minimum que l'on peut faire dépendre des équations du second degré..... 196

CHAPITRE VII. — DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

203...207 Réduction des expressions imaginaires du second degré à la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Module. Addition, soustraction, multiplication, division des expressions de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$..... 203
208...214 Racines carrées de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. — Considérations sur les valeurs algébriques des racines de tous les degrés..... 208
215 * Résolution générale de l'équation du troisième degré... 216

CHAPITRE VIII. — PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. PROGRESSIONS. FRACTIONS CONTINUES.

216...218 Propositions sur les nombres premiers, les diviseurs des nombres et les fractions irréductibles..... 221
219...223 * Continuation des théorèmes sur les nombres..... 226
224 Caractères de divisibilité des nombres par des diviseurs quelconques..... 232
225...230 Propositions sur les racines. — Méthode abrégée pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre..... 234
231 et 232 Des progressions arithmétiques ou par différence..... 237
233...236 Des progressions géométriques ou par quotient..... 240
237...240 Notions élémentaires sur la convergence et la divergence des séries..... 244
241...255 Des fractions continues..... 248

CHAPITRE IX. — ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

256...267 Résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$. 267
268...272 Résolution en nombres entiers d'un système quelconque d'équations du premier degré, dans lequel le nombre des inconnues surpasse celui des équations..... 281
273 et 274 Résolution en nombres entiers d'une équation du second degré à une inconnue qui ne contient que la première puissance d'une des inconnues..... 289

CHAPITRE X. — PUISSANCES ET RACINES DES MONOMES. RADICAUX. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES. ÉQUATIONS EXPONENTIELLES. LOGARITHMES.

Numéros.		Pages.
275...283	Puissances et racines des monômes. — Calcul des radicaux arithmétiques	293
284...287	Observations sur les radicaux considérés algébriquement.	297
288...291	Des exposants fractionnaires	301
292...294	Des équations exponentielles	303
295...302	Propriétés générales des logarithmes	310
303...309	Des logarithmes dont la base est 10. — Usage des Tables.	316
	Exemples de calculs effectués par les logarithmes	326
310 ..314	Des intérêts composés	329

CHAPITRE XI. — COMBINAISONS, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS. BINOME DE NEWTON. PUISSANCES ET RACINES DES POLYNOMES. NOMBRES FIGURÉS ET SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

315...322	Des combinaisons, des arrangements et des permutations	336
323...325	* Combinaisons et arrangements qui contiennent des lettres répétées	341
326...334	Développement des puissances entières et positives d'un binôme, ou binôme de NEWTON	343
335 et 336	Puissances des polynômes	351
337...342	Extraction des racines des polynômes	354
343...347	* Triangle arithmétique et nombres figurés	358
348	* Sommation des piles de boulets	362
349 et 350	* Sommation des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression par différence	365

CHAPITRE XII. — DIVISIBILITÉ DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES. THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

351...353	De la décomposition des quantités algébriques en facteurs premiers	368
354...361	Du plus grand commun diviseur des quantités algébriques entières	374
362...364	De la décomposition des fonctions entières d'une quantité x en facteurs du premier degré	382

CHAPITRE XIII. — PROPOSITIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE A UNE SEULE INCONNUE.

365...368	Explications préliminaires	386
369 et 370	Développement d'une fonction entière du binôme $x+y$.	388

Digitized by Google

Numéros.		Pages.
371...373	Valeurs d'une fonction entière de x pour des valeurs très-grandes, ou très-petites, de x. Continuité des fonctions entières	391
374...377	Propositions par lesquelles on reconnaît qu'une équation a une racine réelle	394
378	* Théorème qui établit que toute équation a une racine	396
379...384	Des facteurs et des diviseurs des équations	402
385	Relations entre les coefficients d'une équation et les racines	408
386...391	Transformation des équations	410
392...399	Règle des signes de Descartes	415

CHAPITRE XIV. — RECHERCHE DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE INCONNUE.

400...406	Des limites des racines	424
407...412	Méthode des racines commensurables	431
413...421	Théorie des racines égales	438
422...426	Séparation des racines incommensurables	447
427...432	Théorème de M. STURM. — Usage de ce théorème pour la recherche des racines réelles	452
433	* Extension du théorème à une équation qui a des racines égales	465
434	* Théorème qu'on doit substituer au précédent quand la fonction V_1 n'est pas la dérivée de V	467
435...439	* Théorème de ROLLE. Séparation des racines par ce théorème et par celui de M. BUDAN	469
440...443	Méthode d'approximation de NEWTON	472
444...448	Rectification de la méthode de Newton	476
449...455	* Méthode d'approximation de LAGRANGE	484

CHAPITRE XV. — THÉORIE DE L'ÉLIMINATION, POUR LA RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES, DE DEGRÉ QUELCONQUE, A DEUX INCONNUES. ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES. RACINES IMAGINAIRES.

456 et 457	Sur la forme des équations à deux inconnues	494
458...460	Observations préliminaires sur la résolution de deux équations à deux inconnues	496
461...465	* Méthode générale pour la résolution de deux équations numériques à deux inconnues	499
	* Exemples	510
	* Remarques sur la méthode précédente	514
466...469	Équation aux carrés des différences	518
470 et 471	Calcul des racines imaginaires	522

CHAPITRE XVI. — DE L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. DES ÉQUATIONS RECIPROQUES. RECHERCHE DES DIVISEURS DU SECOND DEGRÉ. ÉQUATIONS BINOMES ET TRINOMES. ÉQUATIONS IRRATIONNELLES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Numéros.		Pages.
472...483	De l'abaissement des équations	524
484 et 485	Des équations réciproques	533
486...490	Recherche des diviseurs du second degré	535
491...499	Des équations binômes et des équations trinômes réductibles au second degré	539
500 et 501	Des équations irrationnelles	546
502 et 503	Résolution générale de l'équation du quatrième degré	550

CHAPITRE XVII. — DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES. DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

504...507	* Évaluation des fonctions symétriques des racines d'une équation	554
508	* Calcul de l'équation aux carrés des différences, au moyen des fonctions symétriques	559
509 et 510	* De l'élimination et du degré de l'équation finale	562
511...518	Décomposition des fractions rationnelles	565

* CHAPITRE XVIII. — DEVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

519...522	Développements par la méthode des coefficients indéterminés	577
523...527	Propositions sur les séries	583
528...531	Démonstration de la formule du binôme pour un exposant quelconque	588
532...535	Développements des exponentielles e^x et a^x et de $l(1+x)$.	595
536 et 537	Évaluation des erreurs qui résultent de la proportion à laquelle on a recours pour calculer, au moyen des Tables, le logarithme d'un nombre, ou le nombre correspondant à un logarithme	599

* CHAPITRE XIX. — DE L'USAGE DES FONCTIONS DÉRIVÉES DANS LES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM. ÉVALUATION DES QUANTITÉS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{0}{0}$.

538 et 539	De l'usage des fonctions dérivées dans les questions de maximum et de minimum	603
540...551	Dérivées des fonctions qui dépendent des diverses opérations, des logarithmes et des exponentielles	605
552...556	Évaluation des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$	612

* CHAPITRE XX. — ADDITIONS.

Numéros.		Pages.
I	Sur la théorie de l'élimination	617
II	Méthode de M. Cauchy, pour l'évaluation des fonctions symétriques rationnelles et entières des racines d'une équation	624
III	Sur les racines imaginaires. Théorème de M. Cauchy	628
IV	Sur la convergence des séries	634

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

Premier aperçu des procédés qui servent à faciliter la résolution des problèmes d'Arithmétique.

1. L'objet que l'on a particulièrement en vue dans l'Algèbre est d'établir des méthodes à l'aide desquelles on puisse découvrir les opérations qu'il faut exécuter sur des nombres donnés, afin d'obtenir d'autres nombres inconnus qui dépendent des premiers suivant des conditions déterminées.

2. Pour montrer l'origine de cette science, supposons que l'on ait à résoudre la question suivante :

Partager 890 *francs entre trois personnes, de telle sorte que la seconde ait* 115 *francs de plus que la première, et la troisième* 180 *francs de plus que la seconde.*

Si l'on connaissait une des parts, la première par exemple, on obtiendrait aisément les deux autres.

Or, la seconde part devant être égale à la première augmentée de 115 fr., la troisième part, qui doit être égale à la seconde augmentée de 180 fr., sera égale à la première augmentée de 115 fr. plus 180 fr., ou à la première augmentée de 295 fr.

Google

Donc, la somme des trois parts sera formée de trois fois la première part plus 115 fr., plus encore 295 fr., ce qui est la même chose que trois fois la première part plus 410 fr.

Cette somme doit être égale au nombre à partager.

Donc trois fois la première part plus 410 fr. doivent égaler 890 fr.

Donc trois fois la première part égaleront 890 fr. moins 410 fr., ou 480 fr.

Donc la première part égalera le tiers de 180 fr., ou 160 fr.

Puisque la première personne a 160 fr., la seconde aura 160 fr. plus 115 fr., ou 275 fr.; et la troisième aura 275 fr. plus 180 fr., ou 455 fr. Ces trois sommes réunies font 890 fr.; ce qui prouve l'exactitude de la solution.

3. Cet exemple donne un aperçu du genre des raisonnements qu'il faut faire pour résoudre les problèmes que l'on peut se proposer à l'égard des nombres, et l'on voit que, pour exprimer ces raisonnements, on a surtout besoin d'employer et de répéter fréquemment certaines expressions qui indiquent ou les nombres que l'on cherche, comme ces mots plusieurs fois répétés dans la question ci-dessus, *première part*, *seconde part*, etc., ou les relations qui existent entre les quantités que l'on considère, et les opérations par lesquelles elles se déduisent les unes des autres, comme ces mots *égale à*, *plus* ou *augmenté de*, *moins* ou *diminué de*, etc. Il est donc naturel d'adopter des signes particuliers pour représenter d'une manière abrégée ces sortes d'expressions.

4. On indique l'addition par le signe + qu'on prononce *plus*. Ainsi, 31 + 12 + 8 signifie qu'on doit faire la somme des trois nombres 31, 12 et 8.

La soustraction s'indique par le signe — qu'on prononce

moins. Ainsi, $31 - 12$ signifie que l'on doit soustraire 12 de 31.

Pour exprimer la multiplication, on se sert du signe $\times$ qu'on lit *multiplié par*, ou bien on place entre les facteurs un point; ainsi, pour indiquer le produit des deux nombres 31 et 5, on écrit 31×5, ou 31.5. Pareillement, pour indiquer le produit des nombres 31, 5, 8 et 11, c'est-à-dire le résultat qu'on obtiendra en multipliant successivement 31 par 5, le produit par 8 et le nouveau produit par 11, on écrit $31 \times 5 \times 8 \times 11$, ou bien $31.5.8.11$.

Pour exprimer qu'un nombre doit être divisé par un autre, on écrit celui-ci au-dessous du premier, et on les sépare par une barre, ou bien on écrit le diviseur à la suite du dividende, en les séparant par deux points. Ainsi, pour indiquer le quotient de 8 par 6, on écrit $\frac{8}{6}$, ou $8 : 6$.

On exprime l'égalité de deux quantités par le signe $=$ qui se prononce *égale*. Ainsi, $3 + 5 - 2 = 6$ se lit 3 plus 5 moins 2 égale 6.

Pour exprimer les mots *plus grand*, *plus petit*, on emploie le signe $>$, en ayant soin de tourner l'ouverture de ce signe vers la quantité qui est la plus grande. Ainsi, pour exprimer l'inégalité des deux fractions $\frac{2}{9}$ et $\frac{11}{14}$, dont la seconde est plus grande que la première, on écrit $\frac{11}{14} > \frac{2}{9}$, ou bien $\frac{2}{9} < \frac{11}{14}$.

Pour représenter abréviativement un nombre inconnu qu'il s'agit de déterminer, on se sert d'une lettre qu'on choisit de préférence parmi les dernières lettres de l'alphabet.

Quand un nombre qu'on a désigné par une lettre doit être multiplié par un autre nombre connu, on se contente de placer ce nombre devant la lettre. Ainsi, pour marquer qu'un nombre qu'on a représenté par x doit être multiplié par 5, on écrit $5x$; si le nombre x doit être multiplié par $\frac{3}{4}$, le produit s'exprime par $\frac{3}{4}x$.

5. Au moyen des conventions qui viennent d'être éta-

blies, on peut écrire les raisonnements du n° 2, comme on le voit ci-après :

La première part étant désignée par.....	x,
la seconde part sera.....	$x + 115$,
et la troisième sera $x + 115 + 180$, ou.....	$x + 295$.
Il suit de là que la somme des trois parts sera.	$3x + 115 + 295$,
ou simplement.....	$3x + 410$;
donc.....	$3x + 410 = 890$.
Donc.....	$3x = 890 - 410$,
ou, ce qui revient au même.....	$3x = 480$.
Donc.....	$x = \frac{480}{3}$,
et en effectuant la division.....	$x = 160$.

De cette manière on substitue à l'écriture ordinaire une écriture plus rapide, qui permet mieux de voir à chaque instant, et d'un seul coup d'œil, le point où la question a été amenée; et par là, la solution est rendue à la fois plus prompte et plus facile.

6. En examinant avec soin la solution qui vient d'être donnée, on voit que, pour obtenir la première part, qui est celle qu'on a désignée par x, on retranche de 890, qui est le nombre à partager, une somme 410 formée de l'excès 115 de la seconde part sur la première et de ce même nombre 115 augmenté de l'excès 180 de la troisième part sur la seconde; puis on prend le tiers du reste.

Il est clair que si les nombres donnés 890, 115 et 180 étaient remplacés par d'autres, on serait encore conduit à des opérations exactement semblables.

Ainsi, que 1250 soit le nombre à partager, 170 l'excès de la seconde part sur la première, et 220 l'excès de la troisième sur la seconde, on fera la somme de 220 et 170, et l'on ajoutera 170 à cette somme, ce qui revient à faire la somme de deux fois 170 et 220; on soustraira cette somme 560 de 1250; enfin on divisera le reste 690 par 3. Le quo-

tient 230 sera la valeur de la plus petite part. On vérifiera l'exactitude de ce résultat en calculant les deux autres parts et les ajoutant à la première : la somme sera égale à 1250.

On parvient donc, au moyen d'un seul exemple, à une règle par laquelle on peut résoudre immédiatement, et sans repasser par les détails des raisonnements, toutes les questions semblables à celle que l'on s'était proposée, et qui n'en diffèrent que par les valeurs des nombres donnés.

7. Il est aisé de concevoir combien il serait utile de pouvoir généraliser ainsi la solution de chaque problème, en la faisant consister uniquement dans la détermination des opérations à exécuter sur les nombres donnés afin d'obtenir les nombres inconnus.

Pour y parvenir avec facilité dans toutes les questions, on représente les nombres donnés par des lettres, en ayant soin de choisir les premières lettres de l'alphabet, afin de distinguer ces nombres de ceux qui sont inconnus et qu'on représente par les dernières lettres.

8. Au moyen de cette convention, la question du n° 2 s'exprime généralement de cette manière :

Partager un nombre a *en trois parties, de telle sorte que la seconde surpasse la première de* b, *et la troisième surpasse la seconde de* c.

Alors on raisonne comme il suit :

La première partie étant désignée par x,
la seconde sera..... $x+b$,
et la troisième sera..... $x+b+c$;
donc la somme des trois parties sera.... $3x+2b+c$.

On devra donc avoir l'égalité

$$3x+2b+c=a.$$

On conclut de cette égalité, que la quantité $3x$ doit être

égale au nombre a diminué de $2b + c$, ou, ce qui revient au même, à a diminué de $2b$ et diminué encore de c; ainsi

$$3x = a - 2b - c,$$

et puisque x est le tiers de $3x$, on obtient enfin

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

Le dernier résultat est l'expression abrégée de cette règle : *Retranchez du nombre à partager le double de l'excès de la moyenne partie sur la plus petite, et retranchez du reste l'excès de la plus grande partie sur la moyenne; puis divisez le résultat par* 3 : *le quotient sera la plus petite partie.*

Telle est, en effet, la règle qu'on avait déduite de la solution particulière exposée dans le n° 5.

9. Les égalités qui servent à déterminer des nombres inconnus, comme l'égalité ci-dessus $3x + 2b + c = a$, se nomment des *équations;* et les expressions qui indiquent les opérations qu'on doit faire sur les nombres connus afin d'obtenir les nombres inconnus, se nomment des *formules.* Pour appliquer la formule $x = \frac{a - 2b - c}{3}$ à l'exemple du n° 2, on remplace a par 890, b par 115, c par 180, c'est-à-dire que l'on pose $a = 890$, $b = 115$, $c = 180$; on trouve ainsi

$$x = \frac{890 - 2 \times 115 - 180}{3} = 160.$$

10. Supposons que l'on veuille *partager le nombre* a *en quatre parties, de manière que la deuxième surpasse la première de* b, *la troisième surpasse la seconde de* c, *et la quatrième surpasse la troisième de* d.

La première partie étant désignée par x,
la seconde partie sera..... $x+b$,
la troisième..... $x+b+c$,
et la quatrième..... $x+b+c+d$;
donc la somme des quatre parties sera.. $4x+3b+2c+d$.

On devra donc avoir l'équation

$$4x+3b+2c+d=a,$$

par conséquent,

$$4x=a-3b-2c-d,$$

$$x=\frac{a-3b-2c-d}{4}.$$

On voit par cette formule que, *pour obtenir la plus petite partie, il faudra soustraire du nombre à partager* 3 *fois l'excès de la seconde partie sur la première,* 2 *fois l'excès de la troisième sur la seconde, et l'excès de la quatrième sur la troisième, puis diviser le résultat par* 4.

11. Supposons encore que l'on demande de *partager le nombre* a *en cinq parties, de manière que la deuxième surpasse la première de* b, *la troisième surpasse la deuxième de* c, *la quatrième surpasse la troisième de* d, *et la cinquième surpasse la quatrième de* e.

En raisonnant comme dans les exemples précédents, on parviendra à la formule

$$x=\frac{a-4b-3c-2d-e}{5};$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la plus petite partie, il faudra soustraire du nombre à partager* 4 *fois l'excès de la seconde partie sur la première,* 3 *fois l'excès de la troisième sur la seconde,* 2 *fois l'excès de la quatrième sur la troisième, et enfin l'excès de la cinquième sur la quatrième; puis diviser le résultat par* 5.

12. L'uniformité des règles auxquelles on parvient dans les différents cas que nous venons de considérer, permet de conclure que, quel que soit le nombre des parties, si chacune d'elles doit surpasser la précédente d'une quantité donnée, il faudra soustraire du nombre à partager l'excès de la seconde partie sur la première, répété autant de fois moins une qu'il doit y avoir de parties, l'excès de la troisième partie sur la seconde, répété autant de fois moins deux qu'il doit y avoir de parties, l'excès de la quatrième sur la troisième, répété autant de fois moins trois qu'il doit y avoir de parties, et ainsi de suite; de sorte que l'on soustraira seulement deux fois l'excès de la pénultième partie sur l'antépénultième, et une seule fois l'excès de la dernière partie sur la pénultième: le reste divisé par le nombre des parties donnera la valeur de la plus petite partie.

Que le nombre à partager soit représenté par a, l'excès de la seconde partie sur la première par b, l'excès de la troisième sur la seconde par c, l'excès de la quatrième sur la troisième par d, ainsi de suite, enfin l'excès de la pénultième sur l'antépénultième par k, l'excès de la dernière sur la pénultième par l; et désignons le nombre des parties par n.

Pour indiquer que le nombre b doit être répété autant de fois moins une qu'il y a de parties, ou $n-1$ fois, on enferme la quantité $n-1$ entre deux parenthèses, et l'on écrit $(n-1)\times b$, ou plus simplement $(n-1)b$. On représente pareillement par $(n-2)c$ le produit résultant de l'excès c répété autant de fois qu'il y a de parties moins deux, par $(n-3)d$ le produit résultant de l'excès d répété autant de fois qu'il y a de parties moins trois, etc. Alors, en désignant par x la plus petite partie, on écrit la règle qui vient d'être énoncée, comme on le voit ci-dessous:

$$x = \frac{a-(n-1)b-(n-2)c-(n-3)d\ldots-2k-l}{n}.$$

On doit d'ailleurs entendre par les points placés entre les quantités $(n-3)d$ et $2k$ que, pour chaque valeur de n, il faudra écrire entre ces quantités les excès de chaque partie sur la précédente, depuis la cinquième partie jusqu'à l'antépénultième, multipliés, comme les précédents, par des nombres qui décroissent d'une unité à partir de $n-4$.

Cet exemple fait ressortir toute la simplicité des notations algébriques, et il montre en même temps quel degré de généralité ces notations permettent de faire acquérir à la résolution d'une question.

13. Les notations nouvelles dont nous venons de faire usage se rencontreront fréquemment dans la suite; c'est pourquoi elles doivent fixer l'attention. Il est donc nécessaire de se rappeler que pour indiquer un produit dont les facteurs sont représentés par des lettres, on se contente d'écrire ces lettres les unes à côté des autres, sans mettre aucun signe entre elles : de sorte que les expressions ab, abc sont regardées comme équivalentes à celles-ci : $a \times b$, $a \times b \times c$.

Il faut aussi remarquer qu'on ne doit pas confondre les expressions $(a+b) \times c$ et $a + b \times c$: dans la première, les parenthèses servent à indiquer que l'addition des nombres a et b doit être effectuée avant qu'on ne fasse la multiplication; tandis que l'expression $a + b \times c$ signifie que l'on doit ajouter à a le produit $b \times c$ ou bc. Par exemple, si l'on a $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$, l'expression $(a+b) \times c$ vaut 8×7 ou 56, et l'expression $a + b \times c$ vaut $5 + 21$ ou 26.

14. On a souvent à résoudre cette question : *Trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence.* En représentant par a la somme donnée des deux nombres, et par b leur différence, la question revient à partager le nombre a en deux parties telles que l'une surpasse l'autre de b : elle n'est donc qu'un cas particulier de la question du

n° 12. La plus petite partie, ou le plus petit des deux nombres demandés, est alors

$$\frac{a-b}{2}.$$

Il en résulte que la plus grande partie, ou le plus grand des deux nombres demandés, est $\frac{a-b}{2}+b$. Or, d'après la règle connue pour l'addition d'un nombre entier et d'une fraction, on peut remplacer la dernière expression par $\frac{a-b+2b}{2}$; d'ailleurs, il est clair que si l'on retranche b de a, et qu'on ajoute ensuite $2b$ au reste, le résultat sera le même que si l'on ajoutait simplement b à a. Le plus grand des deux nombres cherchés est donc

$$\frac{a+b}{2}.$$

Ainsi, *on obtient le plus petit des deux nombres en retranchant la différence de ces nombres de leur somme, et prenant la moitié du reste, et on obtient le plus grand nombre en ajoutant la différence à la somme, et prenant la moitié du résultat.*

15. Dans les questions dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, nous n'avions d'autre objet que de faire connaître l'origine et l'utilité des notations algébriques. Nous allons maintenant résoudre un problème qui fera voir à quelles sortes de règles ces notations donnent naissance.

On propose à un marchand un lot de 40 pièces d'étoffe de deux qualités différentes, au prix commun de 32 fr. par pièce. Le marchand juge qu'en achetant à ce prix, il pourra faire un bénéfice de 5 fr. sur chaque pièce de la qualité supérieure, et il perdra 4 fr. sur chacune des autres. Combien doit-il exiger qu'on lui livre de pièces

de la meilleure qualité, pour qu'il puisse gagner sur la totalité une somme égale au dixième du prix d'achat?

Représentons par x le nombre de pièces que le marchand vendra avec bénéfice; le nombre de celles qu'il vendra avec perte sera $40 - x$. Le bénéfice produit par la vente de x pièces de la meilleure qualité sera x fois 5 fr., ou $5x$ fr.; la perte occasionnée par la vente des pièces de la qualité inférieure sera exprimée par le produit de $40 - x$ par 4, ou $(40 - x) \times 4$; et comme le bénéfice doit excéder la perte de 128 fr., on devra avoir

$$5x - (40 - x) \times 4 = 128.$$

Cette équation présente une complication qui n'existait pas dans les équations fournies par les questions précédentes, et qui consiste en ce que le nombre inconnu se trouve engagé dans une soustraction dont le résultat doit être répété quatre fois et soustrait ensuite de la quantité $5x$. Mais avec un peu d'attention, on découvre facilement le moyen de faire disparaître cette complication.

D'abord, on peut obtenir une expression du produit $(40-x)\times 4$ qui soit délivrée de parenthèses. Il est clair, en effet, que ce produit doit être égal à celui de 40 par 4, diminué de celui de x par 4; or le produit de 40 par 4 est 160; on a donc $(40 - x) \times 4 = 160 - 4x$. Comme le produit $(40 - x) \times 4$ devait être soustrait de $5x$, il faut retrancher de $5x$ la quantité $160 - 4x$. Pour indiquer cette opération, on devrait encore employer les parenthèses, et mettre $5x-(160-4x)$; car si l'on écrivait $5x-160-4x$, cela signifierait que l'on doit soustraire 160 de $5x$ et soustraire encore $4x$ du reste; de sorte que la quantité $5x$ serait réellement diminuée de la somme des quantités 160 et $4x$. Mais on peut obtenir une expression de l'opération proposée sans employer de parenthèses; car si l'on soustrait d'abord 160 de $5x$, le reste $5x - 160$ sera trop faible de $4x$,

puisqu'on aura soustrait une quantité trop forte de $4x$; donc le véritable reste est $5x - 160 + 4x$.

Au moyen de ces observations, l'équation ci-dessus $5x - (40 - x) \times 4 = 128$ se change dans la suivante:

$$5x - 160 + 4x = 128.$$

Or $5x - 160 + 4x$ est évidemment la même chose que $9x - 160$; donc

$$9x - 160 = 128.$$

On conclut de là

$$9x = 128 + 160, \quad \text{ou} \quad 9x = 288,$$

$$x = \frac{288}{9}, \quad \text{ou} \quad x = 32.$$

Il faut donc que le marchand reçoive 32 pièces de la meilleure qualité. En effet, s'il vend 32 pièces avec un bénéfice de 5 fr. par pièce, il gagne 160 fr.; et en vendant les 8 autres pièces à 4 fr. de perte, il perd 32 fr.; le gain qu'il fait sur la totalité est donc 160 fr. — 32 fr., ou 128 fr.

16. La question que nous venons de traiter peut être généralisée de cette manière:

Partager un nombre a *en deux parties telles que, le produit de la seconde partie par* c *étant retranché du produit de la première partie par* b, *le reste soit égal à un nombre connu* d.

Nommons x la première partie, la seconde sera $a - x$; et l'énoncé du problème se traduira par l'équation

$$bx - (a - x) \times c = d.$$

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on voit que, au lieu de $(a - x) \times c$, on peut écrire $ac - cx$, et pour exprimer le reste $bx - (ac - cx)$, on peut écrire $bx - ac + cx$. L'équation ci-dessus revient donc à

$$bx - ac + cx = d.$$

La somme $bx + cx$ exprime que x est pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme $b + c$, ce qui peut aussi s'indiquer par $(b + c)\,x$. On peut donc écrire encore l'équation comme il suit :

$$(b + c)\,x - ac = d;$$

alors on en conclut aisément

$$(b + c)\,x = d + ac,$$

$$x = \frac{d + ac}{b + c}.$$

En mettant dans cette formule, à la place des lettres, les nombres que nous avons d'abord considérés, savoir, $a = 40$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 128$, on trouve

$$x = \frac{128 + 40 \times 4}{5 + 4} = \frac{128 + 160}{5 + 4} = \frac{288}{9} = 32.$$

17. En généralisant les raisonnements par lesquels on a transformé l'expression $bx - (a - x) \times c$ en $bx - ac + cx$, et celle-ci en $(b + c)\,x - ac$, on est conduit à des règles au moyen desquelles on pratique sur les quantités exprimées avec des lettres, qu'on nomme *quantités algébriques* ou *littérales*, des opérations analogues à celles de l'arithmétique, et qu'on appelle comme celles-ci *addition*, *soustraction*, *multiplication*, *division* ; ces opérations étant toutefois différentes de celles de l'arithmétique en ce que, dans l'algèbre, comme le fait remarquer Lacroix, *les résultats des différentes opérations ne sont encore que des indications de calculs à effectuer, et ne présentent réellement que des transformations des opérations primitivement indiquées en d'autres qui produisent le même effet, mais dont l'écriture algébrique est plus simple ou mieux appropriée aux besoins de la question que l'on traite.*

L'ensemble de ces opérations constitue le *calcul algébrique*.

18. On voit aussi, par les questions dont nous nous sommes occupés, que la résolution d'un problème est, en général, composée de deux parties. Dans la première partie, on cherche à former, d'après les conditions du problème, au moyen des quantités connues représentées par des nombres ou par des lettres, et de la quantité inconnue toujours exprimée par une lettre, deux expressions différentes d'une même quantité, et on les égale. Cela s'appelle *mettre le problème en équation*. Dans la seconde partie, on déduit de l'équation la valeur de la quantité inconnue, ce qui s'appelle *résoudre l'équation;* et comme les raisonnements qu'on emploie dans cette seconde partie se reproduisent pour chaque question d'une manière uniforme, on peut les réduire à un petit nombre de règles fixes.

19. Nous exposerons dans les chapitres suivants les règles du calcul algébrique et celles qui conduisent à la résolution des équations; mais pour pouvoir expliquer ces règles dans toute leur généralité, nous devons traiter auparavant un autre sujet.

Des quantités négatives.

20. Il arrive souvent dans l'algèbre que l'on est conduit à une soustraction qui ne peut pas être exécutée, parce que le nombre que l'on doit soustraire est plus grand que celui dont il faut le soustraire; dans ce cas, on retranche le plus petit nombre du plus grand, et l'on place devant le reste le signe —. Si l'on a à soustraire, par exemple, 10 de 7, on dit que le reste est — 3.

Une expression formée d'un nombre précédé du signe —, comme — 3, se nomme quantité *soustractive* ou *négative*. Par opposition, on regarde les nombres qui ne sont précédés d'aucuns signes comme étant affectés du signe +, et on leur donne la dénomination de quantités *additives* ou *positives*.

La *valeur absolue* d'une quantité est le nombre dont cette quantité est formée, pris indépendamment du signe qui le précède.

21. Supposons qu'on ait exprimé par a la valeur des biens qu'une personne possède, et par b ce qu'elle doit. Si a est plus grand que b, cette personne possédera une fortune égale à $a - b$; si, au contraire, a est moindre que b, elle sera dans le même cas que si elle ne possédait rien et devait une somme égale à $b - a$; mais on pourra comprendre les deux cas dans une même expression, en convenant de regarder la différence $a - b$ comme représentant un bien réel, ou une dette, selon que cette différence sera positive ou négative.

Par exemple, si l'on a $a = 2000$ et $b = 2500$, il en résultera $a - b = -500$, et au lieu de dire que la personne dont on veut exprimer la fortune doit 500 fr. au delà de ce qu'elle possède, on dira qu'elle possède -500 fr.

Supposons encore que a représente l'espace qu'un mobile a parcouru sur une droite, à partir d'un point fixe, dans un sens désigné, et b l'espace dont le même mobile a rétrogradé par un mouvement en sens contraire. Si b est moindre que a, le mobile se sera éloigné du point de départ d'une quantité égale à $a - b$, dans le sens du premier mouvement; si, au contraire, b est plus grand que a, le mobile sera distant du point de départ, dans la direction opposée, d'une quantité égale à $b - a$; et on pourra représenter dans les deux cas la distance du mobile au point de départ par la différence $a - b$, en convenant que cette distance devra être prise dans le sens du premier mouvement, ou dans le sens du second, suivant que la quantité $a - b$ sera positive ou négative.

22. Ces exemples montrent comment les quantités peuvent se présenter sous deux acceptions opposées, qui cor-

respondent aux idées d'augmentation et de diminution exprimées par les signes + et —. C'est cette considération qui a conduit les algébristes à introduire les quantités négatives dans leurs calculs, en adoptant des conventions au moyen desquelles ils étendent, par rapport à ces quantités, le sens des quatre opérations, Addition, Soustraction, Multiplication, Division, comme nous allons l'expliquer.

23. *On ajoute deux quantités de signes contraires, en prenant la différence de leurs valeurs absolues, et l'affectant du signe de la quantité dont la valeur est la plus grande;*

Et *pour ajouter deux quantités négatives, on fait la somme des valeurs absolues de ces quantités, et on l'affecte du signe —.*

Ainsi, par exemple, la somme des deux quantités + 8 et — 5 est + 3; celle de — 8 et + 5 est — 3; celle de — 8 et — 5 est — 13.

24. *On soustrait une quantité d'une autre, en ajoutant à celle-ci la quantité qu'il faut soustraire, prise avec le signe contraire à celui dont elle est affectée.*

Ainsi, si de + 7 on soustrait — 3, le reste est + 7 + 3 ou — 10; si de — 7 on soustrait + 3, le reste est — 7 — 3 ou — 10; si de — 7 on soustrait — 3, le reste est — 7 + 3 ou — 4; si de — 7 on soustrait — 11, le reste est — 7 + 11 ou + 4.

Le reste est toujours ce qu'il faut ajouter à la quantité que l'on a soustraite pour obtenir celle dont on a soustrait. Car si l'on demande la quantité qu'il faut ajouter à — 3 pour obtenir une somme égale à + 7, cette quantité devra être positive et telle que, si l'on en retranche 3, on ait pour reste 7 : elle sera donc égale à 7 + 3. Si l'on demande la quantité qu'il faut ajouter à + 3 pour avoir — 7, cette quantité devra être négative et numériquement égale à la

Digitized by Google

quantité qui, diminuée de 3, donnerait 7; elle sera donc égale à $-7-3$. On voit de la même manière que la quantité qu'il faut ajouter à -3 pour avoir -7 est $-7+3$; et la quantité qu'il faut ajouter à -11 pour avoir -7 est $-7+11$. La proposition que nous avons énoncée se trouve ainsi vérifiée pour tous les cas que la soustraction peut offrir, quand on y considère des quantités négatives.

25. Si l'on a à ajouter les cinq quantités -2, $+5$, -13, -4 et $+8$, il faudra d'abord faire la somme de -2 et de $+5$, laquelle est $+3$; on ajoutera ensuite -13 à cette somme, ce qui donnera -10; à -10 on ajoutera -4, ce qui donnera -14; enfin à -14 on ajoutera $+8$, ce qui donnera -6. Ce dernier résultat est la somme demandée.

On peut calculer d'abord la somme des quantités négatives -2, -13 et -4, laquelle est -19, puis celle des quantités positives $+5$ et $+8$ qui est $+13$; en faisant ensuite la somme des deux quantités -19 et $+13$, on a comme précédemment, pour résultat, -6.

Il est clair qu'il en serait de même dans tout autre exemple. Ainsi,

Pour obtenir la somme de plusieurs quantités affectées des signes + et —, il faut calculer la somme des valeurs numériques des quantités positives, celle des valeurs numériques des quantités négatives, soustraire la plus petite somme de la plus grande, et mettre devant le reste le signe des quantités qui ont donné la plus grande somme.

Quand l'addition doit être seulement indiquée, il suffit d'écrire les quantités les unes à la suite des autres avec leurs signes; ainsi, dans l'exemple qui précède, la somme s'indique par

$$-2+5-13-4+8.$$

On voit, en effet, en effectuant les opérations indiquées

dans cette expression, qu'elles ne diffèrent pas de celles qui ont été faites ci-dessus.

26. Il faut remarquer que, d'après le sens qu'on vient de donner à l'addition, cette opération n'entraîne pas toujours l'idée d'une augmentation; et il peut arriver qu'une somme soit moindre que chacune des parties qui la composent. Par rapport à cette manière d'envisager l'addition, on donne au résultat le nom de *somme algébrique*, tandis qu'une somme formée en ayant seulement égard aux valeurs absolues des parties qui la composent, est appelée *somme arithmétique*.

27. *Pour la multiplication, lorsque le multiplicateur a le signe +, on donne au produit le signe du multiplicande, et lorsque le multiplicateur a le signe —, on donne au produit le signe contraire à celui du multiplicande.* La valeur absolue du produit est d'ailleurs le produit des valeurs absolues des facteurs.

D'après cette règle, le produit de $+7$ par $+3$ est $+21$; celui de -7 par $+3$ est -21; celui de $+7$ par -3 est également -21; celui de -7 par -3 est plus 21.

Pour indiquer d'une manière plus sensible le signe que le produit doit recevoir, on peut énoncer la règle précédente de cette autre manière :

Le produit de deux quantités affectées du signe +, a le signe +;

Le produit de deux quantités dont l'une est affectée du signe + et l'autre du signe —, a le signe —;

Le produit de deux quantités affectées du signe —, a le signe +.

On dit aussi abréviativement que + *multiplié par* + *donne* +; — *multiplié par* + *et* + *multiplié par* — *donnent* —; *et* — *multiplié par* — *donne* +.

On peut appliquer à la multiplication d'une quantité né-

gative par une quantité positive, la définition de la multiplication en arithmétique: on voit ainsi que le produit doit être négatif; car le produit de -7 par $+3$, par exemple, doit être la somme de trois quantités égales à -7, laquelle est -21. Mais quand le multiplicateur est négatif, la multiplication ne peut plus être exécutée suivant la signification qu'elle a reçue en arithmétique; et la règle ci-dessus n'est, dans ce cas, que la définition même de l'opération.

28. La division consiste, comme en Arithmétique, à trouver une quantité qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende. Il suit de cette définition que, *lorsque le dividende a le signe +, le quotient doit avoir le même signe que le diviseur;* car pour que le produit de deux facteurs soit positif, il faut que les deux facteurs aient le même signe. Ainsi, le quotient de $+8$ par $+2$ est $+4$, et celui de $+8$ par -2 est -4. *Lorsque le dividende a le signe —, le quotient doit avoir le signe contraire à celui du diviseur;* car, pour que le produit de deux facteurs soit négatif, il faut que les deux facteurs aient des signes contraires. Ainsi, le quotient de -8 par $+2$ est -4, et celui de -8 par -2 est $+4$.

On peut aussi exprimer ces règles de cette autre manière:

Quand le dividende et le diviseur ont tous deux le signe +, le quotient a le signe +;

Quand le dividende a le signe + et le diviseur le signe —, ou quand le dividende a le signe — et le diviseur le signe +, le quotient a le signe —;

Quand le dividende et le diviseur ont tous deux le signe —, le quotient a le signe +.

On dit encore, abréviativement, que *+ divisé par + donne +; + divisé par — ou — divisé par + donne —; et — divisé par — donne +.*

29. Si d'un nombre tel que 10, par exemple, on retranche successivement les nombres 1, 2, 3, 4,..., 10, on obtiendra d'abord des restes positifs de plus en plus petits, puis on parviendra à un reste nul; et en continuant à soustraire du même nombre 10 les nombres 11, 12, 13, 14, etc., on produira les quantités négatives -1, -2, -3, etc. On dit, par cette raison, que *les quantités négatives doivent être regardées comme étant plus petites que zéro, et d'autant plus petites que leurs valeurs absolues sont plus grandes*. Ce n'est là, du reste, qu'une convention, ou plutôt une forme de langage dont on appréciera l'utilité dans la suite.

En faisant usage des lignes d'inégalité (n° 4), on a

$$-3<0, \quad -4<-3, \quad \text{ou bien} \quad 0>-3, \quad -3>-4.$$

30. Nous allons montrer, par un problème, un exemple des avantages que procure, dans l'algèbre, l'emploi des quantités négatives. Pour que ce problème pût être aisément compris, nous avons commencé par le résoudre en prenant les données en nombres; c'est en le généralisant après que nous le ferons servir à l'objet que nous avons en vue.

On a fait partir de Paris pour Bayonne un courrier qui parcourt 12 kilomètres dans une heure; 10 heures après, on fait partir un second courrier qui parcourt 15 kilomètres dans une heure. On demande à quelle distance de Bayonne celui-ci rejoindra le premier? (La distance de Paris à Bayonne est de 801 kilomètres.)

Puisque le premier courrier parcourt 12 kil. en une heure, et part 10 heures avant le second, il a parcouru pendant ce temps 120 kil.; donc, au moment du départ du second, il se trouve éloigné de Bayonne de $801-120$, ou 681 kil. Représentons par x la distance que les deux courriers devront encore parcourir, après l'instant de leur ren-

contre, pour arriver au lieu de leur destination. Les espaces qu'ils auront parcourus depuis l'instant du départ du second jusqu'au moment de la rencontre, seront $801 - x$ et $681 - x$. Or, ces espaces ayant été parcourus dans le même temps, il faudra qu'ils soient proportionnels aux espaces que les deux courriers parcourent en une heure. On devra donc avoir

$$801 - x : 681 - x :: 15 : 12.$$

On conclut de là, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$(801 - x) \times 12 = (681 - x) \times 15.$$

Le produit de $801 - x$ par 12 est la même chose que le produit de 801 par 12 diminué de celui de x par 12, c'est-à-dire $801 \times 12 - 12x$ ou $9612 - 12x$; de même, $(681 - x) \times 15$ équivaut à $681 \times 15 - 15x$, ou $10215 - 15x$. L'équation ci-dessus revient donc à

$$9612 - 12x = 10215 - 15x.$$

Pour que cette dernière équation soit vérifiée, il faut que $15x$ surpasse $12x$ d'autant que 10215 surpasse 9612; ainsi

$$15x - 12x = 10215 - 9612.$$

$15x - 12x$ est la même chose que $3x$; et en retranchant 9612 de 10215, on a pour reste 603; donc

$$3x = 603, \quad \text{d'où} \quad x = 201.$$

Les deux courriers se rencontreront donc à 201 kil. de Bayonne.

On vérifie aisément l'exactitude de cette solution; car pour que le courrier qui est parti le premier ne soit plus éloigné de Bayonne que de 201 kil., il faut qu'il ait parcouru, depuis le moment du départ du second courrier, 681 — 201 kil., ou 480 kil., et puisqu'il fait 12 kil. par heure, il a dû marcher pendant un nombre d'heures égal au quotient

de 480 par 12, ou 40. Pour que le second courrier ne soit plus éloigné de Bayonne que de 201 kil., il faut qu'il ait parcouru 801 — 201 kil., ou 600 kil.; et puisqu'il fait 15 kil. par heure, il a dû marcher pendant un nombre d'heures égal au quotient de 600 par 15 ou 40. Le second courrier rejoindra donc le premier à 201 kil. de Bayonne.

31. La question précédente peut être généralisée ainsi :

Deux mobiles M *et* N *se meuvent sur une ligne droite* XY, *avec des vitesses constantes* m *et* n, *et dans la même direction de* X *en* Y. *On sait que, lorsque le mobile* M *est parvenu au point* A *qui est distant du point* C *d'une quantité connue* a, *le mobile* N *se trouve au point* B *qui est éloigné du même point* C *d'une autre quantité connue* b. *On demande à quelle distance du point* C *les deux mobiles se rencontrent* (*)?

Si l'on suppose que les deux mobiles ne commencent à se mouvoir qu'à partir des points A et B, il faudra, pour qu'ils puissent se joindre, que le mobile M qui est d'abord en arrière aille plus vite que l'autre, c'est-à-dire qu'il faudra que l'on ait $m > n$. Mais, en admettant que cette condition soit remplie, on aura deux cas à considérer : celui où les deux mobiles devront se rencontrer avant d'avoir atteint le point C, et celui où ils ne pourront se rencontrer qu'après avoir passé par ce point.

Supposons que la rencontre ait lieu au point R situé

(*) Lorsqu'un corps en mouvement parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, on appelle *vitesse* de ce corps l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps; ainsi, en disant que les vitesses des deux mobiles sont m et n, on entend que, dans l'unité de temps, le premier mobile parcourt un espace égal à m fois l'unité de distance, et le second mobile parcourt un espace égal à n fois cette unité.

entre B et C, et désignons par x la distance CR qu'il s'agit de trouver. La distance AR sera $a - x$, la distance BR sera $b - x$; et puisque ces distances seront parcourues dans le même temps, elles seront proportionnelles aux vitesses des deux mobiles, de sorte que l'on aura

$$a - x : b - x :: m : n; \quad \text{d'où} \quad n(a - x) = m(b - x).$$

Les expressions $n(a - x)$ et $m(b - x)$ peuvent être remplacées par $na - nx$ et $mb - mx$; de sorte que l'équation $n(a - x) = m(b - x)$ revient à

$$na - nx = mb - mx.$$

m étant plus grand que n, mx sera plus grand que nx; par conséquent, pour que la dernière équation puisse être vérifiée, il faudra que mb soit plus grand que na, et l'excès de mx sur nx devra être égal à l'excès de mb sur na; ce qui s'exprime ainsi

$$mx - nx = mb - na;$$

et comme $mx - nx$ est la même chose que $(m - n)x$,

$$x = \frac{mb - na}{m - n}.$$

32. Si les deux mobiles ne peuvent se rencontrer qu'au delà du point C, soit R' le point de rencontre, et désignons la distance CR' par x. Les distances AR' et BR' seront $a + x$ et $b + x$; et l'on devra avoir

$$a + x : b + x :: m : n, \quad \text{d'où} \quad n(a + x) = m(b + x).$$

On peut remplacer les expressions $n(a + x)$ et $m(b + x)$ par $na + nx$ et $mb + mx$; de sorte que la dernière équation est la même chose que

$$na + nx = mb + mx.$$

On conclut de celle-ci,

$$mx - nx = na - mb;$$

donc

$$x = \frac{na - mb}{m - n}.$$

33. Au lieu de supposer que les mobiles ne commencent à se mouvoir qu'à partir des points A et B, on peut concevoir qu'ils parviennent à ces points après avoir été en marche depuis un temps indéfini dans la direction XA. De cette manière, le problème ne cessera pas d'admettre une solution, si, au lieu d'avoir $m > n$, on a au contraire $m < n$. Car si le mobile N, animé de la plus grande vitesse, et parvenant au point B à l'instant où l'autre mobile parvient en A, s'est trouvé d'abord en arrière de celui-ci, il aura dû le rencontrer en quelque point en deçà de A.

Soit R″ le point de rencontre, et désignons la distance CR″ par x. Les distances R″A et R″B seront $x - a$ et $x - b$; et puisque les mobiles parviennent au même instant l'un en A et l'autre en B, on devra avoir

$$x - a : x - b :: m : n, \quad \text{d'où} \quad n(x - a) = m(x - b).$$

L'équation $n(x - a) = m(x - b)$ peut s'écrire

$$nx - na = mx - mb.$$

On conclut de celle-ci, à cause de $n > m$,

$$nx - mx = na - mb;$$

donc

$$x = \frac{na - mb}{n - m}.$$

34. Appliquons maintenant les formules que nous venons d'obtenir.

Pour l'exemple que nous avons considéré dans le n° 30, il faut faire dans la formule du n° 31, $a = 801$, $b = 681$, $m = 15$, $n = 12$, ce qui donne

$$x = \frac{15 \times 681 - 12 \times 801}{15 - 12}, \quad \text{d'où} \quad x = 201.$$

Supposons $a = 108^m$, $b = 80^m$, $m = 11^m$, $n = 9^m$. Si l'on met ces valeurs dans la formule du n° 31, on trouvera

$$x = \frac{880 - 972}{11 - 9} = \frac{-92}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = -46.$$

Pour éviter la solution négative, il faudrait mettre les valeurs de a, b, m, n dans la formule du n° 32, ce qui donnerait $x = 46$; ainsi les deux mobiles se rencontrent en un point situé au delà du point C, et qui en est éloigné de 46 mètres. Mais on peut parvenir à cette conclusion d'après la valeur négative $x = -46$, sans se reporter à ce qui a été dit dans le n° 32. En effet, reprenons l'équation du n° 31, $n(a-x) = m(b-x)$, et faisons dans cette équation $a = 108$, $b = 80$, $m = 11$, $n = 9$, $x = -46$. Les différences $a - x$ et $b - x$ deviennent alors $108 + 46$ et $80 + 46$, de sorte que le premier membre est $9(108 + 46)$ ou 1386, le second membre est $11(80 + 46)$ ou 1386, et l'équation est vérifiée. Or, d'après l'égalité $9(108 + 46) = 11(80 + 46)$, on reconnaît que l'inconnue x deviendrait positive en conservant la même valeur numérique, si, au lieu de l'équation ci-dessus, on prenait la suivante $n(a + x = m(b + x)$. Il suit de là que les distances du point de rencontre aux points A et B, qui doivent être proportionnelles aux nombres m et n, au lieu d'être exprimées par $a - x$ et $b - x$, doivent être $a + x$ et $b + x$; ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas où le point de rencontre est au delà du point C.

Supposons pour dernier exemple $a = 80$, $b = 72$, $m = 9$, $n = 11$. Comme on a $n > m$, il faut mettre ces nombres dans la formule du n° 33; on trouve ainsi $x = 116$, ce qui fait connaître que les deux mobiles se sont rencontrés en deçà des points A et B, en un point distant de 116 mètres du point C. Mais la formule du n° 31 conduit au même résultat; car, en y mettant les nombres ci-dessus, on trouve

$x = \frac{648 - 880}{9 - 11}$ ou $x = \frac{-232}{-2}$, d'où l'on conclut par les règles du n° 28, $x = 116$.

On voit par ces exemples que dans chacun des trois cas que nous avons successivement considérés dans les n°s 31, 32 et 33, la solution peut toujours se déduire de la première formule.

Il faut d'ailleurs remarquer que ce que nous disons ici de la formule du n° 31 s'applique également à chacune des deux autres formules : si l'on mettait, par exemple, dans la formule du n° 32, qu'on a obtenue en considérant le cas où le point de rencontre est au delà de C, des nombres tels que ce point dût être à gauche de C, on trouverait pour l'inconnue x une quantité négative, dont la valeur absolue exprimerait toujours la distance cherchée.

35. La question dont nous venons de nous occuper peut être modifiée de diverses manières. On peut supposer, par exemple, que les deux mobiles partent des deux points A et B situés de part et d'autre du point C, et se dirigent l'un vers l'autre :

Dans ce cas, la rencontre peut avoir lieu entre C et A en un point tel que R, ou entre C et B en un point tel que R'. On pourra mettre le problème en équation en adoptant l'une ou l'autre de ces deux suppositions, et la formule qu'on obtiendra donnera encore lieu à des observations semblables à celles que nous venons de faire : c'est-à-dire que cette formule conduira à une valeur positive de l'inconnue, lorsque les valeurs particulières qu'on attribuera aux données s'accorderont avec la supposition qu'on aura adoptée; et elle donnera, au contraire, une valeur négative de l'inconnue, quand les valeurs particulières des données ne s'accor-

deront pas avec la supposition. Mais ce que nous voulons surtout faire remarquer, c'est que la solution de ce nouveau problème pourra encore être donnée par la formule du n° 31.

Pour le faire voir, supposons que le mobile M parcoure 9 mètres dans l'unité de temps, que le mobile N parcoure 11 mètres dans le même intervalle, que la distance AC soit de 140 mètres, la distance BC de 80 mètres, et que les deux mobiles se rencontrent en un point R situé entre A et C. En représentant la distance CR par x, les distances AR et BR seront $140 - x$ et $80 + x$; et comme elles devront être parcourues dans le même temps par les deux mobiles, il faudra que l'on ait

$$140 - x : 80 + x :: 9 : 11; \quad \text{d'où} \quad 11(140 - x) = 9(80 + x).$$

L'équation $11(140 - x) = 9(80 + x)$ ne paraît pas d'abord susceptible d'être comparée à l'équation qu'on a considérée dans le n° 31, savoir, $n(a - x) = m(b - x)$; mais ces deux équations peuvent être écrites comme il suit :

$$\frac{a - x}{m} = \frac{b - x}{n}, \quad \frac{140 - x}{9} = \frac{80 + x}{11}.$$

Pour que le second membre de la première équation devienne le second membre de la seconde équation, il suffit de remplacer b par -80 et n par -11 : la fraction $\frac{b - x}{n}$ devient ainsi $\frac{-80 - x}{-11}$; or cette dernière expression équivaut à $\frac{80 + x}{11}$. Il suit de là que l'on obtiendra la valeur de x qui convient à la question actuelle, en faisant, dans la formule $x = \frac{mb - na}{m - n}$, $b = -80$, $n = -11$, $a = 140$, $m = 9$; ce qui revient à prendre dans cette formule avec des signes contraires les données b et n, qui se rapportent au mobile N dont le mouvement a lieu suivant une direction opposée à

celle qu'on lui attribuait dans le problème du n° 31. On trouve de cette manière

$$x = \frac{9 \times (-80) - (-11) \times 140}{9 - (-11)} = \frac{-720 + 1540}{20} = 41.$$

Il est facile de s'assurer *à posteriori* que la valeur $x = 41$ est, en effet, celle qui satisfait à la question.

Des symboles $\frac{m}{0}$ *et* $\frac{0}{0}$.

36. Quand on fait $m = n$ dans la formule $x = \frac{na - mb}{m - n}$, le dénominateur est réduit à zéro, et si l'on n'a pas $a = b$, le numérateur $na - mb$ est une quantité différente de zéro; de sorte qu'en représentant cette quantité par p, la formule devient

$$x = \frac{p}{0}.$$

En se reportant à la question qui nous a conduits à la formule ci-dessus, on voit que dans les suppositions que nous examinons actuellement, les deux mobiles ne peuvent plus se rencontrer, puisque, leurs vitesses étant égales, ils conserveront toujours entre eux le même intervalle. L'expression $\frac{p}{0}$ qu'on obtient pour x indique cette conclusion; car elle marque, d'après le sens de la division, que la quantité cherchée x devrait être telle qu'en la multipliant par zéro, on eût un produit égal à p, et puisque p est différent de zéro, il n'existe pas de quantité qui satisfasse à cette condition.

Si l'on divisait successivement la quantité p par les nombres décroissants $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc., on obtiendrait les quotients p, $10\,p$, $100\,p$, $1000\,p$, etc. Ces quotients vont en augmentant, et quelle que soit la quantité p, on peut toujours prendre le diviseur assez petit pour que le quotient

devienne aussi grand qu'on le voudra. Il suit de là que le symbole $\frac{p}{0}$ exprime le dernier état d'une grandeur qui croît indéfiniment. On dit par cette raison que ce symbole représente l'*infini*.

Dans la question du n° 31, il est clair que, si la différence des vitesses m et n diminue de manière à s'approcher autant qu'on le voudra de zéro, les distances a et b restant constantes, la distance du point de rencontre des mobiles au point C augmentera, et pourra devenir plus grande que tout quantité assignable; et au lieu de dire, lorsque $m = n$, que les mobiles ne se rencontrent pas, on peut dire qu'ils se rencontrent à l'infini.

37. Quand on suppose dans la formule ci-dessus $b = a$ et $m = n$, il vient

$$x = \frac{0}{0}.$$

Or, par quelque nombre que l'on multiplie zéro, le produit est toujours égal à zéro; on peut donc prendre pour le quotient de zéro par zéro tel nombre que l'on veut. La formule indique ainsi que le lieu de la rencontre des mobiles est indéterminé: c'est en effet ce que l'on reconnaît en se reportant à l'énoncé; car, d'après les hypothèses $b = a$ et $m = n$, les deux mobiles partent du même point et ils ont la même vitesse; ils sont donc toujours ensemble.

38. Le quotient de deux quantités exprimées algébriquement devenant *infini* quand le diviseur est nul sans que le dividende le soit, et *indéterminé* quand le diviseur et le dividende sont nuls, on dit, par opposition, que lorsque le diviseur n'est pas nul, le quotient a une valeur *finie* et *déterminée*.

Digitized by Google

CHAPITRE DEUXIÈME.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, DIVISION, FRACTIONS.

Définitions. — Observations préliminaires.

39. Lorsque plusieurs quantités sont réunies par les signes + et —, chaque quantité considérée avec le signe qui la précède, forme un *terme*. Ainsi, dans l'expression $3a - 5b + 8c$, il y a trois termes $3a$, $-5b$, $+8c$.

On appelle *monôme* une expression algébriquequi n'a qu'un seul terme, et *polynôme* celle qui en a plusieurs. Une expression formée seulement de deux termes est un *binôme*; celle qui en a trois est un *trinôme*, etc.

On nomme aussi les monômes *quantités incomplexes*, et les polynômes *quantités complexes*.

Un nombre placé comme facteur devant une quantité prend le nom de *coefficient*. Ainsi, dans l'expression $3a - \frac{5}{7}b$, les nombres 3 et $\frac{5}{7}$ sont des coefficients.

40. La valeur d'une expression algébrique est le résultat qu'on obtient en effectuant les opérations indiquées dans l'expression, après avoir attribué des valeurs particulières aux lettres, et chaque lettre peut recevoir indifféremment une valeur positive ou une valeur négative.

Soit le polynôme $3a - 5b + 8c$, et supposons qu'on ait $a = +3$, $b = -4$, $c = +5$. Les quantités $3a$, $5b$ et $8c$ seront -9, -20 et $+40$; comme le polynôme proposé exprime que l'on doit soustraire $5b$ de $3a$, et ajouter $8c$ au résultat de la soustraction, il deviendra, suivant les règles

des n°s 23 et 24, $-9+20+40$. Ce qui se réduit, par la règle du n° 25, à $+51$.

Il suit évidemment de la dernière règle que nous venons de rappeler, que *la valeur d'un polynôme n'est point altérée quand on intervertit l'ordre des termes.*

Et, *lorsqu'on change dans un polynôme tous les signes + en — et les signes — en +, la valeur du polynôme change seulement de signe.*

Un terme qui n'est précédé d'aucun signe est regardé comme précédé du signe +.

41. Lorsqu'une lettre a représente une quantité négative, on considère les expressions monômes telles que $+a$, $-a$, $+3a$, $-5a$, comme ayant la même signification qu'elles auraient si elles faisaient partie, avec leurs signes, d'un polynôme. D'après cette convention, si l'on a, par exemple, $a=-8$, le monôme $+3a$ devient -24, et le monôme $-5a$ devient $+40$; en général, un monôme affecté du signe + a le même sens que s'il n'était affecté d'aucun signe, et un monôme affecté du signe — exprime la quantité de signe contraire à celle qu'il exprimerait si on le considérait indépendamment de ce signe.

Addition et soustraction des monômes et des polynômes.

42. D'après ce qu'on a vu dans le n° 25, lorsqu'on ne doit attribuer aux lettres que des valeurs positives, pour indiquer l'*addition de plusieurs monômes, il suffit de les écrire à la suite les uns des autres avec leurs signes.*

Cette règle ne change pas, lorsque les lettres peuvent recevoir des valeurs négatives; car si, après avoir ainsi réuni les monômes proposés, on met dans le polynôme qui en résulte les valeurs des lettres, on trouvera le même résultat que si l'on introduisait d'abord ces valeurs dans les

monômes, et que l'on fît ensuite la somme des quantités produites par cette substitution.

43. Quant à la soustraction, puisqu'elle revient à une addition, en prenant la quantité à soustraire en signe contraire (n° 24), *pour soustraire un monôme, il faut l'écrire à la suite de la quantité dont on doit soustraire, avec le signe contraire à celui dont il est affecté.*

44. Supposons qu'on doive ajouter à une quantité A le polynôme $c - d + f$. Si la quantité A devait être augmentée de c seulement, le résultat serait exprimé par $A + c$; si, au lieu d'ajouter c à A, il faut ajouter à A la quantité c diminuée de d, la somme $A + c$ sera trop forte de d: il faudra donc la diminuer de d, ce qui donnera $A + c - d$; et comme ce n'était pas $c - d$ que l'on devait ajouter, mais cette quantité augmentée de f, la somme $A + c - d$ doit être augmentée de f, ce qui donne $A + c - d + f$.

Si la lettre A représente un polynôme, on pourra mettre ce polynôme à la place de A dans la dernière expression, sans que le sens de cette expression soit altéré.

Par conséquent, *pour ajouter plusieurs polynômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant à tous leurs termes les signes dont ils sont affectés.*

45. Supposons que l'on ait à soustraire de A le polynôme $c - d + f$. Si l'on devait soustraire c de A, le reste s'exprimerait par $A - c$; si au lieu de c, c'est $c - d$ que l'on doit soustraire, le reste $A - c$ sera trop petit de d: il faudra donc l'augmenter de d, ce qui donnera $A - c + d$; et comme ce n'était pas $c - d$ qu'il fallait soustraire, mais cette quantité augmentée de f, le reste $A - c + d$ devra être diminué de f, ce qui donnera $A - c + d - f$.

Il suit de là que, *pour soustraire un polynôme, il faut l'écrire à la suite de la quantité dont on doit soustraire, en changeant le signe de chaque terme.*

46. Les explications par lesquelles nous venons d'établir les règles de l'addition et de la soustraction des polynômes, supposent que les lettres A, c, d, f, et le polynôme $c-d+f$ représentent des quantités positives; mais on peut facilement s'assurer que les règles que nous avons déduites de ces explications restent les mêmes, quels que soient les signes des quantités.

En effet, pour l'addition, nommons B la quantité à laquelle se réduirait le polynôme $c-d+f$, si l'on effectuait les opérations, après avoir attribué aux lettres des valeurs particulières. On aura le même résultat, soit que l'on ajoute B à A ou A à B. Or, pour exprimer la seconde opération, il suffit d'écrire $c-d+f+$ A; et comme on peut changer l'ordre des termes, cette expression est équivalente à $A+c-d+f$.

A l'égard de la soustraction, supposons qu'on ait effectué les opérations indiquées dans le polynôme à soustraire, après avoir donné des valeurs aux lettres; pour soustraire le résultat qu'on aura obtenu, il faudra ajouter à la quantité dont on doit soustraire, la quantité de signe contraire à ce résultat (n° 26). Or la valeur d'un polynôme change de signe quand on change le signe de chaque terme (n° 40), et l'on vient de voir que, pour l'addition, les termes des quantités que l'on ajoute conservent leurs signes. On est ainsi ramené à la règle ci-dessus.

Réduction des termes semblables.

47. On appelle termes semblables les termes qui ne diffèrent les uns des autres que par les coefficients ou les signes, comme $+3a$, $+2a$ et $-\frac{2}{3}a$.

Quand il y a des termes semblables dans un polynôme, on peut les réunir en un seul : c'est ce que l'on appelle la *réduction des termes semblables*.

Soit, par exemple, le polynôme

$$5b + 11a - 3b + 8c + 2b - d - 10b.$$

Puisqu'il est permis d'intervertir l'ordre des termes, on peut écrire, en rapprochant les termes semblables,

$$5b + 2b - 3b - 10b + 11a + 8c - d.$$

Les deux termes positifs $5b$ et $+2b$ peuvent être remplacés par $7b$; les deux termes négatifs $-3b$ et $-10b$ peuvent être remplacés par $-13b$; et les deux termes $+7b$ et $-13b$ équivalent ensemble à $-6b$, car il faut répéter la valeur numérique de b d'une part 7 fois, et de l'autre part 13 fois, prendre la différence des deux produits, et l'affecter du signe du terme qui a la plus grande valeur numérique. Le polynôme proposé revient donc à

$$11a - 6b + 8c - d.$$

En général, *on peut remplacer, dans un polynôme, plusieurs termes semblables, par un seul terme formé de la même partie littérale, dont le coefficient est égal à la différence entre la somme des coefficients des termes affectés du signe + et la somme des coefficients des termes affectés du signe —, et dont le signe est celui des termes pour lesquels la somme des coefficients est la plus grande.*

S'il y avait un terme qui n'eût pas de coefficient, il faudrait le regarder comme ayant pour coefficient l'unité; car la réunion des deux termes $+3a$ et $+a$ équivaut à $4a$, et celle des deux termes $+3a$ et $-a$ équivaut à $+2a$.

48. Lorsqu'on a appliqué les règles des n^{os} **44** et **45**, il faut faire la réduction des termes semblables. Pour faciliter cette réduction, on écrit les polynômes les uns au-dessous des autres, comme on le voit dans les exemples qui suivent :

Exemples d'addition.

1°. $4a-2b+3c$
$7b-5a-2c$
$b-3a+2c$

Somme $-4a+6b+3c$.

2°. $4a-\frac{2}{5}b+c+\frac{2}{3}$
$5a-3c+2d-\frac{1}{4}$
$8b-5f+3$

Somme $9a+\frac{37}{5}b-2c+2d-5f+\frac{41}{12}$.

Exemples de soustraction.

1°. De $6a-2b+3c$
soustraire $3a-\frac{2}{3}b+2c$

Reste $6a-2b+3c$
$-3a+\frac{2}{3}b+2c$

Reste réduit $3a-\frac{4}{3}b+c$;

2°. De $5a-2b+3c$
soustraire $8b-2c-5d+3$

Reste $5a-2b+3c$
$-8b+2c+5d-3$

Reste réduit $5a-10b+5c+5d-3$.

Multiplication des monômes.

49. Il a été dit que le produit d'un nombre quelconque de facteurs a, b, c, etc., s'exprime ainsi : $a \times b \times c \times$ etc., ou $a.b.c.$ etc., ou encore abc etc.

Quand il y a des facteurs égaux, on n'écrit qu'un seul de ces facteurs, et l'on place à sa droite et un peu au-dessus le nombre qui marque combien de fois il doit entrer dans le produit. Ce nombre reçoit alors le nom d'*exposant*. Ainsi, au lieu de aaa on écrit a^3, et 3 est dit l'exposant de a.

Les résultats qu'on obtient en multipliant une quantité une ou plusieurs fois par elle-même sont appelés *puissances* de cette quantité. a^2 est la deuxième puissance de a, a^3 en est la troisième puissance, a^4 en est la quatrième puissance, etc. La deuxième et la troisième puissance d'une quantité sont aussi appelées le *carré* et le *cube* de cette quantité.

La quantité qu'on a élevée à une puissance prend, par rapport à cette puissance, le nom de *racine*. Par exemple, a est la *racine carrée* ou *deuxième* de a^2, la racine *cubique* ou *troisième* de a^3, la *racine quatrième* de a^4, etc.

50. On démontre, en arithmétique, que le produit de plusieurs nombres reste le même dans quelque ordre qu'on fasse les multiplications. Cette proposition ne cesse pas d'être vraie, quand il y a des facteurs négatifs; car il résulte des règles du n° 27 que le signe d'un produit est $+$ ou $-$, selon que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair, quel que soit d'ailleurs l'ordre dans lequel se présentent ces facteurs.

On déduit de là que la multiplication d'une quantité par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier cette quantité par le premier facteur, le produit par le second facteur, le nouveau produit par le troisième facteur, etc. En effet, si la quantité a doit être multipliée par le produit bcd, le résultat de cette opération sera le même que si l'on multipliait bcd par a, ce qui s'indique par $bcd \times a$ ou $bcda$, et en transposant les facteurs, $abcd$.

On peut encore remarquer que, pour multiplier un produit par une quantité, il suffit de multiplier un des facteurs par cette quantité; car, le produit de bcd par a étant égal à $abcd$ ou à $bacd$, il s'ensuit qu'on peut former ce produit en multipliant le facteur b par a, et le produit ba par les autres facteurs c, d.

51. Une expression composée de plusieurs facteurs, sans interposition des signes $+$ ou $-$, comme $3a^2b^3c$, est rangée parmi les monômes. L'expression $3a^2b - 5abc + 7d^2f$ est un polynôme de trois termes, ou un trinôme.

Le monôme $3a^2b^3c$ exprime le produit qu'on obtiendrait en multipliant le nombre 3 par a^2, le produit $3a^2$ par b^3, et le produit $3a^2b^3$ par c. Mais on peut aussi considérer cette expression comme indiquant que le produit de tous les facteurs littéraux doit être multiplié par le *coefficient* 3. De cette manière, on voit que tout ce que nous avons dit plus haut à l'égard des termes semblables s'applique à des

termes quelconques composés des mêmes lettres avec les mêmes exposants. Ainsi, les deux termes $5a^2b^3c$ et $-3a^2b^3c$ sont semblables; et les expressions $5a^2b^3c + 3a^2b^3c$, $5a^2b^3c - 3a^2b^3c$ se réduisent, l'une à $8a^2b^3c$, l'autre à $2a^2b^3c$. Les deux termes $3a^2b$ et $3ab^2$ ne sont pas semblables, et les expressions $3a^2b + 3ab^2$, $3a^2b - 3ab^2$ ne sont pas susceptibles de réduction.

52. Soit à multiplier $5a^3b^2c$ par $3a^2b^4d^2$.

On pourrait exprimer le produit en écrivant les quantités proposées l'une à la suite de l'autre, et mettant entre elles le signe $\times$ ou un point; on pourrait même ne mettre aucun signe, puisque, d'après ce qui a été dit dans le n° 50, la multiplication de ces quantités revient à multiplier successivement la première par les facteurs 3, a^2, b^4, d^2. Mais on peut obtenir une expression plus simple; et c'est en cela que consiste *la multiplication des monômes*.

Pour multiplier $5a^3b^2c$ par 3, il suffit de multiplier le facteur 5 par 3, ce qui donne $15a^3b^2c$. On peut multiplier $15a^3b^2c$ par a^2, en multipliant a^3 par a^2. Comme a^3 est l'abréviation de aaa, et a^2 celle de aa, le produit de a^3 par a^2 peut être exprimé par $aaaaa$ ou a^5; par conséquent, le produit de $15a^3b^2c$ par a^2 est $15a^5b^2c$. On voit de la même manière que le produit de $15a^5b^2c$ par b^4 est $15a^5b^6c$; et pour indiquer que ce dernier produit doit être multiplié par d^2, on doit écrire à sa suite le facteur d^2, ce qui donne $15a^5b^6cd^2$.

On conclut de là que, pour *faire le produit de deux monômes, il faut faire le produit des coefficients, et placer comme facteurs, à la suite de ce produit, toutes les lettres qui se trouvent dans les monômes proposés, en donnant à chaque lettre qui leur est commune un exposant égal à la somme des exposants dont elle est affectée, et conservant aux lettres qui n'entrent que dans un des facteurs les exposants qu'elles ont.*

S'il y avait une lettre qui n'est pas d'exposant, il faudrait la considérer comme ayant l'unité pour exposant; car le produit de a^3 par a est a^4.

53. Quand les monômes sont considérés avec des signes, les facteurs exprimés par les lettres pouvant d'ailleurs être ou des quantités positives ou des quantités négatives, il faut toujours suivre pour le signe du produit les règles du n° 27, comme on le voit dans le tableau suivant :

$$+a \times +b = +ab, \quad +a \times -b = -ab,$$
$$-a \times +b = -ab, \quad -a \times -b = +ab.$$

En effet: 1° Les expressions $+a$ et $+b$ indiquant les mêmes quantités que a et b, le produit de ces quantités doit s'exprimer par ab, ce qui est la même chose que $+ab$. 2° Les expressions $-a$ et $-b$ indiquent les quantités de signes contraires à celles qui sont représentées par a et b. Or, d'après les règles du n° 27, un produit change de signe quand un des facteurs change de signe, et l'autre conserve le sien; le produit de $-a$ par $+b$ et celui de $+a$ par $-b$ doivent donc être de signe contraire au produit ab; ils sont donc égaux l'un et l'autre à $-ab$. 3° Le produit de $-a$ par $-b$ doit être de signe contraire à celui de $-a$ par $+b$; il est donc $+ab$.

Multiplication des polynômes.

54. Considérons d'abord la multiplication du polynôme $a+b-c$ par m, les lettres a, b, c désignant des quantités quelconques positives ou négatives.

Si m est un nombre entier positif, le produit sera la somme de m quantités égales à $a+b-c$; or, par la réduction des termes semblables, cette somme est $ma+mb-mc$.

Si m désigne une fraction positive $\frac{p}{q}$, il faudra diviser

$a+b-c$ par q, et multiplier le résultat par p. Or le quotient de $a+b-c$ par q est égal à $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$, puisque, suivant ce que l'on vient de voir, la multiplication de cette dernière quantité par q reproduira $a+b-c$. On obtiendra donc le produit de $a+b-c$ par m en multipliant $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}-\frac{c}{q}$ par p, ce qui donnera $\frac{ap}{q}+\frac{bp}{q}-\frac{cp}{q}$, ou $am+bm-cm$.

Enfin, supposons que m représente une quantité négative. La multiplication de $a+b-c$ par m reviendra à multiplier $a+b-c$ par la valeur absolue de m, et à changer ensuite le signe du résultat, ce qui reviendra à multiplier chaque terme de $a+b-c$ par la valeur absolue de m, et à changer ensuite le signe de chaque produit partiel, ou bien encore à multiplier chaque terme du multiplicande par la quantité négative m. Le produit sera donc, comme dans les cas précédents, $am+bm-cm$.

Considérons actuellement le produit des deux polynômes $a+b-c$ et $m+n-p$. Si l'on suppose que l'on ait effectué les opérations indiquées dans le premier polynôme de manière à le réduire à un seul terme, le produit pourra être formé suivant ce que l'on vient de voir, et il sera

$$m(a+b-c)+n(a+b-c)-p(a+b-c).$$

Mais, au lieu de $m(a+b-c)$, on peut écrire $am+bm-cm$; de même on peut remplacer $n(a+b-c)$ par $an+bn-cn$, $p(a+b-c)$ par $ap+bp-cp$; et en ajoutant la seconde quantité à la première, et retranchant de la somme la troisième quantité, on a pour le produit demandé

$$am+bm-cm+an+bn-cn-ap-bp+cp.$$

Il résulte de là que, *pour effectuer la multiplication de deux polynômes, il faut multiplier successivement tous les*

termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en mettant dans les produits les signes des termes du multiplicande, lorsque le terme du multiplicateur a le signe +, et les signes contraires, lorsque le terme du multiplicateur a le signe —.

D'après cette règle, le produit de deux termes dans la multiplication des polynômes reçoit le même signe qu'il recevrait si ces termes étaient considérés isolément et avec leurs signes; de sorte qu'on pourrait se borner à dire qu'*il faut multiplier tous les termes du multiplicande par tous les termes du multiplicateur, et faire la somme de tous les produits.*

55. Pour la commodité des calculs, il est bon d'arranger les termes des polynômes qu'on doit multiplier, de manière que les exposants d'une même lettre aillent toujours en croissant ou en décroissant : cela s'appelle *ordonner* les polynômes. On dispose, en outre, l'opération comme on le voit dans l'exemple ci-dessous :

Multiplicande	$5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3$
Multiplicateur	$4a^2 - 5ab + 2b^2$
Produits partiels	$20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3$
	$-25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4$
	$+10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5$
Produit total réduit	$20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5$.

La première ligne des produits partiels contient les produits de tous les termes du multiplicande par le premier terme $4a^2$ du multiplicateur : ce terme étant censé avoir le signe +, les produits qu'il donne ont les mêmes signes que les termes du multiplicande. On observe d'ailleurs, pour former chacun de ces produits, la règle qui a été donnée précédemment à l'égard des coefficients et des exposants, dans la multiplication des monômes (n° 52).

La seconde ligne contient les produits de tous les termes du multiplicande par le second terme $-5ab$ du multiplicateur; et comme ce terme a le signe —, tous les produits qu'il donne ont les signes contraires à ceux des termes correspondants du multiplicande.

La troisième ligne contient les produits de tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+2b^2$ du multiplicateur; et comme ce terme a le signe +, tous les produits qu'il donne ont les signes des termes du multiplicande.

On obtient le produit total en réunissant tous les produits partiels et pratiquant immédiatement la réduction; et pour faciliter cette dernière partie de l'opération, on a soin d'écrire les produits semblables les uns au-dessous des autres.

56. Voici quelques multiplications par lesquelles on démontre des propositions que l'on a fréquemment occasion d'appliquer :

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab \quad +b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab \quad +b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

La première opération fait voir que *le carré de la somme de deux quantités est égal au carré de la première quantité, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

La seconde opération fait voir que *le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première quantité, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Par la troisième opération, on apprend que *le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Enfin, la dernière opération, dans laquelle le carré de $a+b$ a été multiplié par $a+b$, prouve que *le cube de la somme de deux quantités est égal au cube de la première quantité, plus trois fois le carré de la première multiplié par la seconde, plus trois fois la première multipliée par le carré de la seconde, plus le cube de la seconde.*

Pour reconnaître la composition de la quatrième puissance de deux nombres, et des puissances supérieures, il suffirait de multiplier le cube de $a+b$ par $a+b$, puis le résultat par $a+b$; ainsi de suite. On reconnaîtrait de la même manière la composition des diverses puissances de la différence de deux quantités.

57. Nous proposerons comme exercices les opérations suivantes :

1°. Multiplier la quatrième puissance de $2a+3b$ par la quatrième puissance de $2a-3b$;

2°. Faire le carré du trinôme $16a^4-72a^2b^2+81b^4$;

3°. Multiplier le polynôme $2a^3+5a^2b-4ab^2+2b^3$ par le polynôme $2a^3+5a^2b+4ab^2-2b^3$.

Les deux premières opérations devront conduire au même résultat. On peut le démontrer sans faire les calculs, au moyen des propositions qui ont été exposées dans le numéro précédent. La troisième opération peut être abrégée en faisant usage des mêmes propositions.

58. Dans les exemples de multiplication qui précèdent,

chaque facteur ne comprend que des termes dans lesquels la somme des exposants est la même. Cette somme constitue ce que l'on appelle le *degré* d'un terme. Quand tous les termes d'un polynôme ont le même degré, on dit que le polynôme est *homogène*, et le degré de chaque terme constitue aussi le degré du polynôme. Lorsqu'un produit est formé avec des facteurs homogènes, il doit être lui-même homogène, et son degré doit être égal à la somme des degrés des facteurs. Si ces conditions n'étaient pas remplies, on devrait en conclure qu'il a été commis des erreurs dans les multiplications partielles.

59. Lorsqu'un polynôme qu'on veut ordonner par rapport à une lettre a contient plusieurs termes dans lesquels cette lettre a le même exposant, on renferme ces termes dans des parenthèses, en supprimant dans chacun d'eux la puissance de la lettre a, que l'on écrit une seule fois en dehors de la parenthèse. Par exemple, si le polynôme proposé contient les trois termes $+2b^2a^3 - 2ba^3 - 3a^3$, on écrit $+(2b^2 - 2b - 3)a^3$: cette expression est alors considérée comme un seul terme, et le polynôme $2b^2 - 2b - 3$ est regardé comme le coefficient de a^3. Ce coefficient est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de b. Pour l'ordonner par rapport aux puissances croissantes de la même lettre, on écrirait $+(-3 - 2b + 2b^2)a^3$, ou $-(3 + 2b - 2b^2)a^3$. Souvent on place les termes du coëfficient les uns au-dessous des autres dans une colonne, à droite de laquelle on tire un trait vertical, et l'on place à droite de ce trait la puissance de la lettre par rapport à laquelle on ordonne, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{l|l} +2b^2 & a^3 \\ -2b & \\ -3 & \end{array} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{array}{l|l} -3 & a \\ -2b & \\ +2b^2 & \end{array}$$

On voit ci-dessous, et à la page suivante, un exemple de multiplication dans lequel on a employé ces deux dispositions. L'opération s'exécute d'après la règle du n° 54, comme si le multiplicande était formé seulement de trois termes et le multiplicateur de deux; mais dans les multiplications partielles, on a des polynômes à multiplier. La seconde disposition présente ces parties du calcul exécutées séparément.

Multiplicande	$2b$	$a^2 - 4b^2$	$a + 8b^3$	
	-1	$+2b$	$-4b^2$	
		-1		
Multiplicateur	$2b$	$a - 4b^2$		
	$+1$	$+1$		
Produit du multiplicande par $2b \mid a$, $+1$	$4b^2$	$a^3 - 8b^3$	$a^2 + 16b^4$	a
	$-2b$	$+4b^2$	$-8b^3$	
	$+2b$	$-2b$	$+8b^3$	
	-1	$-4b^2$	$-4b^2$	
		$+2b$		
		-1		
Produit du multiplicande par $-4b^2$, $+1$		$-8b^3$	$+16b^4$	$-32b^5$
		$+4b^2$	$-8b^3$	$+16b^4$
		$+2b$	$+4b^2$	$+8b^3$
		-1	$-4b^2$	$-4b^2$
			$+2b$	
			-1	
Produit total simplifié	$4b$	$a^3 - 16b^3$	$a^2 + 32b^4$	$a - 32b^5$
	-1	$+4b^2$	$-8b^3$	$+16b^4$
		$+2b$	$-4b^2$	$+8b^3$
		-2	$+2b$	$-4b^2$
			-1	

$$(2b-1)a^2-(4b^2-2b+1)a+8b^3-4b^2$$
$$(2b+1)a-(4b^2-1)$$

$$(4b^2-1)a^3-(8b^3+1)a^2+(16b^4-4b^2)a$$
$$-(8b^3-4b^2-2b+1)a^2+(16b^4-8b^3+2b-1)a-(32b^5-16b^4-8b^3+4b^2)$$
$$(4b^2-1)a^3-(16b^3-4b^2-2b+2)a^2+(32b^4-8b^3-4b^2-1)a-(32b^5-16b^4-8b^3+4b^2).$$

1re *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 2b-1 \\ 2b+1 \\ \hline 4b^2-2b \\ \quad +2b-1 \\ \hline 4b^2 \qquad -1 \end{array}$$

2e *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 4b^2-2b+1 \\ 2b+1 \\ \hline 8b^3-4b^2+2b \\ \quad +4b^2-2b+1 \\ \hline 8b^3 \qquad\qquad +1 \end{array}$$

3e *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 8b^3-4b^2 \\ 2b+1 \\ \hline 16b^4-8b^3 \\ \quad +8b^3-4b^2 \\ \hline 16b^4 \qquad -4b^2 \end{array}$$

4e *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 2b-1 \\ 4b^2-1 \\ \hline 8b^3-4b^2 \\ \qquad -2b+1 \\ \hline 8b^3-4b^2-2b+1 \end{array}$$

5e *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 4b^2-2b+1 \\ 4b^2-1 \\ \hline 16b^4-8b^3+4b^2 \\ \qquad -4b^2+2b-1 \\ \hline 16b^4-8b^3 \qquad +2b-1 \end{array}$$

6e *Multiplication partielle.*

$$\begin{array}{l} 8b^3-4b^2 \\ 4b^2-1 \\ \hline 32b^5-16b^4 \\ \qquad -8b^3+4b^2 \\ \hline 32b^5-16b^4-8b^3+4b^2 \end{array}$$

Division des monômes. — Exposant zéro.

60. Lorsque l'on connaît un produit algébrique et l'un de ses facteurs, on peut déterminer l'autre facteur : cette opération prend, comme en arithmétique, le nom de *division;* le produit donné est le *dividende*, le facteur connu est le *diviseur*, et le facteur cherché est le *quotient*.

61. Le quotient de deux monômes ne peut être qu'un monôme; et, d'après la règle de la multiplication des monômes (n° 52), le coefficient du dividende doit résulter de la multiplication du coefficient du diviseur par celui du quotient, et le dividende doit contenir toutes les lettres qui entrent dans le diviseur et dans le quotient, chaque lettre commune ayant un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans le diviseur et dans le quotient, et les exposants des autres lettres étant ceux qu'elles ont dans le diviseur ou dans le quotient. De là résulte la règle suivante :

Pour effectuer la division d'un monôme par un monôme, on divisera le coefficient du dividende par celui du diviseur; on aura ainsi le coefficient du quotient. On écrira au quotient toutes les lettres du dividende qui ne se trouveront pas dans le diviseur, en leur conservant leurs exposants; et les lettres communes qui auront dans le dividende des exposants plus grands que dans le diviseur, en donnant à chacune d'elles un exposant égal à la différence des deux exposants. S'il y a des lettres qui ont le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, elles devront ne pas entrer dans le quotient.

Lorsque le coefficient du dividende n'est pas divisible par celui du diviseur, ou lorsque le diviseur contient une lettre qui ne se trouve pas dans le dividende, ou qui y est contenue avec un exposant moindre que celui qu'elle a dans le diviseur, la division ne peut pas être effectuée.

Digitized by Google

A l'égard des signes, on voit, en se reportant à ce qui a été dit pour la multiplication (n° 53), qu'on doit suivre dans la division les règles du n° 28.

Exemples.

$$\frac{+18a^3b^2c}{+6a^2c} = +3ab^2, \qquad \frac{-18a^3b^2c}{+3ab^2} = -6a^2c,$$

$$\frac{+30a^5b^4c^3d^2}{-6a^5bd} = -5b^3c^3d, \qquad \frac{-30a^5b^4c^3d^2}{-5b^3c^3d} = +6a^5bd.$$

62. Quand on a à diviser a^m par a^m, le quotient est l'unité; d'un autre côté, si l'on retranchait, dans ce cas, l'exposant du diviseur de celui du dividende, on trouverait a^0 pour l'expression du quotient. On est ainsi amené à regarder le symbole a^0 comme équivalent à l'unité, quelle que soit la quantité qui a été désignée par a. On est aussi conduit à cette convention par la définition de l'exposant; car a^3, par exemple, est la même chose que $1 \times a \times a \times a$; a^2 équivaut pareillement à $1 \times a \times a$; a ou a^1 équivaut à $1 \times a$: il est donc naturel d'admettre que a^0 est l'expression du seul facteur 1. Au moyen de cette convention, on peut abréger les énoncés des règles de la multiplication et de la division des monômes; car, en considérant les monômes qui ne contiennent pas une lettre comme la renfermant avec l'exposant zéro, il suffit de dire, pour la multiplication des monômes, qu'après avoir multiplié les coefficients *on doit écrire au produit toutes les lettres qui entrent dans les monômes proposés, en donnant à chacune d'elles un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les différents facteurs;* et, pour la division des monômes, on peut dire qu'*il faut mettre au quotient toutes les lettres du dividende, en donnant à chacune d'elles un exposant égal au reste qu'on obtient en retranchant l'exposant qu'elle a dans le diviseur, de celui qu'elle a dans le dividende.*

Division des polynômes.

63. On a vu que le produit de deux polynômes est la somme des produits de tous les termes de l'un des facteurs par chacun des termes de l'autre facteur. La plupart de ces produits partiels se confondent par la réduction des termes semblables, et il ne serait pas possible de les reconnaître tous immédiatement dans le produit total simplifié. Mais le terme qui, dans l'un des polynômes, contient le plus fort exposant d'une lettre, multiplié par le terme de l'autre polynôme dans lequel la même lettre a le plus fort exposant, donne un produit qui contient cette lettre avec un exposant plus grand que ceux qu'elle a dans tous les autres produits partiels. Ce produit ne peut donc se réduire avec aucun autre, et il se retrouve sans altération dans le produit total.

Il suit de là qu'en choisissant dans le dividende le terme affecté du plus fort exposant d'une lettre, et en le divisant par le terme du diviseur affecté du plus fort exposant de la même lettre, on obtiendra un terme du quotient; et ce terme sera celui qui, dans le quotient, contiendra le plus fort exposant de la même lettre.

En multipliant le diviseur par ce terme, et en retranchant le produit du dividende, on aura un reste qui ne contiendra plus que les produits du diviseur par les autres termes du quotient. Ce reste pourra donc être regardé comme un nouveau dividende; et en divisant le terme de ce nouveau dividende qui contiendra le plus fort exposant d'une lettre, par le terme du diviseur affecté du plus fort exposant de la même lettre, on obtiendra un second terme du quotient; ainsi de suite. Quand on aura trouvé tous les termes du quotient, en soustrayant le produit du diviseur par le dernier terme, on obtiendra un reste nul; car on

aura successivement retranché du dividende le produit du diviseur par tous les termes du quotient, c'est-à-dire tout ce qui compose le dividende.

Au lieu de considérer, dans chaque division partielle, les termes affectés des plus forts exposants d'une lettre, on pourrait considérer les termes affectés des plus faibles exposants; car le produit partiel formé avec les termes affectés des plus faibles exposants d'une lettre dans le diviseur et dans le quotient, a donné, sans aucune réduction, le terme du dividende qui contient le plus faible exposant de la même lettre.

Pour faciliter les calculs, on ordonne le dividende, le diviseur et les restes, par rapport à la même lettre; de cette manière, les termes qu'il faut considérer à chaque opération sont ceux qui se trouvent écrits les premiers dans le diviseur et dans les dividendes successifs.

D'après tout ce qui vient d'être dit, la règle de la division des polynômes s'énoncera comme il suit :

Ordonnez le dividende et le diviseur par rapport aux puissances décroissantes ou aux puissances croissantes d'une lettre. Divisez le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le résultat sera le premier terme du quotient. Retranchez du dividende le produit du diviseur par ce terme, en prenant soin que le reste soit ordonné de la même manière que les polynômes proposés. Divisez le premier terme du reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le second terme du quotient. Retranchez du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient, et divisez le premier terme du nouveau reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le troisième terme du quotient. Ainsi de suite.

La lettre par rapport à laquelle on a ordonné est appelée *lettre principale*, ou *lettre d'ordre*, et le plus fort expo-

sant de cette lettre dans chaque polynôme est le *degré* du polynôme par rapport à cette lettre.

64. Prenons, pour exemple, les deux polynômes :

Dividende, $50a^3b^2 - 6b^5 + 25ab^4 - 45a^2b^3 - 40a^4b + 21a^5$.

Diviseur, $5ab^2 - 3b^3 - 4a^2b + 5a^3$.

On ordonne ces polynômes, et l'on dispose le calcul comme on le voit ci-dessous :

$$
\begin{array}{l|l}
20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
\cline{2-2}
-20a^5 + 16a^4b - 30a^3b^2 + 12a^2b^3 & 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\
\hline
1^{er}\ reste\ -25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & \\
\quad +25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 & \\
\hline
2^e\ reste\ \quad +10a^3b^2 + 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 & \\
\quad -10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 & \\
\hline
3^e\ reste\ \quad 0 &
\end{array}
$$

La division du premier terme $20a^5$ du dividende par le premier terme $5a^3$ du diviseur, donne le premier terme $4a^2$ du quotient. On multiplie le diviseur par $4a^2$, et l'on soustrait le produit du dividende : à cet effet, on écrit le produit sous le dividende, en changeant le signe de chaque terme, puis on fait les réductions ; on obtient de cette manière le premier reste. On divise le premier terme $-25a^4b$ de ce reste par le premier terme $5a^3$ du diviseur, ce qui donne le second terme $-5ab$ du quotient. On multiplie le diviseur par $-5ab$, et l'on retranche le produit du premier reste, ce qui donne le deuxième reste. On divise le premier terme de ce reste par $5a^3$, ce qui donne le troisième terme du quotient. En retranchant du deuxième reste le produit du diviseur par $+2b^2$, on obtient un reste nul, ce qui annonce que l'opération est terminée.

65. Quand on parvient à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le premier terme du diviseur, la division proposée ne peut pas être effectuée. Le dividende est

alors égal au produit du diviseur par la somme des quotients partiels que l'on a obtenus, augmenté du dernier reste; et le quotient total se compose de la somme des quotients partiels, à laquelle il faut ajouter une expression complémentaire qui se forme en indiquant la division du dernier reste par le diviseur.

Voici un exemple d'une division qui ne peut pas être entièrement effectuée :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 2a^3x - a^4 & x^2 - 2ax + a^2 \\
\underline{-x^4 + 2ax^3 - a^2x^2} & \overline{x^2 - 2ax + a^2} \\
\quad -2ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 & \\
\quad \underline{+2ax^3 - 4a^2x^2 + 2a^3x} & \\
\qquad\qquad + a^2x^2 \qquad\quad - a^4 & \\
\qquad\qquad \underline{- a^2x^2 + 2a^3x - a^4} & \\
\qquad\qquad\qquad + 2a^3x - 2a^4. &
\end{array}
$$

Après trois divisions partielles, on obtient le reste $+2a^3x - 2a^4$; le premier terme de ce reste contenant la lettre x avec un exposant moindre que celui qu'elle a dans le premier terme du diviseur, l'opération ne peut plus être continuée. On a

$$
\begin{aligned}
& x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 2a^3x - a^4 \\
& = (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2ax + a^2) + 2a^3x - 2a^4,
\end{aligned}
$$

et le quotient est

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{2a^3x - 2a^4}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

66. Lorsqu'on a ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre, on parvient nécessairement à un reste nul, ou à un reste dont le premier terme n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur. En effet, chacune des soustractions qui sont successivement effectuées, détruisant toujours le premier terme du reste dont on soustrait, le degré de chaque reste est moindre, au

moins d'une unité, que le degré du reste précédent. Par conséquent, lorsqu'on a fait, au plus, un nombre de divisions partielles égal à l'excès plus un du degré du dividende sur celui du diviseur, si le reste n'est pas nul, l'exposant de la lettre principale dans le premier terme de ce reste est moindre que l'exposant de la même lettre dans le premier terme du diviseur, et la division partielle qu'il faudrait exécuter pour continuer les calculs est impossible.

67. Quand on a ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une lettre, il peut arriver que les divisions partielles s'effectuent toujours exactement, sans jamais conduire à un reste nul. Pour reconnaître quel est alors le symptôme par lequel on sera averti que l'opération ne se terminera pas, il faut remarquer que, si l'on parvenait à un reste nul, le dernier terme du dividende devrait être le produit du dernier terme du diviseur par le dernier terme du quotient; de sorte que l'exposant de la lettre principale dans le dernier terme du quotient serait égal à la différence des exposants de la même lettre dans les derniers termes du dividende et du diviseur. Il suit de là que la division sera impossible, quand on sera conduit à mettre dans le quotient un terme où la lettre principale aura un exposant plus grand que cette différence. Voyez l'exemple suivant :

$$
\begin{array}{l|l}
1 - 4x + x^2 + x^3 & 1 - 3x + x^2 \\
\underline{-1 + 3x - x^2} & \overline{1 - x - 3x^2 - 7x^3, \text{ etc.}} \\
\quad - x + x^3 & \\
\quad + x - 3x^2 + x^3 & \\
\qquad - 3x^2 + 2x^3 & \\
\qquad + 3x^2 - 9x^3 + 3x^4 & \\
\qquad\qquad - 7x^3 + 3x^4 & \\
\qquad\qquad \text{etc.} &
\end{array}
$$

Quelque loin que l'on pousse les calculs, le premier

terme du dernier reste sera toujours divisible par le premier terme du diviseur; mais lorsqu'on est parvenu au reste $-3x^2+2x^3$, on est assuré que la division ne se terminera pas, parce que le terme du quotient qu'on obtient après ce reste, contient la lettre x avec un exposant plus grand que l'excès de l'exposant de cette lettre dans le dernier terme du dividende sur celui qu'elle a dans le dernier terme du diviseur. Le quotient pourra être exprimé par

$$1-x+\frac{-3x^2+2x^3}{1-3x+x^2},\quad 1-x-3x^3+\frac{-7x^4+3x^5}{1-3x+x^2},\ \text{etc.}$$

68. On voit, par un raisonnement semblable au précédent, que, lorsqu'on a ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre, on est assuré que la division ne peut pas être entièrement effectuée, quand on obtient dans le quotient un terme qui renferme cette lettre avec un exposant moindre que la différence des exposants qu'elle a dans les derniers termes du dividende et du diviseur.

69. Lorsque les polynômes contiennent plusieurs termes dans lesquels la lettre principale a le même exposant, on réunit ces termes comme nous l'avons montré dans le n° 59: on effectue ensuite la division de la même manière que dans les exemples précédents, en déterminant par des divisions séparées les quotients des polynômes qui multiplient les plus hautes puissances de la lettre principale, dans les dividendes et dans le diviseur. On voit ci-après un exemple d'une semblable opération. Elle s'explique encore par les raisonnements qui ont été exposés dans le n° 63; car ce qui a été dit au sujet des termes affectés des plus forts exposants d'une lettre, dans les polynômes proposés et dans le quotient, ne cesse pas de subsister quand les multiplicateurs des puissances de cette lettre sont des polynômes.

Divid.	$4b^2 - c^2$	$a^2 - 16b^3 + 4b^2c + 2bc^2 - 2c^3$	$a^2 + 32b^3 - 8bc - 4b^2c^2 + 2bc^2 - c^4$	$a - 32b^5 + 16b^4c + 8b^3c^2 - 4b^2c^3$	
Produit à soustraire.		$+ 8b^3 - 4b^2c - 2bc^2 + c^3$			
1er reste ou 2e divid.		$- 8b^3 - c^3$	$a^2 + \ldots\ldots\ldots$		
Produit à soustraire.			$-16b^4 + 8b^3c - 4b^2c^2 + 4b^2c^2 - 2bc^3 + c^4$		
2e reste ou 3e divid.			$+16b^4 - 4b^2c^2$	$a - \ldots\ldots$	
Produit à soustraire.				$+32b^5 - 16b^4c - 8b^3c^2 + 4b^2c^3$	
3e reste				0	

$2b + c$	$a - 4b^2 + c^2$		Divis.
$2b - c$	$a^2 - 4b^2 + 2bc - c^2$	$a + 8b^3 - 4b^2c$	Quot.

1re *division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} 4b^2 - c^2 & 2b + c \\ \hline -2bc & 2b - c \\ \hline -2bc - c^2 & \\ +c^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2e *division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} -8b^3 - c^3 & 2b + c \\ \hline +4b^2c^2 & -4b^2 + 2bc - c^2 \\ \hline +4b^2c - c^3 & \\ -2bc^2 & \\ \hline -2bc^2 + c^3 & \\ +c^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3e *division partielle.*

$$\begin{array}{l|l} 16b^4 - 4b^2c^2 & 2b + c \\ \hline -8b^3c & 8b^3 - 4b^2c \\ \hline -8b^3c - 4b^2c^2 & \\ +4b^2c^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On n'écrit point les termes des produits du diviseur par les quotients partiels, qui doivent détruire la première colonne de chaque dividende partiel; et l'on se dispense aussi d'écrire, dans les dividendes partiels, les colonnes du dividende primitif qui n'ont pas encore été altérées par les réductions.

70. Considérons un dernier cas, celui où le dividende contient une lettre qui ne se trouve pas dans le diviseur. On pourrait ordonner par rapport à une des lettres com-

munes; mais il est préférable d'ordonner par rapport à la lettre qui n'entre pas dans le diviseur, en considérant ce polynôme comme un multiplicateur de la puissance de cette lettre dont l'exposant est zéro. De cette manière, on voit que l'opération se réduit à diviser séparément par le diviseur proposé chacun des multiplicateurs de la lettre principale dans le dividende. Soient, par exemple, les polynômes :

Divid. $(3c - 6b)a^2 - (c^2 - 4b^2)a + c^3 - 6bc^2 + 12b^2c - 8b^3$,

Diviseur $c - 2b$.

La division de $3c - 6b$ par $c - 2b$ donne le quotient 3; le quotient de $(3c - 6b)a^2$ par $c - 2b$ est donc $3a^2$. En retranchant du dividende le produit du diviseur par $3a^2$, on a le reste $-(c^2 - 4b^2)a + c^3 - 6bc^2 + 12b^2c - 8b^3$. La division de $+c^2 - 4b^2$ par $c - 2b$ donne le quotient $c + 2b$; le quotient de $-(c^2 - 4b^2)a$ par $c - 2b$ est donc $-(c + 2b)a$: c'est le second quotient partiel. Le second reste ne se compose que de la partie du dividende qui ne contient pas la lettre a; et en divisant ce reste par $c - 2b$, on obtient un troisième quotient partiel qui est $c^2 - 4bc + 4b^2$. Le quotient total est donc

$$3a^2 - (c + 2b)a + c^2 - 4bc + 4b^2.$$

71. Parmi les résultats qui sont fournis par la division, il est utile de remarquer celui que l'on trouve en faisant l'opération ci-après, dans laquelle on suppose que m représente un nombre entier :

$$\begin{array}{l|l}
a^m - b^m & a - b \\
\cline{2-2}
-a^m + ba^{m-1} & a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} \ldots + b^{m-1} \\
\hline
+ba^{m-1} - b^m & \\
-ba^{m-1} + b^2a^{m-2} & \\
\hline
+b^2a^{m-2} - b^m & \\
\vdots & \\
\hline
+b^m a^0 - b^m &
\end{array}$$

Les dividendes successifs sont des binômes dont le second terme est $-b^m$, et dans le premier terme, l'exposant de a diminue d'une unité à chaque opération, celui de b augmente d'une unité. Le diviseur ne contenant que la première puissance de la lettre a, on peut continuer les opérations jusqu'à ce qu'on obtienne un reste dont le premier terme ne renferme plus cette lettre qu'avec l'exposant zéro; et ce reste est $b^m a^0 - b^m$, ou zéro. Donc $a^m - b^m$ est toujours divisible par $a - b$. Dans les termes du quotient, les exposants de a vont en diminuant d'une unité, ceux de b augmentent d'une unité : le dernier terme est b^{m-1}; car il doit être tel, qu'en le multipliant par le dernier terme du diviseur, on retrouve le dernier terme $-b^m$ du dividende.

On démontre de la même manière les propositions suivantes :

La division de $a^m - b^m$ par $a + b$ peut être effectuée toutes les fois que m est un nombre pair; le quotient est

$$a^{m-1} - ba^{m-2} + b^2 a^{m-3} \ldots - b^{m-1}.$$

Quand m est un nombre impair, la division n'est pas possible.

La division de $a^m + b^m$ par $a + b$ peut être effectuée toutes les fois que m est un nombre impair; le quotient est

$$a^{m-1} - ba^{m-2} + b^2 a^{m-3} \ldots + b^{m-1}.$$

Quand m est un nombre pair, la division n'est pas possible.

La division de $a^m + b^m$ par $a - b$ ne peut jamais être entièrement effectuée.

Des fractions littérales.

72. L'expression d'une division qui n'a pas été effectuée prend, comme en arithmétique, le nom de *fraction*. Ainsi $\frac{3a^2bc}{5a^3b^2d}$ et $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ sont des fractions. La quantité qu'il faut

diviser s'appelle *numérateur;* la quantité par laquelle on doit diviser est le *dénominateur;* le numérateur et le dénominateur sont appelés collectivement les *deux termes* de la fraction. Les quantités algébriques qui ne contiennent pas de fractions sont appelées *quantités entières.*

Les règles qu'il faut appliquer aux fractions littérales sont les mêmes que celles qu'on enseigne dans l'arithmétique, par rapport aux fractions numériques. Mais, pour le faire voir, il est nécessaire de recourir à d'autres explications, attendu que les deux termes des fractions que l'on considère en arithmétique sont des nombres entiers, tandis que les termes des fractions littérales peuvent désigner des quantités quelconques.

73. Soient a et b deux quantités quelconques, et représentons par q le quotient de a par b; on aura

$$\frac{a}{b} = q, \quad \text{d'où} \quad a = bq.$$

Si l'on multiplie les quantités égales a et bq par une même quantité m, en observant que, pour multiplier un produit, il suffit de multiplier un des facteurs, on trouvera

$$am = bm \times q; \quad \text{donc} \quad \frac{am}{bm} = q, \quad \text{ou} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

La dernière égalité prouve qu'on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant les deux termes par une même quantité.

74. Ce principe donne le moyen de simplifier les fractions et de les réduire au même dénominateur.

La réduction d'une fraction s'opère en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Lorsque ces deux termes sont des monômes, les facteurs communs sont le plus grand commun diviseur des coefficients numériques, et les facteurs littéraux exprimés par chaque

lettre commune avec le plus faible des exposants qu'elle a dans les deux monômes. Soit, par exemple, la fraction $\frac{18a^3b^5c^3d}{48a^2b^3c^2e}$; le plus grand commun diviseur des coefficients 18 et 48 est 6, et les facteurs littéraux communs aux deux termes sont a^2, b^3, c^2. En supprimant ces facteurs, la fraction se réduit à $\frac{3b^3d}{8a^4e}$;

Quand les deux termes sont des polynômes, il faut recourir au procédé du plus grand commun diviseur algébrique, qui sera exposé plus loin. Mais on peut quelquefois découvrir les facteurs communs à deux polynômes sans le secours de ce procédé. Soit, par exemple, la fraction $\frac{4x^2-12ax+9a^2}{8x^3-27a^3}$. Le numérateur est le carré de $2x-3a$ (n° 56); et comme le dénominateur revient à $(2x)^3-(3a)^3$, il est divisible par $2x-3a$ (n° 71). En supprimant ce facteur, la fraction se réduit à $\frac{2x-3a}{4x^2+6ax+9a^2}$.

75. Pour réduire des fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

Quand les dénominateurs ont des facteurs communs, on détermine le plus simple multiple de tous les dénominateurs, et l'on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient qu'on obtient en divisant ce plus simple multiple par le dénominateur.

Lorsque tous les dénominateurs des fractions proposées sont des monômes, le plus simple multiple est formé du plus petit multiple des coefficients numériques, multiplié par toutes les lettres qui entrent dans ces monômes, chaque lettre étant affectée de l'exposant qu'elle a dans le monôme où cet exposant est le plus grand.

Prenons pour exemple les trois fractions

$$\frac{m}{6a^3b}, \quad \frac{n}{4a^2b^2}, \quad \frac{p}{18b^2c^2}.$$

Le plus simple multiple des dénominateurs est $36a^3b^2c^2$, et en prenant cette quantité pour dénominateur commun, on trouve que les fractions proposées peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{6bc^2m}{36a^3b^2c^2}, \quad \frac{9ac^2n}{36a^3b^2c^2}, \quad \frac{2a^3p}{36a^3b^2c^2}.$$

Pour trouver le plus simple multiple de plusieurs polynômes, il faut, en général, recourir à la théorie du plus grand commun diviseur ; mais on peut quelquefois y parvenir plus simplement, au moyen des propositions qui ont été précédemment exposées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille réduire au même dénominateur les deux fractions

$$\frac{a^2m}{1-m^2}, \quad \frac{a^2}{1-2m+m^2}.$$

On remarquera que $1-m^2=(1-m)(1+m)$, et $1-2m+m^2=(1-m)^2=(1-m)(1-m)$, (n° 56). On verra ainsi qu'il suffit de multiplier les termes de la première fraction par $1-m$, et ceux de la seconde par $1+m$; ce qui donne les deux expressions

$$\frac{a^2m-a^2m^2}{1-m-m^2+m^3}, \quad \frac{a^2+a^2m}{1-m-m^2+m^3}.$$

76. Soient maintenant trois fractions réduites au même dénominateur, $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, et supposons que l'on doive ajouter la seconde à la première et retrancher la troisième de la somme. Si l'on pose $\frac{a}{m}=q$, $\frac{b}{m}=r$, $\frac{c}{m}=s$, d'où

$a = mq$, $b = mr$, $c = ms$, on aura

$$a + b - c = m(q + r - s), \quad \text{d'où} \quad \frac{a + b - c}{m} = q + r - s;$$

donc
$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}.$$

Cette égalité fait voir que, pour l'addition et la soustraction des fractions littérales, on doit observer les mêmes règles qu'en arithmétique.

77. Pour la multiplication, posons $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = r$, d'où $a = bq$, $c = dr$: on aura

$$ac = bq \times dr = bd \times qr, \quad \text{d'où} \quad \frac{ac}{bd} = qr;$$

donc
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

On voit, par cette égalité, qu'il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

78. Enfin, soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$. Si l'on réduit d'abord ces fractions au même dénominateur, elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$: or le quotient ne sera pas altéré si l'on multiplie le dividende et le diviseur par bd (n° 73); donc

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Il suit de là que l'on doit multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Pour multiplier ou pour diviser une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, ou bien pour ajouter des fractions avec des entiers, on suivra les mêmes règles, en donnant aux entiers l'unité pour dénominateur.

79. Les règles relatives aux fractions sont appliquées

dans les exercices suivants, qui offrent des réductions remarquables :

1°. $$\frac{2a}{2b-c} \times \left(\frac{b+c}{3} - \frac{c}{2}\right) = \frac{a}{3}.$$

2°. $$\frac{b}{a - \frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

3°. $$\frac{1 - \frac{a^3}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^3}} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ac + a^2.$$

4°. $$\frac{a + \frac{b-a}{1+ba}}{1 - a \times \frac{b-a}{1+ba}} = b.$$

5°. $$\frac{a - c \times \frac{ae - bd}{ce - bf}}{b} = \frac{cd - af}{ce - bf}.$$

Des exposants négatifs.

80. On a vu qu'on obtient l'exposant d'une lettre dans le quotient de deux monômes, en soustrayant l'exposant de cette lettre dans le diviseur de celui de la même lettre dans le dividende. Cette règle, qui supposait d'abord l'exposant du dividende plus grand que celui du diviseur, a été étendue au cas où les deux exposants sont égaux (n° 62). On peut l'étendre aussi au cas où l'exposant du dividende est plus petit que celui du diviseur; mais alors l'exposant du quotient sera négatif, et il faudra fixer la signification qu'on devra attacher à un semblable exposant. Or, en considérant l'égalité $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si l'on remplace dans les deux membres n par $m+p$, le second membre devient a^{-p}.

et le premier est $\frac{a^m}{a^{m+p}}$, ce qui équivaut à $\frac{a^m}{a^m \times a^p}$, ou $\frac{1}{a^p}$. Il faudra donc convenir que l'expression a^{-p} sera regardée comme équivalente à $\frac{1}{a^p}$.

81. Les règles auxquelles les exposants positifs ont donné lieu, s'appliquent aussi aux exposants négatifs : c'est-à-dire que, pour multiplier deux puissances d'une quantité, il faut toujours ajouter les exposants de ces puissances; et pour la division on doit soustraire l'exposant du diviseur de celui du dividende. Car, d'après la convention ci-dessus et les règles qui ont été établies pour les fractions, on a :

$$a^{-m} \times a^n = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)},$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n},$$

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

82. Au moyen des exposants négatifs, on peut ramener des expressions algébriques fractionnaires à une forme entière, pour leur appliquer ensuite les règles relatives au calcul des quantités entières; ce qui offre une analogie remarquable avec ce qui a lieu pour le calcul des fractions décimales. Supposons, par exemple, que l'on ait à faire le produit des deux polynômes $\frac{3}{2x^2} + x^2 - 2 + \frac{1}{3x} - 2x$ et $\frac{2}{x} - 3 - x$. On remplacera les fractions $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x}$ par les notations x^{-2} et x^{-1}. On ordonnera ensuite, en considérant les exposants négatifs comme plus petits que zéro, et d'autant plus petits que leurs valeurs absolues sont plus grandes

(n° 29); et l'on fera la multiplication comme on le voit ci-dessous :

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 - 2x - 2 + \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{3}{2}x^{-2} \\
-x - 3 + 2x^{-1} \\
\hline
-x^3 + 2x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^0 - \frac{3}{2}x^{-1} \\
\qquad -3x^2 + 6x + 6x^0 - x^{-1} - \frac{9}{2}x^{-2} \\
\qquad\qquad + 2x - 4x^0 - 4x^{-1} + \frac{2}{3}x^{-2} + 3x^{-3} \\
\hline
-x^3 - x^2 + 10x + \frac{5}{3} - \frac{13}{2}x^{-1} - \frac{23}{6}x^{-2} + 3x^{-3}.
\end{array}
$$

83. La division des polynômes qui contiendront des exposants négatifs s'effectuera aussi de la même manière que dans le cas où tous les exposants sont positifs; car, dans la multiplication, les facteurs étant ordonnés, le produit de leurs premiers termes et celui des derniers termes sont toujours, sans réduction, le premier et le dernier terme du produit, comme on le voit dans le produit ci-dessus. On pourra se proposer pour exemple la division de ce produit par l'un des polynômes avec lesquels il a été formé.

84. Quand on admet dans le quotient des exposants négatifs, les cas d'impossibilité ne peuvent plus se reconnaître au moyen de ce qui a été dit dans le n° 65. Il faut continuer les opérations jusqu'à ce qu'on ait acquis la certitude qu'on ne parviendra jamais à un reste nul, en se reportant, pour cela, au principe du n° 68.

Mais, dans les applications les plus ordinaires de la division, les exposants de la lettre principale dans le dividende et le diviseur sont positifs, et l'on a pour but, quand la division ne peut pas se faire exactement, d'obtenir un quotient qui ne renferme que des exposants positifs de la lettre principale, les multiplicateurs de cette lettre pouvant être fractionnaires, et le degré du reste, par rapport à cette lettre, devant être moindre que celui du diviseur. On voit, par ce qui a été dit dans le n° 66, qu'il est toujours possible

de satisfaire à ces conditions, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de la lettre principale; et l'expression du quotient se forme alors comme nous l'avons expliqué dans le n° 65.

Enfin on peut remarquer que, lorsque le plus faible exposant de la lettre principale est zéro dans le dividende et dans le diviseur, on est assuré que l'on n'obtiendra jamais un reste nul dès que l'on parvient à un reste dont le degré est moindre que celui du diviseur; car, si l'on continuait l'opération, il faudrait mettre au quotient un terme dans lequel la lettre principale aurait un exposant négatif, et cet exposant serait moindre que la différence des plus faibles exposants du dividende et du diviseur.

Digitized by Google

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

Définitions. — Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

85. Nous avons déjà employé plusieurs fois les dénominations d'*égalité* et d'*équation;* mais comme ces dénominations reviendront fréquemment dans la suite, il est bon d'en fixer la signification d'une manière précise.

La réunion de deux expressions jointes par le signe $=$ prend le nom d'*égalité,* lorsqu'on peut constater, en effectuant les calculs indiqués, que ces expressions sont égales; ou encore, lorsque les deux expressions ne renfermant que des quantités connues, on sait qu'elles sont égales en vertu des suppositions que l'on a établies sur ces quantités. Ainsi, $(2x+1)(3x-2) = 6x^2 - x - 2$ est une égalité, parce qu'en effectuant la multiplication de $2x+1$ par $3x-2$, on obtient pour produit $6x^2 - x - 2$. On dit aussi que $ad = bc$ est une égalité, quand on suppose que a, b, c, d sont quatre quantités connues qui forment une proportion par quotient.

L'égalité prend le nom d'*équation* quand les expressions jointes par le signe $=$ renferment des quantités inconnues, qu'il s'agit de déterminer de manière que ces expressions deviennent égales. Ainsi les quantités $(2x+1)(3x-2)$ et $2x^2 - 3x + 4$ ne sont pas égales, mais elles peuvent le devenir quand on donne à x une valeur particulière; si l'on veut exprimer qu'il s'agit de déterminer cette valeur, on écrit $(2x+1)(3x-2) = 2x^2 - 3x + 4$, et cette relation est une équation.

Les expressions placées de part et d'autre du signe = se nomment les deux *membres* de l'égalité ou de l'équation. L'expression qui est à gauche du signe est le premier membre, celle qui est à droite est le second membre.

Quand les deux membres d'une égalité sont exactement les mêmes, l'égalité prend le nom d'*identité*. Ainsi l'égalité $(2x+1)(3x-2) = 6x^2 - x - 2$ devient une identité quand on effectue les calculs indiqués dans le premier membre. On emploie aussi quelquefois la dénomination d'identité à la place de celle d'égalité, quand on sait, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer les calculs indiqués, que les deux membres sont les mêmes. C'est dans ce sens que l'on dit que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ est une identité, parce qu'on sait que la somme de deux nombres multipliée par leur différence donne pour produit la différence des carrés de ces nombres.

86. *Résoudre* une équation, c'est chercher quelles valeurs on doit mettre à la place de l'inconnue, ou des inconnues s'il y en a plusieurs, pour que l'équation devienne une identité : chaque valeur de l'inconnue qui jouit de cette propriété, ou chaque système de valeur des inconnues, quand il y en a plusieurs, forme une *solution* de l'équation.

On dit que deux équations sont *équivalentes*, ou qu'elles rentrent l'une dans l'autre, lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

87. Il est évident que, *lorsqu'on ajoute la même quantité aux deux membres d'une équation, ou lorsqu'on retranche des deux membres la même quantité, les valeurs des inconnues restent les mêmes;* c'est-à-dire que les valeurs des inconnues qui vérifient la première équation vérifient aussi la seconde, et réciproquement.

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres

d'une équation par la même quantité, les valeurs des inconnues restent aussi les mêmes (*).

88. Soit proposé de résoudre l'équation

$$29x - 87 = 12x + 32.$$

D'après les principes qui viennent d'être énoncés, on peut supprimer le terme $12x$ dans le second membre, en retranchant $12x$ du premier membre; on peut aussi supprimer le terme -87 dans le premier membre, en ajoutant 87 au second membre. L'équation devient ainsi

$$29x - 12x = 32 + 87.$$

En général, lorsque chaque membre d'une équation n'est composé que de termes joints par les signes + et —, on peut réunir dans un membre tous les termes qui contiennent l'inconnue ou les inconnues, et mettre dans l'autre membre tous les termes qui ne renferment que des quantités connues; pour cela, il suffit de donner à chaque terme que l'on écrit dans un membre, en le supprimant dans l'autre, le signe contraire à celui qu'il avait. Cette opération constitue ce que l'on nomme la *transposition des termes*.

Si, dans l'équation ci-dessus, on réduit les termes semblables, elle devient

$$17x = 119,$$

(*) Cette proposition cesse d'être exacte lorsque la quantité par laquelle on multiplie ou l'on divise les deux membres renferme les inconnues. Soit, par exemple, l'équation $3x - 2 = 7$; si l'on multipliait les deux membres par $x - 1$, il viendrait $(x - 1)(3x - 2) = 7(x - 1)$. Or la dernière équation admet la solution $x = 1$, et cette solution ne convient pas à l'équation primitive. Il faut aussi que la quantité par laquelle on multiplie ou l'on divise les deux membres ne soit ni nulle ni infinie. Mais les considérations auxquelles ces restrictions donnent lieu ne nous seraient point utiles dans le cours de ce chapitre, et elles trouveront place dans la suite.

et en divisant les deux membres par le coefficient de x, on trouve

$$x = 7.$$

Vérification. Pour que cette solution soit exacte, il faut qu'en remplaçant l'inconnue x par 7 dans l'équation proposée, on obtienne une identité. Or il vient, par cette substitution,

$$29 \times 7 - 87 = 12 \times 7 + 32;$$

ce qui se réduit, en effet, à l'identité $116 = 116$.

89. Prenons en second lieu l'équation

$$\frac{5}{2}x - \frac{4}{3}x - 13 = \frac{5}{8} + \frac{x}{32}.$$

On change d'abord cette équation en une autre équivalente qui n'ait pas de dénominateurs, en multipliant tous les termes de l'équation par un multiple quelconque des dénominateurs. Pour la simplicité des calculs, on choisit le plus petit multiple des dénominateurs qui, dans l'exemple proposé, est 96. L'équation devient ainsi

$$240x - 128x - 1248 = 60 + 3x.$$

En transposant les termes, d'après ce qui a été dit pour l'exemple précédent, il vient

$$240x - 128x - 3x = 60 + 1248,$$

ou, en réduisant,

$$109x = 1308;$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{1308}{109}, \quad \text{ou} \quad x = 12.$$

Vérification. Si l'on remplace x par 12 dans l'équation proposée, il vient d'abord

$$\frac{5}{2} \times 12 - \frac{4}{3} \times 12 - 13 = \frac{5}{8} + \frac{12}{32};$$

et, en effectuant les opérations indiquées dans chaque membre, on parvient à l'identité $1 = 1$.

90. Soit l'équation

$$4 - \frac{x+3}{6} = 2 + \frac{9-2x}{3}.$$

On multiplie tous les termes par 6, qui est le plus petit multiple des dénominateurs. L'équation devient ainsi

$$24 - (x+3) = 12 + 2(9-2x).$$

On effectue les calculs indiqués, ce qui donne

$$24 - x - 3 = 12 + 18 - 4x.$$

On transpose les termes, de manière que tous les termes qui contiennent l'inconnue soient dans le premier membre, et tous les termes indépendants de l'inconnue dans le second membre; on est ainsi conduit à l'équation

$$4x - x = 12 + 18 + 3 - 24,$$

ou, en réduisant,

$$3x = 9; \quad \text{d'où} \quad x = 3.$$

Vérification. Si l'on remplace l'inconnue x par 3 dans l'équation proposée, on trouve d'abord

$$4 - \frac{3+3}{6} = 2 + \frac{9-2\times 3}{3};$$

et en effectuant les calculs indiqués dans chaque membre, on parvient à l'identité $3 = 3$.

91. Considérons encore l'équation

$$\frac{25}{x+3} = \frac{10}{3x-4}.$$

Si l'on réduit les deux fractions au même dénominateur, il faudra que les numérateurs soient égaux; ce qui donne

l'équation

$$25(3x-4)=10(x+3).$$

En effectuant les calculs indiqués, il vient

$$75x-100=10x+30.$$

On tire de là, par la transposition des termes,

$$75x-10x=30+100, \quad \text{ou} \quad 65x=130;$$

donc

$$x=\frac{130}{65}, \quad \text{ou} \quad x=2.$$

Vérification. Si l'on remplace x par 2 dans l'équation proposée, on trouve

$$\frac{25}{2+3}=\frac{10}{3\times 2-4};$$

et en effectuant les calculs indiqués, on parvient à l'identité $5=5$.

92. Les équations de la nature de celles que nous venons de considérer sont appelées équations du *premier degré*, parce qu'après l'évanouissement des dénominateurs, la transposition des termes et la réduction, elles ne contiennent que la première puissance de l'inconnue.

Lorsque après ces opérations l'inconnue se trouve élevée à diverses puissances, le degré de l'équation est marqué par l'exposant de la plus haute puissance. Ainsi l'équation $5x^2-3x=30$ est du second degré.

Quand il y a plusieurs inconnues, le degré est marqué par la somme des exposants de toutes les inconnues dans le terme où cette somme est la plus forte. Ainsi l'équation $yx^2-5y+2x=48$ est du troisième degré, parce que la somme des exposants des inconnues dans le terme yx^2 est égale à 3.

93. Ce que nous avons dit au sujet des exemples précé-

dents renferme toutes les règles nécessaires pour la résolution des équations du premier degré à une inconnue; et ces règles peuvent se résumer comme il suit;

Si l'équation contient des dénominateurs, on les fait disparaître, en multipliant tous les termes par un multiple des dénominateurs. Il faut avoir soin, pour simplifier l'opération, de choisir le plus petit multiple.

L'équation n'ayant plus de dénominateurs, on effectue les opérations algébriques indiquées.

On rassemble dans le premier membre tous les termes qui renferment l'inconnue, et l'on met dans le second membre tous les termes qui ne contiennent que des quantités connues, en ayant soin de changer les signes des termes que l'on fait passer d'un membre dans l'autre.

On réduit ensuite les termes semblables, puis on divise les deux membres par le multiplicateur de l'inconnue. Après cette dernière opération, le second membre exprime la valeur de l'inconnue.

94. Voici un dernier exemple assez compliqué, dans lequel on rencontre l'application de toutes ces règles:

$$\frac{(a+b)x}{a} - 3a - \frac{(a-b)^2}{a+b} = \frac{b(2a-b)(x-a)}{a^2-b^2} - 3x.$$

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, en observant que l'on peut prendre pour dénominateur commun de tous les termes $a(a^2-b^2)$, puisque a^2-b^2 est divisible par $a+b$. L'équation proposée se change alors dans la suivante:

$$(a+b)(a^2-b^2)x - 3a^2(a^2-b^2) - a(a-b)^3$$
$$= ab(2a-b)(x-a) - 3a(a^2-b^2)x.$$

En effectuant tous les calculs indiqués, transposant les termes et réduisant, on trouve

$$4a^3x - a^2bx - 3ab^2x - b^3x = 4a^4 - 5a^3b + a^2b^2 - ab^3,$$

ce qui revient à

$$(4a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3)x = 4a^4 - 5a^3b + a^2b^2 - ab^3;$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{a(4a^3 - 5a^2b + ab^2 - b^3)}{4a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3}.$$

95. Il arrive souvent qu'en réunissant dans le premier membre d'une équation tous les termes qui contiennent l'inconnue, et en les réduisant, on obtient un terme affecté du signe —. On peut alors considérer ce terme comme formé du produit de l'inconnue par une quantité négative; et en divisant le second membre par cette quantité négative, on obtient la valeur de l'inconnue. Mais on peut aussi faire en sorte que le terme où se trouve l'inconnue ne soit plus affecté du signe —, en changeant les signes des deux membres de l'équation. En général, *on peut toujours changer les signes de tous les termes dans les deux membres d'une équation;* car la nouvelle équation qu'on obtient ainsi est celle que l'on trouverait, si l'on faisait passer les termes du second membre dans le premier, et les termes du premier membre dans le second.

Des équations du premier degré à plusieurs inconnues. — Résolution de deux équations numériques à deux inconnues.

96. Lorsqu'une équation renferme plusieurs inconnues, si l'on met à la place de toutes les inconnues, hors une, des nombres pris arbitrairement, l'équation déterminera la valeur de la dernière inconnue; cette valeur et les valeurs arbitraires données aux autres inconnues formeront une *solution* de l'équation : on pourra trouver ainsi un nombre illimité de solutions.

Il faut toujours commencer par simplifier l'équation

Soit, par exemple,

$$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y - 1 = \frac{4}{3} + y - \frac{x}{3}.$$

On fait disparaître les dénominateurs, en multipliant chaque terme par 6, ce qui donne

$$9x - 4y - 6 = 8 + 6y - 2x.$$

Il vient ensuite, par la transposition des termes,

$$9x + 2x - 4y - 6y = 8 + 6;$$

et en réduisant, on obtient enfin

$$11x - 10y = 14.$$

Au moyen de ces simplifications, une équation du premier degré à plusieurs inconnues x, y, z, etc., se trouve ramenée à la forme $ax + by + cz + \ldots = k$, les lettres a, b, c, ..., k désignant des quantités connues, littérales ou numériques, et sans dénominateurs.

Maintenant, si dans l'équation ci-dessus $11x - 10y = 14$, on met successivement à la place de y différents nombres pris arbitrairement, par exemple les nombres entiers 1, 2, 3, 4, etc., on obtiendra pour les valeurs correspondantes de x les nombres $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{11}$, 4, $\frac{54}{11}$, etc. Chacun de ces couples de valeurs de y et de x est une solution de l'équation.

Au lieu de mettre immédiatement des nombres arbitraires à la place de l'une des inconnues, on peut commencer par résoudre l'équation par rapport à l'une d'elles, comme si l'autre était une quantité connue; on trouve

$$x = \frac{14 + 10y}{11}, \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{11x - 14}{10}.$$

Alors, si l'on prend pour l'une des inconnues une valeur arbitraire, et qu'on la substitue à cette inconnue dans l'expression $\frac{14 + 10y}{11}$, ou dans l'expression $\frac{11x - 14}{10}$, on obtiendra la valeur correspondante de l'autre inconnue.

Lorsque la valeur d'une quantité dépend des valeurs d'une ou de plusieurs autres quantités dont on peut disposer arbitrairement, on dit que la première quantité est une *fonction* des autres. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, l'expression $\frac{14+10y}{11}$ est la valeur de x *exprimée en fonction* de y, et l'expression $\frac{11x-14}{10}$ est la valeur de y exprimée en fonction de x.

97. Supposons actuellement que les quantités inconnues x et y doivent être déterminées de manière à vérifier les deux équations

$$11x-10y=14, \quad 5x+7y=41.$$

1re Méthode. — En résolvant chacune de ces équations par rapport à x, comme si y était une quantité connue, on trouve

$$x=\frac{14+10y}{11}, \quad x=\frac{41-7y}{5};$$

il faut donc que l'on ait

$$\frac{14+10y}{11}=\frac{41-7y}{5}.$$

On déduit de cette équation la valeur de y; on obtient ensuite la valeur de x en mettant celle de y dans l'une des équations précédentes $x=\frac{14+10y}{11}$, $x=\frac{41-7y}{5}$. On trouve $y=3$, $x=4$.

Ces valeurs doivent nécessairement vérifier les deux équations proposées; car, la valeur de y ayant été déterminée par la condition que les valeurs de x exprimées en fonction de y et tirées des équations proposées soient égales, il en résulte qu'après la substitution de la valeur de y dans ces équations, la valeur de x donnée par l'une d'elles doit aussi convenir à l'autre. D'ailleurs, comme l'équation

$\frac{14+10y}{11} = \frac{41-7y}{5}$ n'est vérifiée que lorsqu'on fait $y=3$, le système des équations proposées n'admet que la seule solution $y=3$, $x=4$.

98. 2e Méthode. — On tire de la première équation la valeur de x, comme si y était une quantité connue, et l'on met cette valeur à la place de y, dans la seconde équation; ce qui donne

$$5 \times \frac{14+10y}{11} + 7y = 41.$$

Cette équation détermine la valeur de y; et en la substituant dans l'équation $x = \frac{14+10y}{11}$, on obtient la valeur de x.

On se rend compte de ces opérations en raisonnant comme il suit: Si l'on conçoit que l'on ait une couple de valeurs de x et de y qui vérifient l'équation $11x - 10y = 14$, comme cette équation revient à $x = \frac{14+10y}{11}$, la substitution des valeurs de x et de y dans le premier membre de l'équation $5x + 7y = 41$ donnera le même résultat que la substitution de la valeur de y dans le premier membre de l'équation $5 \times \frac{14+10y}{11} + 7y = 41$. Il suit de là que, s'il existe un couple de valeurs de x et de y qui vérifient les deux équations proposées, la valeur de y devra vérifier l'équation $5 \times \frac{14+10y}{11} + 7y = 41$; et réciproquement, les valeurs de x et de y, qui vérifient cette dernière équation et l'équation $x = \frac{14+10y}{11}$, conviennent aux deux équations proposées.

99. 3e Méthode. — Considérons d'abord deux équations dans lesquelles les coefficients d'une des inconnues sont

égaux, par exemple

$$2x + 3y = 17, \quad 5x - 3y = 11.$$

En les ajoutant membre à membre, on obtient

$$7x = 28; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

On trouvera la valeur de y en mettant le nombre 4 à la place de x dans l'une des équations proposées.

Si l'on a les équations

$$5x - 3y = 19, \quad 5x - 7y = 11,$$

on retranchera les deux membres de la seconde de ceux de la première, ce qui donnera

$$4y = 8; \quad \text{d'où} \quad y = 2.$$

On aura ensuite la valeur de x, en mettant le nombre 2 à la place de y dans l'une des équations proposées.

Pour justifier cette méthode, représentons par $A = B$, $A' = B'$, deux équations quelconques. En les ajoutant membre à membre, on obtient $A + A' = B + B'$. Cette troisième équation doit nécessairement être vérifiée par les valeurs des inconnues qui satisfont aux deux premières; et réciproquement, les valeurs qui vérifient cette équation $A + A' = B + B'$, avec l'une des deux premières, par exemple $A = B$, doivent évidemment vérifier aussi l'autre équation $A' = B'$. Les mêmes conclusions subsistent quand, au lieu d'ajouter les deux équations $A = B$, $A' = B'$, on les retranche l'une de l'autre.

Il suit de ces observations que le système des deux équations ci-dessus $2x + 3y = 17$, $5x - 3y = 11$, peut être remplacé par celui des deux équations $2x + 3y = 17$ et $7x = 28$, ou $5x - 3y = 11$ et $7x = 28$; et de même le système des deux équations $5x - 3y = 19$, $5x - 7y = 11$ peut être remplacé par celui des deux équations $5x - 3y = 19$, $4y = 8$; ou $5x - 7y = 11$, $4y = 8$.

Prenons actuellement les deux équations

$$11x - 10y = 14, \quad 5x + 7y = 41.$$

On peut les remplacer par d'autres équations équivalentes, dans lesquelles les coefficients de l'une des inconnues soient égaux. Il suffit pour cela de multiplier les deux membres de la première équation par le coefficient de cette inconnue dans la seconde, et les deux membres de la seconde équation par le coefficient de la même inconnue dans la première.

Si l'on veut avoir une équation qui donne immédiatement la valeur de y, on multiplie la première équation par 5, et la seconde par 11; on obtient ainsi les deux équations

$$55x - 50y = 70, \quad 55x + 77y = 451.$$

En retranchant la première de la seconde, on trouve

$$127y = 381; \quad \text{d'où} \quad y = 3.$$

En mettant le nombre 3 à la place de y dans l'une des équations proposées, on en déduira la valeur de x.

On peut aussi obtenir la valeur de x en opérant comme on l'a fait pour avoir celle de y; il faut multiplier les deux membres de la première équation par 7, ceux de la seconde par 10; on obtient ainsi

$$77x - 70y = 98, \quad 50x + 70y = 410.$$

En ajoutant membre à membre ces équations, on a

$$127x = 508; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

100. Les trois méthodes que nous venons d'exposer ne sont pas véritablement différentes; car, par la première méthode (n° 97), la valeur de x en fonction de y, tirée de la première équation, est substituée dans la seconde équation qu'on a aussi résolue par rapport à x; par la seconde

méthode (n° 98), on substitue la même valeur de x dans la seconde équation, sans avoir fait subir à cette équation aucune transformation; et, par la troisième méthode (n° 99), quand on retranche l'une de l'autre les deux équations $55x + 77y = 451$, $55x - 50y = 70$, c'est la même chose que si l'on substituait dans l'une de ces équations la valeur du terme $55x$ déduite de l'autre.

Le caractère essentiel de ces méthodes est de substituer au système des équations proposées un système équivalent, formé de l'une de ces équations et d'une autre qui ne contient plus une des inconnues; c'est ce qu'on appelle *éliminer* cette inconnue. Quand on emploie le premier procédé, on dit que l'on fait l'élimination *par comparaison;* quand on emploie le deuxième, on dit que l'on fait l'élimination *par substitution;* enfin, quand on emploie le dernier, on dit que l'on fait l'élimination *par addition* ou *soustraction,* ou bien *par réduction.*

Résolution d'un nombre quelconque d'équations qui renferment un pareil nombre d'inconnues.

101. Soient les trois équations

$$4x - 3y + 2z = 9,$$
$$2x + 5y - 3z = 4,$$
$$5x + 6y - 2z = 18.$$

En employant l'une des méthodes qui viennent d'être exposées, on pourra éliminer l'inconnue z entre la première équation et chacune des deux autres : on obtiendra ainsi deux équations qui ne contiendront plus que les inconnues x et y; on en déduira les valeurs de ces deux inconnues, et en les substituant dans l'une des équations proposées, on trouvera la valeur de z.

Élimination par comparaison. — En résolvant chacune

des équations par rapport à z, comme si x et y étaient des quantités connues, on obtient trois valeurs de z, savoir:

$$z = \frac{9-4x+3y}{2},$$

$$z = \frac{2x+5y-4}{3},$$

$$z = \frac{5x+6y-18}{2}.$$

On en conclut les deux équations

$$\frac{9-4x+3y}{2} = \frac{2x+5y-4}{3}, \quad \frac{9-4x+3y}{2} = \frac{5x+6y-18}{2},$$

ou, en réduisant,

$$16x+y=35,$$
$$3x+y=9.$$

La résolution de ces deux équations fait connaître les valeurs des deux inconnues x et y. On n'a plus ensuite qu'à substituer ces valeurs dans l'une des valeurs de z exprimées en fonction de x et de y. On trouve $x=2$, $y=3$, $z=5$.

Élimination par substitution. — On substitue, dans la deuxième équation et dans la troisième, la valeur de z en fonction de x et de y tirée de la première; il vient

$$2x+5y-\frac{3(9-4x+3y)}{2}=4, \quad 5x+6y-(9-4x+3y)=18.$$

Ces équations se réduisent aux précédentes $16x+y=35$, $3x+y=9$. Quand on a obtenu, en résolvant ces deux équations, les valeurs de x et de y, on les substitue dans la valeur de z en fonction de x et de y déduite de la première équation.

Élimination par réduction. — Les termes qui contiennent l'inconnue z, dans la première équation et dans la troisième, ayant des coefficients égaux et des signes contraires,

on ajoute ces équations; on trouve ainsi, après avoir divisé par 3 les deux membres de l'équation résultante,

$$3x + y = 9.$$

Il faut encore éliminer z entre la seconde équation et l'une des deux autres. A cet effet, on multiplie les deux membres de la seconde équation par 2, ceux de la première par 3, puis on les ajoute; on obtient $16x + y = 35$.

Quand on a trouvé les valeurs de x et de y, en résolvant les deux équations $3x + y = 9$, $16x + y = 35$, on substitue ces valeurs dans l'une des équations proposées, et on en conclut la valeur de la troisième inconnue z.

102. Donnons encore un exemple, en prenant cinq équations à cinq inconnues. Pour plus de simplicité, nous n'emploierons que la méthode d'élimination par réduction :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 11u - 2t + 4z &= 9, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 2x - 13u &= 5. \end{aligned}$$

En éliminant z entre la première équation et la troisième, on obtient $12x - 8y + 55u - 10t = 89$. On peut donc considérer, au lieu du système des équations proposées, le système suivant :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 12x - 8y + 55u - 10t &= 89, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 2x - 13u &= 5. \end{aligned}$$

Il faudra déterminer x, y, u et t au moyen des quatre dernières équations, et l'on obtiendra ensuite la valeur de z par la première.

On élimine t entre les deux équations

$$12x - 8y + 55u - 10t = 89 \quad \text{et} \quad 8t - 5y = 25;$$

à cet effet, on multiplie la première par 4, la seconde par 5, et on les ajoute; on obtient ainsi $48x - 57y + 220u = 481$. On peut donc au système précédent substituer celui-ci.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 48x - 57y + 220u &= 481, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 2x - 13u &= 5. \end{aligned}$$

Les trois dernières équations détermineront les valeurs des inconnues x, y, u; on aura ensuite la valeur de t par la seconde équation, et celle de z par la première.

On élimine y entre la troisième équation et la quatrième, en les ajoutant après avoir multiplié les deux membres de la quatrième par 19. On obtient ainsi $143x + 87u = 1374$, et on peut remplacer le système précédent par celui-ci :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 2x - 13u &= 5, \\ 143x + 87u &= 1374. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations détermineront les valeurs des deux inconnues x et u; on aura ensuite la valeur de y par la troisième équation, celle de t par la deuxième, et celle de z par la première.

En éliminant u entre la quatrième équation et la cinquième, on obtient $2033x = 18297$, d'où..... $x = 9$.
En faisant $x = 9$ dans $2x - 13u = 5$, on en conclut... $u = 1$.
En faisant $x = 9$, $u = 1$, dans $5x + 3y - 7u = 47$, on trouve $y = 3$.
En faisant $y = 3$ dans $8t - 5y = 25$, on obtient..... $t = 5$.
En faisant $x = 9$, $y = 3$, dans $3x - 2y - 5z = 11$, on obtient.. $z = 2$.

Pour s'assurer de l'exactitude des opérations, il faut substituer dans les équations proposées les valeurs $x = 9$, $y = 3$, $z = 2$, $t = 5$, $u = 1$, ce qui doit conduire à des identités.

103. Le lecteur pourra s'exercer sur les deux exemples ci-après :

1°.
$$7x - 2y - 3z = 16,$$
$$3y - 5x - 2z = -13,$$
$$17x - 11y + 5z = 45.$$

On trouvera $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

2°.
$$3x + 4y - 5z = -11,$$
$$11t - 8y = +13\tfrac{1}{2},$$
$$16z - 9x = 38,$$
$$16t - 5z = 12.$$

On trouvera $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = 2$, $t = 1 + \frac{3}{8}$.

Problèmes qui dépendent des équations du premier degré.

104. Nous avons dit, dans le chapitre premier, que la résolution d'un problème est composée de deux parties, dont l'une consiste à exprimer les conditions du problème par des équations, et l'autre à résoudre ces équations.

Toutes les règles qu'on peut donner sur la manière de mettre les problèmes en équations sont renfermées dans le précepte suivant :

On indique, à l'aide des signes algébriques, sur les quantités connues représentées soit par des nombres, soit par des lettres, et sur les quantités inconnues représentées toujours par des lettres, les raisonnements et les opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier les valeurs des inconnues si elles étaient données.

On se familiarisera avec l'application de ce précepte, en étudiant les solutions des problèmes qui suivent.

105. 1er Problème. — *Une personne qui possédait* 120000 *fr. a employé une partie de cette somme à l'acquisition d'une maison. Elle a placé un tiers de ce qui lui restait à raison de* 4 *pour* 100, *les deux autres tiers à raison de* 5 *pour* 100; *et elle tire de ces deux parties un revenu de* 3920 *fr. Quel est le prix de la maison, et quelles sont les sommes qui ont été placées aux taux de* 4 *pour* 100 *et de* 5 *pour* 100?

Désignons par x le prix de la maison. Il restera après le payement de ce prix $120000 - x$; en conséquence, la somme placée à 4 pour 100 sera $\frac{120000 - x}{3}$; et celle qui a été placée à 5 pour 100 sera $\frac{2(120000 - x)}{3}$. Le revenu de la première somme sera $\frac{(120000 - x) \times 4}{300}$; le revenu de la seconde sera $\frac{2(120000 - x) \times 5}{300}$; et puisque le revenu total est de 3920, il faudra que l'on ait

$$\frac{(120000 - x) \times 4}{300} + \frac{2(120000 - x) \times 5}{300} = 3920.$$

En chassant les dénominateurs, effectuant les calculs indiqués et transposant ensuite les termes, on trouve :

$$480000 - 4x + 1200000 - 10x = 1176000,$$
$$10x + 4x = 480000 + 1200000 - 1176000,$$
$$14x = 504000,$$
$$x = \frac{504000}{14} = 36000.$$

Le prix de la maison étant 36000 fr., la somme qui reste après le payement de ce prix est 84000 fr. La somme

placée à 4 pour 100 est donc le tiers de 84000 fr., ou 28000 fr.; et celle qui a été placée à 5 pour 100 est deux fois 28000 fr., ou 56000 fr.

On vérifie l'exactitude de cette solution en calculant le revenu de 28000 fr. à 4 pour 100, et celui de 56000 fr. à 5 pour 100; en les ajoutant, la somme est 3920 fr., comme l'exige l'énoncé.

106. 2e Problème. — *Plusieurs négociants avaient formé une société dont la durée a été de trois ans. Ils ont prélevé sur la mise sociale, au commencement de la première année, une somme de 45000 fr. pour les frais de premier établissement; et au commencement de chacune des deux années suivantes, ils ont prélevé, pour les frais de loyer et l'entretien du matériel, une somme de 15000 fr. La première année, le bénéfice a été égal au dixième des fonds qui étaient restés disponibles; et dans chacune des deux années suivantes, le bénéfice a été égal au quart des fonds qui restaient au commencement de l'année. Alors la société ayant été dissoute, chaque associé a retiré 40 pour 100 en sus de sa mise. Quel était le montant de la mise sociale?*

Désignons par x la somme cherchée. Quand on a prélevé sur cette somme 45000 fr., il reste $x - 45000$ fr. Le bénéfice de la première année étant le dixième de ce reste, le capital social est devenu, à la fin de cette année,

$$x - 45000 + \frac{x - 45000}{10}, \quad \text{ou} \quad \frac{11x - 495000}{10}.$$

En retranchant de cette quantité 15000 fr., on a pour reste

$$\frac{11x - 645000}{10};$$

et puisque le bénéfice de la seconde année est le quart de ce

reste, on a pour la valeur du capital, à la fin de la seconde année,

$$\frac{11x - 645000}{10} + \frac{11x - 645000}{40}, \text{ ou } \frac{55x - 3225000}{40}.$$

En retranchant de cette quantité 15000, il reste

$$\frac{55x - 3825000}{40};$$

et puisque le bénéfice de la troisième année est le quart de ce reste, on a pour la valeur du capital, à la fin de la troisième année,

$$\frac{55x - 3825000}{40} + \frac{55x - 3825000}{160}, \text{ ou } \frac{275x - 19125000}{160}.$$

Chaque associé retirant, à la fin de la troisième année, 40 pour 100 en sus de sa mise, il faut que le capital social ait augmenté de 40 pour 100. Il doit donc être devenu $x + \frac{40}{100}x$, ou $x + \frac{2}{5}x$, ou plus simplement $\frac{7}{5}x$. On doit donc avoir

$$\frac{275x - 19125000}{160} = \frac{7}{5}x.$$

On chasse les dénominateurs en multipliant les deux membres par 160; il vient alors

$$275x - 19125000 = 224x,$$

et de là on conclut

$$275x - 224x = 19125000$$
$$51x = 19125000$$
$$x = \frac{19125000}{51} = 375000.$$

La mise totale était donc 375000 fr.

Vérification. Lorsqu'on a prélevé 45000 fr. sur le capital primitif 375000 fr., il reste 330000 fr. Cette somme

produisant un bénéfice qui en est le dixième, ou 33000 fr., on a pour le capital, à la fin de la première année, 363000 fr. En prélevant sur cette somme 15000 fr., il reste 348000 fr. Le bénéfice de la seconde année étant le quart de ce reste, ou 87000 fr., on a pour le capital, à la fin de la seconde année, 435000 fr. En prélevant sur cette somme 15000 fr., il reste 420000 fr. Le bénéfice de la troisième année étant le quart de ce reste, ou 105000 fr., on a pour le capital, à la fin de la troisième année, 525000 fr. Ce dernier capital surpasse la mise sociale de 150000 fr., ce qui forme un bénéfice de 40 pour 100, comme l'exige l'énoncé.

107. 3e Problème. — *Deux vases de la même capacité ont été remplis avec des mélanges formés de deux liquides* A *et* B. *Le premier mélange est formé de* 60 *parties de* A *et de* 40 *parties de* B. *Le second mélange est formé de* 20 *parties de* A *et de* 80 *parties de* B. *On propose de partager le liquide contenu dans chaque vase en deux parties, de telle sorte que l'une des parties du premier liquide et l'une des parties du second puissent former un mélange qui contienne des quantités égales de* A *et de* B; *et que les parties restantes puissent former un autre mélange, dans lequel les liquides* A *et* B *se trouvent en quantités proportionnelles aux nombres* 3 *et* 7. (On suppose que les deux liquides A et B peuvent être mélangés dans des proportions quelconques sans altération de volume.)

Désignons par x et y les nombres des parties des mélanges donnés, qu'il faudra prendre pour former un troisième mélange qui contienne les liquides A et B en quantités égales. Le nombre des parties restantes du premier mélange sera $100 - x$, et le nombre des parties restantes du second mélange sera $100 - y$.

Puisque le premier mélange est formé de 60 parties de A

et de 40 parties de B, les x parties de ce mélange contiendront $\frac{60x}{100}$ parties de A et $\frac{40x}{100}$ parties de B.

Puisque le second mélange est formé de 20 parties de A et de 80 parties de B, les y parties de ce mélange contiendront $\frac{20y}{100}$ parties de A et $\frac{80y}{100}$ parties de B.

Il en résulte que, dans le mélange formé en réunissant les x parties du premier mélange donné et les y parties du second, il y aura $\frac{60x}{100}+\frac{20y}{100}$ parties de A et $\frac{40x}{100}+\frac{80y}{100}$ parties de B.

On devra donc avoir l'équation

$$\frac{60x}{100}+\frac{20y}{100}=\frac{40x}{100}+\frac{80y}{100}.$$

On reconnait, par des raisonnements semblables à ceux qui viennent d'être faits, que, pour que le mélange formé en réunissant les portions restantes des mélanges donnés, soit tel que l'exige l'énoncé, il faut que l'on ait l'équation

$$\frac{60(100-x)}{100}+\frac{20(100-y)}{100}=\frac{3}{7}\times\left[\frac{40(100-x)}{100}+\frac{80(100-y)}{100}\right].$$

En supprimant dans la première équation le dénominateur qui affecte tous les termes, divisant ensuite chaque terme par 20, et rassemblant les termes en x dans le premier membre et les termes en y dans le second, on trouve que cette équation se réduit à $x=3y$.

Pour réduire la seconde équation, on remarque d'abord que l'on peut supprimer le dénominateur 100 qui affecte tous les termes; en divisant ensuite les deux membres par 20, l'équation devient

$$3(100-x)+100-y=\tfrac{3}{7}\times[2(100-x)+4(100-y)].$$

En effectuant les calculs indiqués et multipliant les deux

membres par 7, il vient

$$2800 - 21x - 7y = 1800 - 6x - 12y.$$

Enfin, en transposant les termes, réduisant et divisant les deux membres par 5, on obtient

$$3x - y = 200.$$

En remplaçant dans cette équation x par $3y$, on trouve $8y = 200$, d'où $y = 25$; et l'on en conclut $x = 75$.

Ainsi, pour satisfaire aux conditions du problème, il faudra former un mélange de 75 parties du premier mélange donné avec 25 parties du second, et un autre des 25 parties restantes du premier mélange donné avec les 75 parties restantes du second; ou, plus simplement, il faudra prendre les trois quarts du premier mélange avec le quart du second, et le quart du premier avec les trois quarts du second.

On vérifie l'exactitude de cette solution comme il suit :

Le premier mélange donné contenant 60 parties de A et 40 parties de B, les trois quarts de ce mélange contiendront 45 parties de A et 30 de B; et puisque le second mélange contient 20 parties de A et 80 parties de B, le quart de ce mélange contiendra 5 parties de A et 20 parties de B. Ces deux portions réunies contiendront donc 50 parties de A et 50 parties de B.

D'un autre côté, le quart du premier mélange contiendra 15 parties de A et 10 parties de B; les trois quarts du second mélange contiendront 15 parties de A et 60 parties de B. Ainsi, en réunissant ces deux portions, on obtiendra un mélange qui contiendra 30 parties de A et 70 parties de B. Les quantités des liquides A et B dans ce mélange seront donc proportionnelles aux nombres 3 et 7.

108. 4e Problème. — *Trois joueurs sont convenus qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent des deux*

autres. Après trois parties, chacun des joueurs en ayant perdu une, se retire avec 120 francs. On demande la somme que chaque joueur avait en se mettant au jeu.

Soit x la somme qu'avait le joueur qui perd la 1re partie, y la somme qu'avait le joueur qui perd la 2e partie, z la somme qu'avait le joueur qui perd la 3e partie.

Après la première partie, le 1er joueur a $x-y-z$, le 2e a $2y$, et le 3e a $2z$.

Après la deuxième partie, le 1er joueur a $2x-2y-2z$; le 2e a $2y-2z+(x-y-z)$, ce qui se réduit à $3y-z-x$; le 3e a $4z$.

Après la troisième partie, le 1er joueur a $4x-4y-4z$; le 2e a $6y-2z-2x$; le 3e a $4z-(3y-z-x)-(2x-2y-2z)$, ce qui se réduit à $7z-y-x$.

Puisque chacun des joueurs, après cette partie, a 120 fr., on doit avoir

$$7z-y-x=120,$$
$$6y-2z-2x=120,$$
$$4x-4z-4y=120.$$

Les deux membres de la seconde équation sont divisibles par 2, et ceux de la troisième sont divisibles par 4; de sorte que ces deux équations se réduisent à

$$3y-z-x=60,$$
$$x-z-y=30.$$

En ajoutant celles-ci, et en ajoutant en outre la dernière avec l'équation $7z-y-x=120$, on obtient

$$2y-2z=90,$$
$$6z-2y=150,$$

ou, en divisant par 2 les deux membres de chaque équation,

$$y-z=45,$$
$$3z-y=75.$$

On conclut de ces dernières équations, en les ajoutant, $2z = 120$, d'où $z = 60$. La substitution de la valeur de z dans l'équation $y - z = 45$ donne $y = 105$. Enfin, en mettant les valeurs de z et de y dans l'équation $x - z - y = 30$, on trouve $x = 195$. Ainsi, au commencement de la première partie, le premier joueur avait 195 fr., le deuxième 105 fr., et le troisième 60 fr.

Il est facile de s'assurer que ces nombres satisfont aux conditions de l'énoncé.

On peut résoudre ce problème d'une manière plus simple. Puisque la somme totale que possèdent les trois joueurs est 3 fois 120 fr., ou 360 fr., la somme qui reste à chaque joueur, après la partie qu'il a perdue, est égale à celle qu'il avait au commencement de cette partie, diminuée de l'excès de 360 fr. sur la même somme. Ainsi, après la première partie, le 1er joueur a $x - (360 - x)$ ou $2x - 360$; le 2e a $2y$, et le 3e a $2z$. Après la deuxième partie, le 1er joueur a $4x - 720$; le 2e a $2y - (360 - 2y)$ ou $4y - 360$; le 3e a $4z$. Après la troisième partie, le 1er joueur a $8x - 1440$; le 2e a $8y - 720$; le 3e a $4z - (360 - 4z)$ ou $8z - 360$. En égalant ces trois quantités à 120, on obtient trois équations qui déterminent immédiatement les trois inconnues x, y, z.

Énoncés de problèmes à résoudre.

I. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : Mon âge est triple de celui de mon fils ; il y a dix ans, il en était le quintuple. Quel est l'âge du fils ?* (Rép. : 20 ans.)

II. *Vingt personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge : l'écot d'un homme est de 40 centimes, celui d'une femme est de 25 centimes ; la dépense totale est 7 francs 25 centimes. On demande le nombre des hommes et celui des femmes.* (Rép. : 15 hommes et 5 femmes.)

III. *Trouver un nombre tel que, si l'on y ajoute sa*

moitié, la somme surpasse 60 *d'autant que le nombre lui-même est au-dessous de* 65. (Rép. : 50.)

IV. *Partager* 32 *en deux parties telles que, si l'on divise l'une de ces parties par* 6, *et l'autre par* 5, *on ait deux quotients dont la somme soit égale à* 6. (Les deux parties sont 12 et 20.)

V. *Deux personnes ont un égal revenu: la première épargne chaque année le cinquième de son revenu; et la seconde, qui dépense* 600 *fr. par an de plus que la première, doit, au bout de trois ans,* 1140 *fr. Combien ont-elles de revenu?* (Rép. : 1100 fr.)

VI. *On demandait à une fermière le nombre de ses poulets; elle répondit: J'ai vendu la moitié de ce que j'avais, plus un; j'en ai mangé* 10, *et il m'en reste encore le tiers de ce que j'avais, plus* 7 *poulets* $\frac{2}{3}$. *Quel était le nombre des poulets?* (Rép. : 112.)

VII. *Une personne a* 100000 *fr. : elle place une partie de cette somme à* 5 *pour* 100, *et l'autre à* 4 *pour* 100; *de cette manière, elle a un revenu de* 4640 *fr. Quelles sont les deux parties?* (Rép. : 64000 fr. et 36000 fr.)

VIII. *Hiéron, roi de Syracuse, avait remis à un orfèvre* 10 *livres d'or, pour faire une couronne qu'il voulait offrir à Jupiter. Le travail étant achevé, la couronne se trouva du poids de* 10 *livres; mais le roi, soupçonnant que l'ouvrier avait allié de l'argent à l'or, consulta Archimède. Celui-ci, sachant que l'or perd dans l'eau les* 52 *millièmes de son poids, et que l'argent y perd les* 99 *millièmes de son poids, détermina le poids de la couronne plongée dans l'eau; et trouva qu'il était de* 9 *livres* 6 *onces; ce qui fit reconnaître la fraude. On demande combien il y avait de livres de chaque métal dans la couronne?* (Rép. : 7 livres 12 onces $\frac{12}{47}$ d'or, et 2 livres 3 onces $\frac{35}{47}$ d'argent.)

IX. *Deux voitures portent des charges inégales. Si l'on ôtait de la première, pour le mettre dans la seconde, un*

tonneau qui pèse 3 quintaux, la charge de la seconde serait double de celle de la première; et si l'on ôtait de la seconde une caisse du poids de 5 quintaux, pour la mettre dans la première, la charge de celle-ci serait triple de celle de l'autre. On demande quelle est la charge de chaque voiture? (Rép. : la charge de la première est 9 quintaux $\frac{2}{5}$, et celle de la seconde est 9 quintaux $\frac{4}{5}$.)

X. *Deux amis ont fait en commun une dépense de 81 fr. Il manque au premier, pour payer cette dépense, les $\frac{2}{3}$ de l'argent du second; et il manque au second les $\frac{3}{5}$ de l'argent du premier. Combien ont-ils chacun?* (Rép. : le premier a 45 fr., et le second a 54 fr.)

XI. *Une personne possède un capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne, qui possède 10000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son capital à 1 de plus pour 100, a un revenu plus grand de 800 fr. Une troisième personne, qui possède 15000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien à 2 de plus pour 100, a un revenu plus grand de 1500 fr. On demande les biens des trois personnes, et à quel intérêt chacune d'elles fait valoir son bien?* (Rép. : la première personne possède 30000 fr., qu'elle fait valoir à 4 pour 100.)

XII. *Trois billets, qui valent ensemble 2790 fr., ont été escomptés en dehors à 5 pour 100. Le premier est à 7 mois d'échéance, le deuxième à 5 mois, le troisième à 4 mois. On a perdu sur le premier billet autant que sur les deux autres, et sur le deuxième 1 fr. de moins que le tiers de ce qu'on a perdu sur les deux autres. Déterminer la valeur de chaque billet.* (Rép. : la valeur du 1er billet est 1080 fr., celle du 2e, 720 fr., et celle du 3e, 990 fr.)

XIII. *On a trois lingots du poids de 400 grammes chacun : le premier est composé de 300 grammes d'argent, 25 de cuivre et 75 d'étain; le deuxième contient 25 grammes*

d'argent, 300 de cuivre et 75 d'étain; enfin, le troisième est formé de 350 grammes de cuivre et 50 d'étain. On demande quelle portion il faut prendre de chacun de ces lingots, pour en former un quatrième qui contienne 100 grammes d'argent, 225 de cuivre et 75 d'étain. (Rép. : il faut prendre les $\frac{3}{11}$ du premier lingot, les $\frac{8}{11}$ du deuxième, et zéro du troisième.)

XIV. *Un nombre est formé de quatre chiffres dont la somme est 11 : le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres des centaines et des mille; celui des mille est égal à la somme de ceux des centaines et des unités; et en retranchant de ce nombre 1728, on obtient pour reste le nombre renversé. Quel est ce nombre?* (Rép. : 3251.)

Observations sur la résolution des problèmes. — Interprétation des valeurs négatives.

109. Quand les équations déterminées par l'énoncé d'un problème expriment toutes les conditions de ce problème, les valeurs des inconnues qui vérifient les équations conviennent aussi au problème. Mais il arrive quelquefois que les valeurs des inconnues sont assujetties à des conditions qui ne peuvent pas être exprimées dans les équations; c'est ce qui a lieu, par exemple, quand elles doivent être des nombres entiers, ou quand elles doivent être renfermées entre certaines limites. Alors, pour que le problème soit possible, il ne suffit plus que l'on obtienne pour les inconnues des valeurs qui vérifient les équations, il faut encore que ces valeurs satisfassent à toutes les autres conditions.

110. Dans beaucoup de problèmes, on ne peut admettre pour les inconnues que des valeurs positives; et, si l'on en obtient de négatives, il faut n'en pas tenir compte. Mais il peut se faire aussi qu'en changeant le sens de quelque restriction qu'on a apportée à l'énoncé du problème, pour le

mettre en équation, ou bien en modifiant quelqu'une des conditions comprises dans cet énoncé, sans changer les quantités données, les inconnues pour lesquelles on avait trouvé des valeurs négatives admettent des valeurs positives numériquement égales aux premières.

Pour fixer les idées, supposons qu'en résolvant les équations d'un problème, on ait trouvé, pour une inconnue x, une valeur négative $-a$. Il est clair que par la substitution de la valeur $-a$ à la place de x, dans les équations, on a les mêmes résultats que si l'on remplaçait d'abord x par $-x$, et que l'on substituât ensuite à la place de x la valeur $+a$. Il suit de là que, lorsqu'on a changé x en $-x$, les nouvelles équations admettent une solution dans laquelle la valeur de x est $+a$. Donc, pour que le problème admette pareillement une solution dans laquelle la valeur de x soit positive et égale à a, il suffit de modifier, si cela est possible, le sens de quelques-unes des conditions exprimées dans l'énoncé, ou le sens qu'on a attribué à celles de ces conditions qui pouvaient être diversement interprétées, de manière que toutes ces conditions s'accordent avec les équations qui résultent du changement de x en $-x$ dans les équations primitives.

On a déjà vu, dans le chapitre premier (n° 34), comment l'énoncé d'un problème peut donner lieu à deux suppositions différentes, telles que l'on passe de l'une à l'autre en changeant dans l'équation x en $-x$. Le problème suivant offrira un autre exemple de l'interprétation des valeurs négatives.

111. *On a acheté plusieurs mètres d'étoffe pour une certaine somme : si l'on avait payé le mètre 1 fr. de plus, en prenant 3 mètres de moins, on aurait dépensé 8 fr. de plus ; et si l'on avait payé le mètre 2 fr. de moins, en prenant 5 mètres de plus, on aurait dépensé 25 fr. de moins.*

Combien a-t-on acheté de mètres, et quel était le prix du mètre?

Nommons x le nombre de mètres que l'on a achetés, et y le prix du mètre; les équations du problème seront

$$(1)\quad (x-3)(y+1)=xy+8,\quad (2)\quad (x+5)(y-2)=xy-25.$$

En développant les calculs indiqués, et retranchant, dans chaque équation, le terme xy commun aux deux membres, on obtient les deux équations du premier degré

$$x-3y=11,\quad 5y-2x=-15;$$

la résolution de ces équations donne $y=-7$, $x=-10$.

Pour interpréter ces valeurs, on remplace, dans les équations (1) et (2), x par $-x$, et y par $-y$; il vient alors

$$(-x-3)(-y+1)=(-x)\times(-y)+8,$$
$$(-x+5)(-y-2)=(-x)\times(-y)-25.$$

Comme on peut changer les signes des deux facteurs d'un produit, sans que ce produit soit altéré, les équations qu'on vient d'obtenir peuvent s'écrire ainsi :

$$(x+3)(y-1)=xy+8,\quad (x-5)(y+2)=xy-25.$$

On voit par là que le problème proposé admettrait une solution exprimée par les valeurs positives $x=10$, $y=7$, si l'on modifiait l'énoncé de la manière suivante :

On a acheté plusieurs mètres d'étoffe pour un certain prix : si l'on avait payé le mètre 1 fr. de moins, en prenant 3 mètres de plus, on aurait dépensé 8 fr. de plus; et si l'on avait payé le mètre 2 fr. de plus, en prenant 5 mètres de moins, on aurait dépensé 25 fr. de moins. Combien a-t-on acheté de mètres, et quel était le prix du mètre?

Il faut bien remarquer que, dans le nouvel énoncé, les nombres donnés sont les mêmes que dans le précédent; seulement on prend quelques-uns de ces nombres dans une

acception opposée à celle qu'ils avaient d'abord, en regardant comme des diminutions, par rapport aux nombres cherchés, ceux qui exprimaient des augmentations, et *vice versâ*.

Des cas d'impossibilité et d'indétermination dans les équations du premier degré.

112. Considérons l'équation du premier degré à une inconnue

$$(1) \qquad \frac{3(2x+1)}{4} - 5 - \frac{3x+2}{10} = \frac{2(3x-1)}{5}.$$

En chassant les dénominateurs, développant les calculs, et transposant les termes, on trouve

$$\begin{gathered} 15(2x+1) - 100 - 2(3x+2) = 8(3x-1), \\ 30x + 15 - 100 - 6x - 4 = 24x - 8, \\ 30x - 6x - 24x = 100 + 4 - 15 - 8, \\ 0 = 81. \end{gathered}$$

Le dernier résultat fait voir qu'en supposant qu'il puisse y avoir égalité entre les deux membres de l'équation, on en conclut une absurdité. Par conséquent il n'existe pas de valeur de x qui vérifie cette équation.

On peut reconnaître sur l'équation même qu'elle n'est que l'expression d'une condition impossible; il suffit, pour cela, d'effectuer les calculs indiqués dans chacun des deux membres. On trouve d'abord

$$\frac{6x}{4} + \frac{3}{4} - 5 - \frac{3x}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6x}{5} - \frac{2}{5};$$

et, en réduisant le premier membre,

$$\frac{6}{5}x - \frac{89}{20} = \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}.$$

On voit alors que les deux membres ne peuvent jamais devenir égaux, quelque valeur que l'on attribue à x.

Digitized by Google

113. Prenons actuellement l'équation

$$(2)\qquad \frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+\frac{x+1}{3}=x+\frac{7}{12};$$

elle donne

$$18x+9-10x-6+4x+4=12x+7,$$
$$18x-10x+4x-12x=7+6-9-4,$$
$$0=0.$$

Le dernier résultat, $0=0$, est une identité, et il fait voir que l'équation proposée sera vérifiée, quelque valeur que l'on attribue à x.

On peut reconnaître, sur l'équation même, qu'elle n'est qu'une identité ; car, en effectuant les calculs indiqués dans le premier membre, on trouve qu'il se réduit à $x+\frac{7}{12}$.

114. Lorsqu'une équation ne peut jamais être vérifiée, quelque valeur que l'on mette à la place de l'inconnue, on dit qu'elle est *impossible;* et quand une équation est vérifiée, quelles que soient les valeurs que l'on mette à la place des inconnues, on dit qu'elle est *indéterminée.* Ainsi l'équation (1) est une équation impossible, et l'équation (2) est une équation indéterminée; on dit aussi que l'équation (2) est une équation *identique.*

115. Soient les deux équations

$$(3)\qquad 121x-143y=130,$$
$$(4)\qquad 187x-221y=340.$$

En multipliant la première par 187 et la seconde par 121, on trouve

$$22627x-26741y=24310,$$
$$22627x-26741y=41140.$$

Les premiers membres de ces équations étant les mêmes, tandis que les seconds membres sont des quantités connues

inégales, il n'existe point de nombres qui, mis à la place de x et de y, puissent vérifier simultanément ces deux équations; par conséquent, le système des équations (3) et (4) n'admet pas de solution.

Il est essentiel de remarquer que chacune des équations prise séparément est possible, et peut être vérifiée d'une infinité de manières; seulement il n'y a aucune solution qui convienne à la fois aux deux équations. On dit, par cette raison, que les deux équations sont *incompatibles* ou qu'elles sont *contradictoires*. On dit aussi que le système de ces équations est *impossible*.

Si, au lieu d'effectuer l'élimination de x par réduction, on prend la valeur de x dans la première équation pour la substituer dans la seconde, on trouvera

$$x = \frac{130 + 143y}{121},$$

et la seconde équation deviendra

$$187 \times \frac{130 + 143y}{121} - 221y = 340;$$

d'où

$$187 \times 130 + 187 \times 143y - 121 \times 221y = 340 \times 121.$$

En transposant les termes et effectuant les calculs, on obtiendra

$$26741y - 26741y = 41140 - 24310,$$
$$0 = 16830.$$

De cette manière, l'impossibilité de vérifier le système proposé se manifeste par une équation absurde, comme dans l'exemple du n° 112. On parviendrait aussi à l'équation absurde $0 = 16830$, si l'on retranchait l'une de l'autre les deux équations qu'on obtient en multipliant l'équation (3) par 187, et l'équation (4) par 121.

116. On a un exemple de deux équations dont le système

est indéterminé, en prenant les suivantes :

$$121x - 143y = 110,$$
$$187x - 221y = 170.$$

Si l'on multiplie les deux membres de la première par 187, et ceux de la seconde par 121, on parvient à deux équations identiques. Il suit de là que, si l'une des équations proposées est vérifiée, l'autre le sera pareillement. Par conséquent, l'ensemble des deux équations peut seulement servir à faire connaître la valeur de l'une des inconnues x et y, après que l'on a attribué une valeur arbitraire à l'autre.

Si, au lieu d'effectuer l'élimination de x par réduction, on tire la valeur de x de la première équation, et qu'on la substitue dans la seconde, on trouve

$$187 \times \frac{110 + 143y}{121} - 221y = 170,$$
$$187 \times 143y - 121 \times 221y = 170 \times 121 - 110 \times 187,$$
$$26741y - 26741y = 20570 - 20570,$$
$$0 = 0.$$

De cette manière, l'indétermination du système proposé s'annonce par l'identité $0 = 0$, comme dans l'exemple du n° 113.

117. Considérons les équations à trois inconnues

$$(5) \qquad 2x + y - 8z = 10,$$
$$(6) \qquad 3x - 2y + 5z = 14,$$
$$(7) \qquad 8x - 3y + 2z = 35.$$

En éliminant y entre la première équation et chacune des deux autres, on obtient

$$7x - 11z = 34, \qquad 14x - 22z = 65.$$

Ces équations sont incompatibles, car le premier membre de la seconde est le double de $7x - 11z$, et le second membre 65 est différent du double de 34. Il suit de là que le système proposé n'admet aucune solution.

Dans cet exemple, il n'y a d'incompatibilité ni entre les équations (5) et (6), ni entre les équations (5) et (7), ni même entre les équations (6) et (7), et ces équations, prises deux à deux, admettraient une infinité de solutions communes; mais l'une d'elles est incompatible avec le système des deux autres. Cette incompatibilité vient de ce que le premier membre de l'équation (7) est la somme du premier membre de l'équation (5) et de deux fois le premier membre de l'équation (6), tandis que le second membre de l'équation (7) n'est pas égal à la somme qu'on obtient en ajoutant au second membre de l'équation (5) le double du second membre de l'équation (6).

118. Prenons encore les équations

$$2x + y - 8z = 10,$$
$$3x - 2y + 5z = 14,$$
$$8x - 3y + 2z = 38.$$

En éliminant y entre la première équation et chacune des deux autres, on trouve

$$7x - 11z = 34, \quad 14x - 22z = 68.$$

Ces deux équations sont identiques; car les deux membres de la seconde sont ceux de la première multipliés par 2. Il suit de là que le système proposé admet une infinité de solutions. Pour obtenir une de ces solutions, il faudrait donner une valeur arbitraire à l'une des inconnues. Si l'on choisissait arbitrairement la valeur de z par exemple, l'équation $7x - 11z = 34$ ferait connaître la valeur correspondante de x, et la valeur de y se tirerait ensuite de l'une des équations proposées. On peut aussi exprimer deux des incon-

nues en fonction de la troisième; l'équation $7x - 11z = 34$ donne

$$x = \frac{34 + 11z}{7};$$

et par la substitution de cette valeur de x dans l'équation $2x + y - 8z = 10$, on trouve

$$y = \frac{2 + 34z}{7}.$$

Au moyen de ces deux formules, on obtient immédiatement les valeurs de x et de y qui conviennent au système proposé, quand on a attribué à z une valeur arbitraire.

Dans cet exemple, chacune des équations est une conséquence des deux autres, et l'on pouvait le reconnaître immédiatement, en remarquant que l'on obtient la troisième équation en ajoutant respectivement aux deux membres de la première les deux membres de la seconde multipliés par 2.

S'il arrivait qu'en traitant une question à trois inconnues on fût conduit à trois équations équivalentes, on pourrait prendre des couples de valeurs arbitraires pour deux des inconnues, et pour chacun de ces couples on obtiendrait une valeur déterminée de la troisième inconnue.

119. Soient encore les trois équations

$$3x - 2y + 5z = 14,$$
$$6x - 4y - 3z = 15,$$
$$9x - 6y - 7z = 20.$$

En éliminant y entre la première équation et chacune des deux autres, on obtient les deux équations $13z = 13$, $22z = 22$, qui donnent l'une et l'autre $z = 1$. Pour satisfaire aux équations proposées, on pourra joindre à la valeur $z = 1$, une valeur arbitraire de l'une des inconnues x et y; et l'on obtiendra la valeur de l'autre inconnue au moyen de l'une des équations qui se réduisent toutes trois, lorsqu'on y fait $z = 1$, à $3x - 2y = 9$.

120. Prenons pour dernier exemple les quatre équations

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 8, \\ 2x - y + t &= 3, \\ 5z - x - 2t &= 2, \\ 10z - y - 3t &= 5. \end{aligned}$$

En éliminant y entre la première équation et la deuxième, on obtient pour résultat la troisième équation. Il suit de là que le système proposé n'offre, en réalité, que trois équations distinctes, savoir :

$$2x - y + t = 3, \quad 5z - x - 2t = 2, \quad 10z - y - 3t = 5.$$

En éliminant y entre les deux équations $2x - y + t = 3$ et $10z - y - 3t = 5$, on obtient $10z - 2x - 4t = 2$; et cette équation est incompatible avec $5z - x - 2t = 2$. Le système proposé est donc impossible.

121. Les exemples et les observations qui précèdent font voir que, pour un système de m équations du premier degré à m inconnues (m désignant un nombre entier quelconque), les procédés d'élimination peuvent présenter trois cas :

Ou bien on pourra, par ces procédés, transformer le système proposé en une suite d'autres systèmes équivalents, jusqu'à ce que l'on parvienne à un système tel, que la dernière équation fournisse la valeur d'une inconnue, et que les autres équations, en remontant de la dernière à la première, déterminent successivement les valeurs des autres inconnues. Dans ce cas, le système des équations données n'admettra qu'une solution.

Ou bien on parviendra, dans le cours des calculs, à une condition absurde, ou à des équations manifestement contradictoires. Dans ce cas, le système proposé sera impossible.

Ou bien enfin, on parviendra à des équations qui n'offri-

ront plus que des identités, ou à un système dans lequel plusieurs équations exprimeront des conditions identiques. Dans ce cas on pourra généralement obtenir, pour une partie des inconnues, des valeurs exprimées en fonction des autres inconnues, et en donnant à celles-ci des valeurs arbitraires, on trouvera pour les premières des valeurs correspondantes; de sorte que le système proposé admettra une infinité de solutions. Cependant il faut encore remarquer, 1° que l'on pourra trouver pour quelques inconnues des valeurs déterminées, comme on l'a vu par l'exemple du n° 119; 2° qu'il pourra se faire que les calculs nécessaires pour évaluer une partie des inconnues en fonction des autres conduisent à des conditions absurdes, comme on l'a vu dans le dernier exemple.

Il est évident que les trois cas qui viennent d'être exposés sont les seuls qui puissent se présenter.

122. Le cas où l'on proposerait à priori un système d'équations dans lequel le nombre des inconnues surpasserait celui des équations, donnerait lieu à des observations semblables à celles que nous venons de faire sur les cas d'indétermination.

Si, au contraire, le nombre des équations surpassait celui des inconnues, on considérerait d'abord une partie de ces équations en même nombre que les inconnues, et l'on en déduirait généralement un système unique de valeurs pour toutes les inconnues; il faudrait ensuite examiner si ces valeurs vérifient les équations restantes, et, si cela n'avait pas lieu, le système proposé serait impossible.

CHAPITRE QUATRIÈME.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER DEGRÉ. DISCUSSION DES FORMULES. EXPRESSIONS INFINIES ET INDÉTERMINÉES. PRINCIPES SUR LES INÉGALITÉS.

Résolution des équations générales du premier degré. — Loi des valeurs des inconnues.

123. On nomme équations générales du premier degré à plusieurs inconnues, celles dans lesquelles les coefficients des inconnues et les quantités connues sont représentés par des lettres. Pour éviter la confusion qui résulterait d'un trop grand nombre de lettres différentes, on emploie des lettres affectées d'un ou de plusieurs accents. Ainsi, le coefficient d'une inconnue dans l'une des équations étant représenté par la lettre a, on représente les coefficients de la même inconnue dans les autres équations par les lettres accentuées a', a'', a''', etc., qu'on prononce *a prime, a seconde, a tierce*, etc.

124. Soient les deux équations générales

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y = c'.$$

En multipliant les deux membres de la première équation par b', ceux de la seconde par b, et retranchant ensuite les deux équations l'une de l'autre, on trouve

$$(3) \qquad (ab' - ba')x = cb' - bc';$$

d'où

$$(4) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

On obtient la valeur de y en substituant la valeur de x dans l'une des équations (1) et (2), ou en faisant des calculs analogues à ceux que l'on a faits pour avoir la valeur de x. On trouve ainsi

$$(5) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

On voit aussi, par la forme des équations, que l'on peut déduire la valeur de y de celle de x, en remplaçant a et a' par b et b', et réciproquement; en effectuant ces changements, on a d'abord $y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$, et en changeant les signes des deux termes de la fraction, on retrouve la formule (5).

Pour appliquer les formules (4) et (5) à un exemple numérique, prenons les deux équations

$$5x - 3y = 14, \quad 8x - 15y = 2.$$

On devra faire $a = 5$, $b = -3$, $c = 14$, $a' = 8$, $b' = -15$, $c' = 2$; il en résultera $x = 4$, $y = 2$. Ces valeurs sont, en effet, celles que l'on obtiendrait en résolvant directement les équations proposées.

125. Considérons maintenant les trois équations

$$(6) \qquad ax + by + cz = d,$$
$$(7) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$
$$(8) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

On pourrait éliminer une des inconnues entre la première équation et chacune des deux autres; on aurait alors à résoudre deux équations à deux inconnues. Mais les calculs sont plus simples de la manière suivante.

Les équations (6) et (7) peuvent s'écrire comme il suit :

$$ax + by = d - cz,$$
$$a'x + b'y = d' - c'z.$$

En regardant z comme une quantité connue, on obtiendra les valeurs de x et de y au moyen des formules (4) et (5), dans lesquelles on devra remplacer c et c' par $d - cz$ et $d' - c'z$; on trouve ainsi

$$x = \frac{(d - cz)\,b' - (d' - c'z)\,b}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{(d' - c'z)\,a - (d - cz)\,a'}{ab' - ba'},$$

ou bien

$$(9) \qquad x = \frac{db' - bd' + (bc' - cb')\,z}{ab' - ba'},$$

$$(10) \qquad y = \frac{ad' - da' + (ca' - ac')\,z}{ab' - ba'}.$$

En substituant les dernières valeurs de x et de y dans l'équation (8), et réduisant, on obtient

$$(11) \qquad Dz = N;$$

en posant, pour abréger,

$$D = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$
$$N = ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''.$$

L'équation (11) donne la valeur de z, et en la substituant dans les équations (9) et (10), on en déduit les valeurs des deux autres inconnues x et y. On trouve ainsi les trois formules suivantes :

$$(12) \quad x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$(13) \quad y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

$$(14) \quad z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

On doit d'ailleurs remarquer qu'il suffit de connaître la valeur de l'une des inconnues pour avoir immédiatement les valeurs des deux autres ; car, d'après la forme des équations, on obtiendra la valeur de x en remplaçant dans celle

de z la lettre c par a, et réciproquement, sans rien changer aux accents. On trouvera pareillement la valeur de y en remplaçant dans celle de x la lettre c par b, et réciproquement.

126. On peut encore résoudre les équations générales du premier degré par la méthode suivante, qui est appelée *méthode de Bezout*.

Reprenons les équations générales à deux inconnues

$$ax + by = c, \quad a'x + b' = c'.$$

On multiplie les deux membres de la première équation par une quantité indéterminée m, et l'on en retranche les deux membres de la seconde équation, ce qui donne

$$(am - a')x + (bm - b')y = cm - c'.$$

Les valeurs de x et de y se déduisent de cette dernière équation, en disposant de l'indéterminée m de manière que le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer se réduise à zéro. Ainsi, pour trouver x, on fait disparaître y en posant $bm - b' = 0$, d'où $m = \frac{b'}{b}$. Cette valeur de m étant substituée dans l'équation $(am - a')x = cm - c'$, on trouve

$$\left(a\frac{b'}{b} - a'\right)x = c\frac{b'}{b} - c',$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

La dernière équation donne pour x la valeur qu'on a trouvée précédemment. On obtiendrait la valeur de y par un calcul analogue.

Passons aux équations générales à trois inconnues

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d''.$$

On multiplie les deux membres de la première équation

par une quantité indéterminée m, ceux de la seconde par une autre quantité indéterminée n; on ajoute les deux équations résultantes, et l'on en retranche la troisième équation $a''x + b''y + c''z = d''$; on obtient ainsi l'équation

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y$$
$$+ (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

La valeur de chacune des inconnues x, y, z se déduit de cette dernière équation, en disposant des indéterminées m et n de manière que les coefficients des deux autres inconnues deviennent nuls. Ainsi, pour obtenir la valeur de z, on pose

$$am + a'n - a'' = 0, \quad bm + b'n - b'' = 0.$$

Les valeurs des indéterminées m et n sont alors données par les formules relatives aux équations générales à deux inconnues, en observant qu'il faut remplacer, dans ces formules, les inconnues x et y par m et n, les quantités connues a, b, c par a, a', a'', et a', b', c' par b, b', b''; on obtient ainsi

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}, \quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'},$$

et par la substitution de ces valeurs de m et de n dans l'équation $(cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''$, il vient

$$\left\{ c\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} + c'\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'} - c'' \right\} z$$
$$= d\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} + d'\frac{ab'' - ba''}{ab - ba'} - d''.$$

En chassant les dénominateurs, on parvient à l'équation que nous avons représentée dans le n° 125 par $Dz = N$, et l'on en déduit la valeur de z. On obtiendrait la valeur de chacune des deux autres inconnues par un calcul analogue.

127. En examinant attentivement les formules que nous

venons d'obtenir, on découvre une loi remarquable qui permet de les retrouver sans calcul, et qui s'étend à un nombre quelconque d'équations.

Le dénominateur est le même pour toutes les inconnues, et on l'obtient au moyen de la règle suivante :

On forme d'abord, avec les lettres a et b, les deux permutations ab, ba (*), et l'on place entre elles le signe —.

Quand il n'y a que deux équations, on met dans chacune de ces deux permutations un accent à la seconde lettre ; le résultat $ab' - ba'$ est le dénominateur commun des deux inconnues.

Dans le cas de trois équations, on écrit la lettre c à toutes les places dans chacune des permutations $+ ab$, $- ba$, en la mettant d'abord à la troisième place, puis à la deuxième et ensuite à la première. On conserve le signe de la permutation de deux lettres, quand on écrit la lettre a à la dernière place, et l'on change la ligne chaque fois que cette lettre change de place. On forme ainsi l'expression

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Il ne reste alors qu'à mettre dans chaque terme de cette expression un accent à la seconde lettre, et deux accents à la troisième.

Lorsqu'il y a quatre équations, on écrit la lettre d à toutes les places dans chacune des permutations ci-dessus de trois lettres, en la mettant d'abord à la dernière place, et la faisant successivement avancer d'une place jusqu'à la première. On conserve le signe de la permutation de trois lettres, quand on écrit la lettre d à la dernière place, et l'on change le signe chaque fois que cette lettre avance

(*) Les permutations de plusieurs lettres sont les différents arrangements qu'on peut former en écrivant ces lettres les unes à la suite des autres, de toutes les manières possibles.

d'un rang. On met ensuite, dans tous les termes que l'on a ainsi obtenus, un accent à la seconde lettre, deux à la troisième, trois à la quatrième. S'il y a un plus grand nombre d'équations, on continue de même.

Les numérateurs se déduisent, dans tous les cas, du dénominateur commun, en y remplaçant, pour chaque inconnue, la lettre qui exprime les coefficients de cette inconnue par celle qui exprime les quantités connues, sans changer les accents. Ainsi, dans les formules du n° 124, on obtient le numérateur de la valeur de x, $cb' - bc'$, en remplaçant, dans le dénominateur $ab' - ba'$, les coefficients a et a' de x par les quantités connues c et c'; on obtient pareillement le numérateur de la valeur de y en remplaçant, dans le dénominateur, b et b' par c et c'. Dans les formules du n° 125, on obtient le numérateur de x en remplaçant, dans le dénominateur, les coefficients a, a', a'' de x par les quantités connues d, d', d''. Les numérateurs des deux autres inconnues sont formés de la même manière.

128. La loi que nous venons d'exposer a été reconnue par Cramer. Elle n'était d'abord qu'un résultat de l'observation; mais Laplace a démontré qu'elle était générale. La démonstration que nous allons rapporter est celle qui a été donnée par cet illustre géomètre, sauf quelques modifications qui y ont été apportées depuis. Pour la simplicité des notations, nous remplacerons les accentuations $'$, $''$, $'''$, etc., par les indices 1, 2, 3, etc.; de cette manière, les équations seront :

$$(15)\quad \begin{cases} ax + by + cz + \ldots + hw = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + h_1w = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + h_2w = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + h_{n-1}w = k_{n-1}. \end{cases}$$

Le nombre des inconnues et des équations est n, et les points tiennent la place des termes et des équations qu'on ne peut pas écrire tant que ce nombre n'a pas reçu une valeur particulière.

Nommons R le polynôme qu'on obtient en suivant la règle qui a été donnée pour la formation du dénominateur commun. Les termes de R et ce polynôme lui-même donnent lieu aux observations suivantes, sur lesquelles la démonstration est fondée :

1°. Le polynôme R contient évidemment toutes les permutations qui peuvent être formées avec les lettres a, b, c,..., h. Chaque terme contient toutes les lettres, ne contient chacune d'elles qu'une seule fois, et contient une lettre sans indice et une lettre affectée de chacun des indices de 1 à $n-1$.

2°. Si l'on examine l'ordre des lettres dans chacun des termes de R, en le comparant à l'ordre alphabétique, et en considérant chaque lettre par rapport à toutes celles qui la suivent, les termes qui auront le signe $+$ seront ceux dans lesquels le nombre des *inversions alphabétiques* sera pair ou zéro ; et les termes qui auront le signe $-$ seront ceux dans lesquels le nombre des *inversions* sera impair. Ainsi, soit, par exemple, le terme $dbac$; il s'y trouve *quatre inversions*, trois par rapport à la lettre d, parce qu'elle est placée avant les trois lettres b, a, c, qui la suivent dans l'ordre alphabétique, et la quatrième par rapport à la lettre b, qui est placée avant a ; en conséquence, ce terme aura le signe $+$.

On reconnaît immédiatement l'exactitude de cette dernière règle, lorsqu'il n'y a que deux équations ; car le polynôme R est alors $+ab - ba$, en faisant abstraction des indices ; le terme ab, qui a le signe $+$, est sans inversion, et il s'en trouve une dans le terme $-ba$ qui a le signe $-$. Pour le cas de trois équations, quand on écrit

la troisième lettre c à la suite de chacune des deux permutations $+ab$, $-ba$, on ne change pas le nombre des inversions, et le signe du terme reste aussi le même. Chaque fois qu'on fait avancer cette lettre d'un rang vers la gauche, le nombre des inversions augmente de *un*; et puisqu'on change en même temps le signe, on a le signe $+$ toutes les fois que le nombre des inversions est devenu pair, et le signe $-$ toutes les fois que ce nombre est devenu impair. De même, pour le cas de quatre équations, en écrivant la lettre d à la suite d'une des permutations de trois lettres, on obtient un terme qui a le même nombre d'inversions que celui avec lequel il a été formé, et qui a aussi le même signe; et en changeant ensuite le signe chaque fois que la lettre d avance d'un rang, ce qui augmente de *un* le nombre des inversions, on retrouve le signe primitif ou le signe opposé, suivant que le nombre des inversions nouvelles est pair ou impair. La même chose aura lieu à chaque lettre nouvelle que l'on introduira; par conséquent, la règle que nous avons énoncée ne cessera pas d'être exacte, quel que soit le nombre des lettres.

3°. Deux termes de R dans lesquels les mêmes lettres occupent les mêmes rangs, à l'exception seulement de deux lettres qui se trouvent permutées entre elles, ont des signes contraires. Considérons, par exemple, deux termes, l'un dans lequel la lettre f est placée r rangs après b, l'autre dans lequel la lettre b vient, au contraire, r rangs après f; toutes les autres lettres ayant d'ailleurs, dans ces deux termes, les mêmes rangs. Pour passer du premier de ces termes au second, on peut faire descendre d'abord la lettre f jusqu'à ce qu'elle se trouve immédiatement avant b, en l'avançant successivement d'un rang; puis faire remonter ensuite la lettre b jusqu'à la place qu'occupait f. Chacun des déplacements successifs de la lettre qui descendra, ou de celle qui montera, introduira une inversion, ou en fera disparaître

une; et comme la lettre qui montera subira un déplacement de moins que celle qui descendra, il y aura eu un nombre impair d'inversions introduites ou supprimées. Par conséquent, d'après la remarque précédente, les deux termes auront des signes contraires.

4°. Si l'on remplace dans tous les termes de R une lettre par une des autres lettres contenues dans ce polynôme, sans remplacer celle-ci, et en conservant les indices, le polynôme R deviendra identiquement nul. Supposons, par exemple, qu'on remplace la lettre b par f. Le polynôme R est composé de groupes de deux termes qui se déduisent l'un de l'autre par la permutation des deux lettres b et f seulement, et, d'après la remarque précédente, les deux termes de chaque groupe ont des signes contraires. Ces termes expriment des quantités différentes, à cause des indices différents de chacune des deux lettres b et f; mais, après le remplacement de b par f, ils sont égaux et ils se détruisent. Le polynôme R est donc réduit à zéro.

Ces observations préliminaires étant établies, nous allons passer à la démonstration que nous avons en vue.

Puisque chaque terme du polynôme R contient en même temps toutes les lettres $a, b, \ldots, h$, et ne contient chaque lettre qu'une seule fois, ou sans indice, ou avec l'un des indices de 1 à $n-1$, on peut mettre ce polynôme sous les différentes formes ci-après :

$$\begin{aligned}
&Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1},\\
&Bb + B_1 b_1 + B_2 b_2 + \ldots + B_{n-1} b_{n-1},\\
&Cc + C_1 c_1 + C_2 c_2 + \ldots + C_{n-1} c_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans la première expression, $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ désignent des polynômes qui ne contiennent pas la lettre a, et sont formés avec toutes les autres lettres. Pareillement B,

$B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ sont des quantités indépendantes de la lettre b; $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ sont des quantités indépendantes de c; etc.

Multiplions les équations (15), la première par A, la deuxième par A_1, la troisième par A_2, ainsi de suite; et ajoutons-les. Le coefficient de x, dans l'équation résultante, sera la première expression ci-dessus du polynôme R; les coefficients des autres inconnues seront cette expression dans laquelle a sera remplacée par une des autres lettres; donc ils seront nuls. Le second membre sera la même expression dans laquelle a sera remplacée par k. On conclura donc

$$x = \frac{Ak + A_1 k_1 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{Aa + A_1 a_1 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}}. \tag{16}$$

On obtiendrait les valeurs des autres inconnues d'une manière semblable.

Discussion des formules données par les équations générales du premier degré.

129. On a reconnu dans le chapitre précédent qu'il y a pour les équations numériques du premier degré des cas d'impossibilité, et d'autres où les valeurs des inconnues sont indéterminées; il est important d'examiner à quelles particularités ces sortes de cas peuvent donner lieu dans les formules que l'on obtient en résolvant les équations générales.

On a déjà vu dans le chapitre premier comment les formules algébriques peuvent indiquer l'impossibilité et l'indétermination. En introduisant dans la formule à laquelle nous avions été conduits par la question du n° 31, des suppositions pour lesquelles la question devenait impossible, nous avons obtenu le symbole $\frac{m}{0}$ (n° 36); et en introduisant dans la même formule des suppositions qui

rendaient la question indéterminée, nous avons obtenu le symbole $\frac{0}{0}$ (n° 37).

Il serait assez naturel d'admettre que chacun de ces deux symboles devra recevoir, dans toutes les occasions, la même interprétation. Mais, pour calculer les valeurs des inconnues dans les équations générales, il faut supposer implicitement que les valeurs qu'on donnera aux quantités connues, dans les formules, seront telles, que si on les mettait dans les équations, on pourrait ensuite effectuer sur celles-ci tous les calculs qu'il est nécessaire d'exécuter sur les équations générales, pour parvenir aux formules. Or c'est ce qui n'a plus lieu quand une ou plusieurs des équations deviennent impossibles ou indéterminées, ou quand elles forment un système impossible ou indéterminé.

Il est donc nécessaire d'examiner s'il est toujours indifférent d'introduire des suppositions dans les formules, ou de faire les suppositions dans les équations dont les formules ont été tirées, et de les résoudre ensuite directement. Cet examen constitue ce que l'on nomme la *discussion* des formules.

130. Une équation du premier degré, à une seule inconnue, peut toujours être ramenée à la forme

$$(1) \qquad Ax = B,$$

d'où

$$(2) \qquad x = \frac{B}{A}.$$

Il est clair que, lorsque le dénominateur A n'est pas zéro, la valeur de x donnée par la formule (2) vérifie l'équation (1), et cette équation n'admet pas d'autre solution.

Lorsque la valeur de A est zéro, celle de B étant une quantité b qui n'est pas nulle, l'équation (1) est impossible, et la formule (2) donne pour x le symbole $\frac{b}{0}$.

Quand on a à la fois $A = 0$ et $B = 0$, l'équation (1) est satisfaite par une valeur quelconque de x, puisqu'elle devient $0 \times x = 0$; et, dans ce cas, la formule (2) donne pour x le symbole $\frac{0}{0}$.

On voit donc que, pour toutes les suppositions que l'on peut établir sur les quantités connues, la formule (2) et l'équation (1) conduisent toujours aux mêmes conclusions.

131. Considérons les équations générales du premier degré à deux inconnues

$$(3) \qquad ax + by = c, \qquad (4) \qquad a'x + b'y = c';$$

d'où l'on a tiré

$$(5) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad (6) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

En se reportant aux calculs qui ont été expliqués dans le n° **124**, on voit que, quelles que soient les suppositions que l'on établira sur les quantités a, b, c; a', b', c', si elles ne réduisent pas à zéro le dénominateur commun $ab' - ba'$, on pourra toujours exécuter les mêmes calculs, après avoir introduit ces suppositions dans les équations. Ainsi, dans ce cas, les valeurs des inconnues données par les formules seront nécessairement les mêmes que celles qu'on tirerait des équations.

Supposons que l'on ait $ab' - ba' = 0$, les quantités $cb' - bc'$ et $ac' - ca'$ étant différentes de zéro; les formules donneront pour chaque inconnue le symbole $\frac{m}{0}$. Il est facile de voir que, dans ce cas, les deux équations sont incompatibles; car, en multipliant les deux membres de l'équation (3) par b', et ceux de l'équation (4) par b, on obtient

$$(7) \qquad ab'x + bb'y = cb', \qquad (8) \qquad a'bx + bb'y = bc'.$$

Or, puisque l'on a $ab' - ba' = 0$, d'où $ab' = ba'$, les premiers membres des deux équations (7) et (8) sont identiques;

et puisque, par hypothèse, $bc' - cb'$ n'est pas nul, les seconds membres sont différents. Les deux équations (3) et (4) sont donc contradictoires.

Supposons à présent que la valeur de l'une des inconnues, celle de x par exemple, se réduise au symbole $\frac{0}{0}$.

Il faudra que l'on ait en même temps $ab' = ba'$, et $cb' = bc$; or on déduit de ces relations $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$; on aura donc aussi $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, d'où $ac' = ca'$, ce qui montre que la valeur de y sera aussi réduite au symbole $\frac{0}{0}$. De ce que l'on a $ab' = ba'$ et $cb' = bc'$, il résulte que les équations (7) et (8) sont identiques. Le système proposé est donc indéterminé.

132. Si l'on avait $b = 0$ et $b' = 0$, il en résulterait $ab' - ba' = 0$ et $cb' - bc' = 0$, et la quantité $ac' - ca'$ pourrait être différente de zéro. Dans ce cas, la valeur de x deviendrait $\frac{0}{0}$, et celle de y serait infinie. Les équations (3) et (4) sont alors $ax = c$ et $a'x = c'$; on tire de la première $x = \frac{c}{a}$, et de la seconde, $x = \frac{c'}{a'}$. Si l'on n'a pas $ac' - ca' = 0$, les quantités $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont différentes; car de l'égalité $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ on conclurait $ac' = ca'$, et $ac' - ca' = 0$. Les deux équations sont donc contradictoires.

Quand on a à la fois $b = 0$, $b' = 0$ et $ac' - ca' = 0$, la valeur générale de y devient $\frac{0}{0}$. Ce symbole reçoit alors une juste application, puisque, l'inconnue y n'entrant pas dans les équations, la valeur de cette inconnue est tout à fait arbitraire. Mais les équations donnent une valeur déterminée pour x, quoique la valeur générale de cette inconnue soit aussi réduite à $\frac{0}{0}$.

133. Considérons maintenant, comme dans le n° 128, un système de n équations à n inconnues.

Si le dénominateur commun, que nous avons nommé R, est différent de zéro, il faudra que, dans chacun des systèmes de quantités qui ont été désignées par A, A_1..., B, B_1,..., C, C_1,..., etc., il se trouve au moins une de ces quantités qui ne soit pas nulle. Supposons que A_{n-1}, par exemple, ne soit pas zéro; les équations étant celles du n° 128, en multipliant la première par A, la deuxième par A_1, ainsi de suite, et en ajoutant ensuite toutes ces équations, on obtient celle-ci :

$$(9)\quad \begin{cases} A(ax+by+cz\ldots+hw)+A_1(a_1x+b_1y+c_1z\ldots+h_1w)+\ldots \\ +A_{n-2}(a_{n-2}x+b_{n-2}y\ldots)+A_{n-1}(a_{n-1}x+b_{n-1}y+\ldots) \\ =Ak+A_1k_1+A_2k_2\ldots+A_{n-2}k_{n-2}+A_{n-1}k_{n-1}. \end{cases}$$

Il est clair que, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs qui vérifient cette équation et les $n-1$ suivantes:

$$(10)\quad \begin{cases} ax+by+cz\ldots+hw=k, \\ a_1x+b_1y+c_1z\ldots+h_1w=k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}x+b_{n-2}y+c_{n-2}z\ldots+h_{n-2}w=k_{n-2}, \end{cases}$$

ces valeurs vérifieront aussi l'équation

$$a_{n-1}x+b_{n-1}y+c_{n-1}z\ldots+h_{n-1}w=k_{n-1};$$

par conséquent, elles formeront une solution du système proposé.

L'équation (9) est celle qui a conduit, dans le n° 128, à la formule (16); et puisque, par hypothèse, le dénominateur R n'est pas nul, elle donne pour x une valeur finie et déterminée.

En substituant cette valeur de x dans les équations (10), on aura un système de $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues y, z,...., w. Il reste à faire voir que ce système admettra une solution. Or la quantité A_{n-1} ne contient pas la lettre a, et elle ne contient aucune des autres lettres b, c,..., h, avec l'indice $n-1$, puisque chaque terme

de R ne contient qu'une seule fois chacun des indices; par conséquent, si l'on omet les termes en x dans les équations (10), ou si l'on regarde x comme une quantité connue, la fonction R sera pour ces équations A_{n-1}, et sa valeur ne sera pas nulle.

Il suit de là que, si la condition que R ait une valeur différente de zéro suffit pour que ce système admette une solution, et n'en admette qu'une, dans le cas où il n'y a que $n-1$ équations, cette condition est encore suffisante dans le cas de n équations. D'ailleurs on a vu qu'elle est, en effet, suffisante, lorsqu'il n'y a que deux équations; donc elle est également suffisante dans tous les cas.

134. Supposons actuellement qu'on ait $R=0$, et que les numérateurs des valeurs générales des inconnues ne soient pas tous annulés.

Si le numérateur de la valeur de x n'est pas zéro, il faudra encore, d'après la formule (16) (n° 128), qu'une des quantités $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ne soit pas nulle; et en supposant, comme précédemment, que l'on n'ait pas $A_{n-1}=0$, on pourra remplacer le système proposé par celui des équations (10) et (9). Mais dans l'équation (9) le coefficient de x est R, les coefficients des autres inconnues sont nuls identiquement (n° 128), et, par hypothèse, le second nombre n'est pas zéro. Donc, puisque $R=0$, cette équation est impossible. Le système proposé est donc aussi impossible.

135. Examinons, en dernier lieu, le cas où les valeurs générales des inconnues deviennent toutes $\frac{0}{0}$.

Si les quantités $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots, C, C_1, \ldots$, etc., ne sont pas toutes nulles à la fois, en supposant encore que l'on n'ait pas $A_{n-1}=0$, le système proposé pourra toujours être remplacé par le système des équations (9) et (10); mais alors l'équation (9) est une identité; et, pour chaque valeur arbitraire de x, le système (10) a une solution et

n'en a qu'une seule : le système proposé est donc indéterminé. On voit d'ailleurs qu'on ne pourra pas prendre à la fois des valeurs arbitraires pour deux des inconnues.

136. Quand on a en même temps

(11) $A = 0,\ A_1 = 0, \ldots,\ B = 0,\ B_1 = 0, \ldots,\ C = 0,\ C_1 = 0, \ldots,$ etc.,

on ne peut plus faire usage de l'équation (9). Dans ce cas, le système proposé peut être indéterminé ; mais il peut se faire aussi qu'il n'admette aucune solution. On en a un exemple dans les équations à deux inconnues, en supposant $a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$; car les équations sont alors $c = 0$, $c' = 0$. On observe la même particularité dans les équations à trois inconnues (n° 125), quand on suppose

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}, \quad \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'}.$$

Il est facile de voir que ces suppositions réduisent à zéro les multiplicateurs de chacune des quantités a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', dans le dénominateur commun ; et, par suite, les valeurs générales des inconnues deviennent toutes trois $\frac{0}{0}$.

En posant $a' = aq$, $a'' = aq'$, on a $b' = bq$, $c' = cq$, $b'' = bq'$, $c'' = cq'$, et les trois équations sont

$$ax + by + cz = d,$$
$$q\,(ax + by + cz) = d',$$
$$q'\,(ax + by + cz) = d''.$$

Si, outre les relations ci-dessus, on a $d' = dq$, $d'' = dq'$, les trois équations se réduisent à une, et l'on peut donner des valeurs arbitraires à deux des inconnues. Mais, si l'on n'a pas à la fois les deux dernières égalités, les équations proposées sont incompatibles.

On ne peut pas admettre que, dans le cas où l'on a les relations (11), le système proposé soit possible et déterminé ; car, s'il en était ainsi, il faudrait qu'en omettant une des

équations, les $n-1$ autres pussent donner pour $n-1$ inconnues, des valeurs déterminées en fonctions de la $n^{ième}$ inconnue; de sorte que, si l'on remplaçait d'abord cette inconnue par la valeur qu'elle devrait recevoir par rapport au système proposé, les $n-1$ équations formeraient un système qui aurait une solution, et n'en aurait qu'une seule. Or, si l'on considère le système (10), en y choisissant $n-1$ inconnues quelconques, la fonction R, par rapport à ces équations et à ces inconnues, sera l'une des quantités A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, etc., et sa valeur sera nulle. Donc, si la condition $R=0$ ne peut être remplie sans qu'il y ait indétermination ou impossibilité, dans le cas de $n-1$ équations, cette condition produit le même effet lorsqu'il y a n équations. D'ailleurs on a vu que, pour deux équations, il y a toujours impossibilité ou indétermination quand $ab'-ba'=0$. Il y a donc aussi impossibilité ou indétermination quand on a $R=0$, quel que soit le nombre des inconnues.

Pour juger si le système est impossible ou indéterminé, et pour savoir, dans le cas de l'indétermination, quelles sont les inconnues auxquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires, et quelles sont celles dont les valeurs sont déterminées, s'il y en a, il faut appliquer directement aux équations proposées les procédés d'élimination.

137. Il peut être bon de remarquer le cas où, dans les équations à trois inconnues, les seconds membres d, d', d'' sont nuls. Les équations sont alors

$$ax+by+cz=0,\quad a'x+b'y+c'z=0,\quad a''x+b''y+c''z=0.$$

Les numérateurs des valeurs des inconnues sont nuls, et si le dénominateur commun, que nous avons désigné par D, n'est pas nul, les équations ne peuvent être satisfaites que par $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Si l'on a $D=0$, les valeurs des inconnues sont $\frac{0}{0}$. En

résolvant les deux premières équations par rapport à x et y, on trouve

$$x = \frac{(bc' - cb')z}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{(ca' - ac')z}{ab' - ba'};$$

et la substitution de ces valeurs dans la troisième équation conduit à une équation identique, en vertu de l'hypothèse $D = 0$.

On voit que, si les quantités $ab' - ba'$, $bc' - cb'$ et $ca' - ac'$ sont différentes de zéro, les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ ont des valeurs finies et déterminées, et l'on peut prendre arbitrairement la valeur de l'une des trois inconnues. Quand une des trois quantités $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ est nulle, une des inconnues x, y ou z ne peut recevoir que la valeur zéro.

Les conclusions sont semblables, en considérant la première équation et la troisième, si l'on n'a pas $ab'' - ba'' = 0$, $ca'' - ac'' = 0$, $bc'' - cb'' = 0$; et quand les trois dernières différences sont nulles, en même temps que les précédentes, ce qui revient aux égalités

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}, \quad \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c},$$

les trois équations n'en font qu'une.

De la discussion des problèmes.

138. Quand on a représenté les données d'un problème par des lettres, on doit chercher à reconnaître, d'après les formules auxquelles on parvient, les différentes particularités que le problème peut offrir. Pour n'en omettre aucune, il faut examiner si les valeurs des inconnues peuvent devenir infinies ou indéterminées; quels sont, selon les différentes suppositions, les signes de ces valeurs, et de quelle manière elles s'appliquent à la question. Les deux

exemples suivants montreront comment on doit se diriger dans ces discussions.

139. 1er Problème. — *Deux courriers sont en marche depuis un temps indéfini, et suivent la même route, dans le même sens* XABY. *L'un d'eux parcourt* v *kilomètres en une heure, l'autre en parcourt* v'. *L'instant où le premier parvient en* A *précède de* h *heures celui où l'autre parvient en* B. *La distance* AB *est de* a *kilomètres. En quel endroit de la route les deux courriers se rencontrent-ils?* (Nous nommerons C le courrier dont la vitesse est v, et C' celui dont la vitesse est v'.)

Solution. Si l'on connaissait le nombre d'heures qui s'écoulent depuis l'instant où le courrier C parvient en A, jusqu'à l'instant de la rencontre, il serait facile de trouver le lieu de la rencontre. Nommons x ce nombre d'heures, et supposons que les deux courriers se rencontrent au point R. La distance AR, ayant été parcourue par le courrier C en x heures, sera exprimée par vx. La distance BR aura été parcourue par le courrier C' en $x-h$ heures, puisque ce courrier ne parvient en B que h heures après l'instant à partir duquel on compte le temps x; cette distance sera donc $v'(x-h)$. Par conséquent, l'équation du problème est

$$(1) \qquad vx = v'(x-h) + a,$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad x = \frac{a - hv'}{v - v'}.$$

Discussion. Si l'on suppose $v > v'$, et en même temps $a > hv'$, la valeur de x est positive; ainsi, dans ce cas, les deux courriers se rencontrent après l'arrivée du courrier C en A, comme on l'a supposé en mettant le problème en équation. C'est, en effet, ce que l'on reconnaît par l'exa-

men des conditions de la question; car le produit hv' exprime la distance que le courrier C′ doit encore parcourir pour arriver au point B, à partir du moment où le courrier C parvient en A: ainsi, de ce que l'on a $hv' < a$, il résulte qu'au moment où le courrier C atteint le point A, l'autre a dépassé ce point; et puisque la vitesse du second est moindre que celle du premier, celui-ci doit atteindre l'autre au bout d'un certain temps.

Lorsque l'on a $v > v'$, $a < hv'$, la valeur de x est négative; pour qu'elle changeât de signe, il faudrait qu'au lieu de l'équation (1) on eût

$$vx = v'(x + h) - a. \tag{3}$$

Cette dernière équation fait voir que les distances des points A et B au point de rencontre auront été parcourues par les deux courriers dans les temps x et $x + h$, et que la première distance sera moindre que la seconde de l'intervalle AB; ce qui exige que le point de rencontre soit situé en deçà de A. L'énoncé du problème conduit directement à cette conclusion; car, de ce que l'on a $a < hv'$, il résulte que, lorsque le courrier C atteint le point A, l'autre est en deçà de ce point, et puisque $v > v'$, le second courrier restera toujours en arrière du premier; mais, s'ils sont partis de deux points assez éloignés pour que celui dont la vitesse est la plus grande ait été d'abord en arrière, ils se seront rencontrés en un point en deçà de A, tel que R′. En mettant le problème en équation d'après cette supposition, on parvient à l'équation (3), et l'on en déduit une valeur de x qui ne diffère que par le signe de celle qui est donnée par l'équation (1).

On voit que les valeurs négatives de l'inconnue résolvent exactement le problème, pourvu qu'on donne au signe — cette interprétation, que l'instant de la rencontre est antérieur à celui que l'on a choisi pour origine du temps.

Quand on a $v = v'$, et $a > hv'$ ou $a < hv'$, la valeur de x est infinie; ce qui indique que les deux courriers ne se rencontrent pas. C'est aussi ce que l'on voit par l'énoncé; car, d'après ces suppositions, quand le courrier C parvient en A, l'autre est en deçà ou au delà de ce point, et comme ils ont la même vitesse, ils conservent toujours entre eux la même distance.

Si l'on suppose en même temps $v = v'$, $a = hv'$, on trouve $x = \frac{0}{0}$. On reconnaît en effet que, dans ce cas, la valeur de x est indéterminée; car les deux courriers se trouvent en même temps au point A, et comme leurs vitesses sont égales, ils ne se quittent pas.

La supposition $v < v'$ donnerait lieu à des observations tout à fait semblables à celles que l'on vient de faire, par rapport au cas où l'on a $v > v'$, et il est inutile de s'y arrêter.

Remarque. Si l'on supposait que le courrier C n'arrive au point A que h heures après l'instant où l'autre parvient en B, la quantité h prendrait, dans l'équation et dans la formule, des signes contraires à ceux dont elle est affectée. Ainsi, dans cette supposition, le temps inconnu x pourrait encore être déterminé par la formule (2), pourvu que l'on convînt de regarder la valeur de h comme étant négative.

Si le courrier C′ part d'un point situé dans la direction BY et vient à la rencontre de l'autre, en supposant toujours que l'arrivée de celui-ci au point A précède de h heures l'arrivée en B du courrier C′, on parviendra à une équation qui ne différera de l'équation (1) que par le signe du terme $v'(x - h)$. Ainsi, dans ce cas, le temps inconnu x pourra encore être déterminé au moyen de la formule (2), pourvu que l'on convienne de regarder la vitesse v' comme étant négative.

140. 2e Problème. — *Partager chacun des nombres* a *et* b *en deux parties, de manière que l'une des parties de* a

contienne m *fois l'une des parties de* b, *et l'autre partie de* b *contienne aussi* m *fois l'autre partie de* a (*).

Solution. Représentons par x la première partie de a, et par y la première partie de b; les deux autres parties seront $a-x$ et $b-y$, et l'on devra avoir les deux équations

$$x = my, \quad b - y = m(a - x).$$

On tire de ces équations

$$x = \frac{m(ma-b)}{m^2-1}, \quad y = \frac{ma-b}{m^2-1};$$

par suite, on a

$$a - x = \frac{mb-a}{m^2-1}, \quad b - y = \frac{m(mb-a)}{m^2-1}.$$

Discussion. Si les deux nombres a et b sont inégaux, on pourra supposer que a est le plus grand de ces nombres; et si le nombre m est différent de l'unité, il sera permis de supposer $m > 1$; car tout ce que l'on dira dans ce cas, pour x et $a-x$, s'appliquerait, dans le cas contraire, à y et $b-y$. Soient donc $a > b$ et $m > 1$. Les valeurs de x et de y sont positives; mais, pour que les valeurs des deux autres parties $a-x$ et $b-y$ soient aussi positives, il faut que l'on ait $mb > a$, ou $m > \frac{a}{b}$. Si l'on a au contraire $m < \frac{a}{b}$, les valeurs de $a-x$ et de $b-y$ sont négatives, ce qui fait voir que les valeurs de x et de y ne sont plus des parties de a et de b, mais des quantités respectivement plus grandes que ces nombres. Dans ce cas, le problème ne peut pas être résolu dans le sens de l'énoncé; mais les nombres qu'on

(*) On peut remplacer l'énoncé de ce problème par le suivant, qui conduit aux mêmes équations : *Partager chacun des côtés d'un rectangle donné, dont les dimensions sont* a *et* b, *en deux parties telles, que si l'on joint les points de division, on obtienne un second rectangle dont les côtés adjacents soient dans le rapport de* m *à* 1. Au moyen de ce changement, l'interprétation des différentes circonstances que présentent les formules devient plus sensible.

déduit des formules ci-dessus formeraient une solution, si l'on modifiait cet énoncé dans le sens des équations ci-après :

$$x = my, \quad y - b = m(x - a).$$

Quand on suppose $a = b$, les formules deviennent

$$x = \frac{ma}{m+1}, \quad y = \frac{a}{m+1}, \quad a - x = \frac{a}{m+1}, \quad b - y = \frac{ma}{m+1};$$

dans ce cas, la question admet toujours une solution. Si l'on suppose en outre $m = 1$, les quatre parties sont chacune égale à $\frac{1}{2}a$.

En se reportant aux premières formules, on voit que, si l'on a $m = 1$ et $a > b$, les valeurs des quatre parties sont infinies; d'où il suit que le problème est impossible; et si l'on suppose dans les mêmes formules $m = 1$ et $a = b$, les valeurs des inconnues se réduisent au symbole $\frac{0}{0}$. Quand on introduit les dernières suppositions dans les équations, elles deviennent l'une et l'autre $x = y$; ainsi la question est indéterminée.

Il est à remarquer que cette indétermination n'est plus indiquée par les formules quand on les a simplifiées, après avoir supposé $b = a$, en supprimant le facteur $m - 1$ dans les deux termes de chaque fraction.

141. Dans les exemples qui précèdent, les suppositions qui rendent les inconnues infinies produisent une impossibilité dans la question; mais il n'en est pas toujours ainsi. Quand une formule donne une valeur infinie pour une inconnue, par suite de certaines valeurs particulières attribuées aux données de la question, ce résultat exprime que, si les données s'approchaient indéfiniment de ces valeurs particulières, l'inconnue croîtrait de manière à surpasser toute grandeur assignable. Or, dans les questions dont la solution dépend d'une construction géométrique, il arrive souvent que ce dernier état des accroissements de l'incon-

nue, qui est l'infini, correspond à une construction déterminée. Dans ce cas, la valeur infinie est une solution de la question (*).

Observations sur les expressions indéterminées, et sur les valeurs infinies.

142. Les expressions algébriques peuvent devenir indéterminées en prenant d'autres formes que $\frac{0}{0}$. Considérons, par exemple, les deux expressions

$$\frac{A}{B} \times C, \quad \frac{A}{B} : \frac{D}{C},$$

en représentant par A, B, C, D, des quantités algébriques quelconques qui ne contiennent pas de dénominateurs. Si l'on établit des suppositions qui annulent les quantités B et C, et pour lesquelles A et D aient des valeurs finies différentes de zéro, les expressions ci-dessus deviendront

$$\infty \times 0 \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Pour interpréter ces nouveaux symboles, il suffit de remarquer que l'on peut remplacer les expressions proposées par les suivantes :

$$\frac{A \times C}{B}, \quad \frac{A \times C}{B \times D}.$$

Quand on suppose dans celles-ci $B = 0$ et $C = 0$, elles de-

(*) Considérons, par exemple, cette question : *Trouver, sur le prolongement de la ligne qui joint les centres des deux cercles, le point où passe la tangente commune aux deux cercles.* On verra aisément que, si l'on représente par a la distance des centres, par r et r' les rayons des deux cercles, et par d la distance du point cherché au centre du premier cercle, on a $d = \frac{ar}{r - r'}$. Quand $r = r'$, on trouve $d = \infty$; ce résultat est la solution qui convient à la question, car on doit en conclure que la tangente commune ne rencontre pas la ligne des centres, c'est-à-dire qu'elle lui est parallèle.

viennent l'une et l'autre $\frac{0}{0}$. On doit donc regarder les deux expressions $\infty \times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$ comme équivalentes à $\frac{0}{0}$.

143. Il y a une observation importante à faire au sujet du symbole $\frac{0}{0}$.

Supposons que l'on fasse décroître les deux termes d'une fraction, de manière qu'ils deviennent tous deux moindres que toute quantité donnée. Si les deux termes sont entièrement indépendants l'un de l'autre, on pourra leur attribuer des valeurs aussi voisines qu'on le voudra de zéro, et telles que leur rapport, qui est la valeur de la fraction, soit égal à telle quantité que l'on voudra; en conséquence, le symbole $\frac{0}{0}$, auquel on parviendra quand les deux termes auront atteint la limite de leur décroissement, exprimera une complète indétermination. Mais il arrive souvent que les deux termes d'une fraction sont liés entre eux, de manière qu'à une valeur très-petite de l'un il corresponde toujours une valeur très-petite de l'autre, et que, lorsqu'ils convergent tous deux vers zéro, leur rapport converge vers une limite déterminée qu'il n'atteint qu'au moment où, les deux termes devenant nuls, la fraction prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Ce dernier cas a lieu toutes les fois qu'une fraction est réduite à $\frac{0}{0}$ par l'anéantissement d'un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Soit, par exemple,

$$\frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}.$$

Cette fraction se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose $x = a$; mais en divisant les deux termes par $x - a$, on obtient l'expression plus simple

$$\frac{x + a}{x^2 + ax + a^2}.$$

Si l'on donne à x une valeur très-voisine de a, quelque petite que soit la différence $x - a$, si elle n'est pas nulle,

la seconde fraction sera toujours équivalente à la première. Or, la valeur de x étant très-peu différente de a, la valeur de la seconde fraction différera très-peu de $\frac{2a}{3a^2}$. Il suit de là que lorsqu'on attribue à x des valeurs de plus en plus voisines de a, les valeurs de la fraction $\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$ convergent vers une limite déterminée qui est $\frac{2a}{3a^2}$, ou, en réduisant, $\frac{2}{3a}$.

Soient encore les deux fractions

$$\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}, \qquad \frac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}.$$

Elles deviennent toutes deux $\frac{0}{0}$ quand on suppose $x=a$; mais en supprimant d'abord le facteur $x-a$, qui est commun aux deux termes, et faisant ensuite $x=a$, on trouve pour la première fraction zéro, et pour l'autre l'infini.

144. On a vu, dans la discussion des équations du premier degré à deux inconnues, que, lorsque l'on a $b=0$, $b'=0$, $ac'-ca'=0$, les équations donnent pour x une valeur déterminée $\frac{c}{a}$, tandis que la formule générale $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ donne le symbole $\frac{0}{0}$ (n° 132). Si l'on introduit d'abord dans la formule la supposition $ac'-ca'=0$, en remplaçant a' par $\frac{ac'}{c}$, il vient $x=\frac{c(cb'-bc')}{a(cb'-bc')}$; en supprimant alors dans les deux termes le facteur $cb'-bc'$, on trouve $x=\frac{c}{a}$.

On a vu aussi (n° 136) que le cas où les formules relatives aux équations du premier degré à trois inconnues donnent le symbole $\frac{0}{0}$, sans qu'il y ait indétermination dans

les équations, est celui où l'on a

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c},\ \frac{a''}{a}=\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c},\ \frac{d'}{d}>\text{ou}<\frac{a'}{a},\ \frac{d''}{d}>\text{ou}<\frac{a''}{a}.$$

Reprenons la valeur de l'une des inconnues, celle de z par exemple (n° 125); elle peut être écrite ainsi :

$$z=\frac{(ab'-ba')d''+(ba''-ab'')d'+(a'b''-b'a'')d}{(ab'-ba')c''+(ba''-ab'')c'+(a'b''-b'a'')c}.$$

En supposant d'abord $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$, d'où $a'=\frac{ab'}{b}$, on obtient

$$z=\frac{(ba''-ab'')(bd'-db')}{(ba''-ab'')(bc'-cb')};$$

en supprimant alors dans les deux termes le facteur $ba''-ab''$, et supposant ensuite $bc'-cb'=0$, on trouve $z=\infty$. En opérant de la même manière sur les valeurs des deux autres inconnues x et y, on trouve pareillement $x=\infty$, $y=\infty$.

145. Puisque les symboles $\infty\times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont équivalents à $\frac{0}{0}$, les expressions qui se réduisent à ces symboles peuvent aussi conserver, dans certains cas, une signification déterminée.

On parvient d'ailleurs à cette conclusion, en observant que $\infty\times 0$ exprime la limite du produit de deux quantités, dont l'une décroît indéfiniment, tandis que l'autre, au contraire, augmente indéfiniment; et $\frac{\infty}{\infty}$ exprime la limite des valeurs d'une fraction dont les deux termes augmentent indéfiniment. On conçoit que ces limites pourront être des quantités déterminées, si les quantités variables qui doivent converger vers zéro ou vers l'infini ne peuvent varier que suivant une certaine loi; tandis qu'elles seront, au contraire, indéterminées, quand ces quantités pourront varier sans rester soumises à aucune loi.

Enfin, on doit joindre à ces expressions, comme présentant un caractère analogue, l'expression $\infty - \infty$, qui indique la limite de la différence de deux quantités dont les valeurs augmentent indéfiniment. Il faut seulement remarquer que la différence de deux quantités qui croissent indéfiniment n'est susceptible d'une limite finie qu'autant que les deux quantités, en croissant, ne cessent pas d'être toutes deux positives, ou toutes deux négatives : car, si l'on avait à soustraire une quantité négative de plus en plus grande d'une quantité positive de plus en plus grande, la différence deviendrait de plus en plus grande; et quand les deux quantités seraient infinies, leur différence serait elle-même infinie.

146. Quand le dénominateur d'une fraction algébrique prend des valeurs de plus en plus grandes, sans que le numérateur augmente, la fraction prend des valeurs de plus en plus petites; de telle sorte que, si la valeur du dénominateur augmente jusqu'à l'infini, celle de la fraction décroît jusqu'à zéro. Ainsi, en désignant par m une quantité finie quelconque, on a $\frac{m}{\infty} = 0$.

147. Lorsqu'une fraction algébrique est susceptible de prendre successivement des valeurs qui croissent jusqu'à l'infini, il peut arriver qu'elle ne tende vers ce dernier état que par des valeurs positives, ou par des valeurs négatives, ou qu'elle s'en approche indifféremment par des valeurs positives et par des valeurs négatives. C'est pourquoi les valeurs infinies peuvent être regardées, dans certains cas, comme positives, dans d'autres comme négatives; et dans d'autres encore, elles peuvent être regardées comme affectées indifféremment du signe + ou du signe —.

Prenons, par exemple, la fraction

$$\frac{m}{a - x};$$

supposons que m et a représentent des quantités constantes et positives, et concevons que l'on fasse croître x à partir de zéro. Tant que la valeur de x sera moindre que a, la fraction aura une valeur positive qui deviendra de plus en plus grande; quand on fera $x = a$, la valeur de la fraction sera infinie; et quand x croîtra au delà de a, les valeurs de la fraction seront négatives et iront en décroissant. La valeur infinie produite par la supposition $x = a$ pourra donc être indifféremment regardée comme positive ou comme négative.

Si, au lieu de la fraction ci-dessus, on prend la suivante,

$$\frac{m}{(a-x)^2},$$

on obtiendra toujours une valeur positive, soit que l'on donne à x une valeur plus petite que a, ou une valeur plus grande. En conséquence, la valeur infinie produite par $x = a$ sera regardée comme positive.

Si, dans la dernière fraction, m désignait une quantité négative, la supposition $x = a$ donnerait une valeur infinie qui serait regardée comme négative.

Pour exprimer l'ambiguïté de la valeur infinie que prend la première fraction quand on fait $x = a$, on représente cette valeur par $\pm\infty$; tandis que la valeur infinie que prend la seconde fraction est représentée par $+\infty$ quand m est une quantité positive, et par $-\infty$ quand m est une quantité négative.

Principes sur les inégalités.

148. On a fréquemment à considérer des inégalités auxquelles il faut appliquer des transformations semblables à celles qui servent à résoudre les équations du premier degré.

Pour expliquer d'une manière générale les principes sur

lesquels reposent ces transformations, nous commencerons par faire remarquer que, de l'inégalité $a > b$ il résulte toujours $a - b > 0$, qui exprime que la différence $a - b$ est positive (n° 29); et réciproquement, lorsque la seconde condition est satisfaite, la première l'est également. En effet, si a et b sont des quantités positives, il est clair que les deux conditions ont lieu en même temps; si b est une quantité négative, et a une quantité positive, on a $a > b$, et l'on a aussi $a - b > 0$, puisque la différence $a - b$ est la somme de deux quantités positives. Si a est une quantité négative, il faut, pour chacune des deux conditions, que b soit aussi une quantité négative, et que sa valeur absolue soit plus grande que celle de a. Ces deux conditions sont donc toujours équivalentes.

149. *Une inégalité n'est pas troublée quand on ajoute une même quantité aux deux membres, ou quand on retranche la même quantité des deux membres.* Ainsi l'inégalité $a > b$ entraîne toujours la suivante $a \pm c > b \pm c$; car, la différence $a - b$ étant positive, la différence $(a \pm c) - (b \pm c)$ est aussi positive.

On conclut de ce principe, qu'*on peut transporter un terme d'une inégalité d'un membre dans l'autre, en l'écrivant dans cet autre membre avec le signe contraire à celui dont il était affecté.*

Lorsqu'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, il faut renverser le signe d'inégalité; car cela revient à faire passer tous les termes du premier membre dans le second, et ceux du second membre dans le premier.

On ne trouble point une égalité en multipliant ou en divisant les deux membres par une quantité positive. Ainsi, m désignant une quantité positive, l'inégalité $a > b$ entraîne les suivantes $ma > mb$, $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$; car, la différence $a - b$ étant positive, le produit et le quotient de cette

différence par m, ou les quantités $ma - mb$ et $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$, sont aussi positives.

Quand on multiplie ou l'on divise les deux membres d'une inégalité par une quantité négative, il faut renverser le signe d'inégalité; car cela revient à multiplier les deux membres par la valeur absolue de cette quantité, et à changer ensuite les signes de tous les termes.

150. Lorsqu'une quantité inconnue n'entre dans une inégalité qu'à la première puissance, on peut *dégager* cette quantité, c'est-à-dire que l'on peut ramener l'inégalité à une forme telle, que cette quantité soit seule dans un membre, sans autre coefficient que l'unité. On suit pour cela la même marche que pour résoudre une équation du premier degré.

Considérons, par exemple, l'inégalité $3x - 2 > \frac{5}{2}x - \frac{4}{5}$. On chasse les dénominateurs, en multipliant les deux membres par 10; il vient

$$30x - 20 > 25x - 8.$$

En réunissant les termes en x dans le premier membre, et les termes connus dans le second, on obtient

$$30x - 25x > 20 - 8, \quad \text{ou} \quad 5x > 12.$$

Enfin, en divisant les deux membres de la dernière inégalité par 5, on trouve qu'elle se réduit à $x > \frac{12}{5}$.

En exécutant des transformations semblables sur l'inégalité $\frac{7}{6} - \frac{5}{4}x < 8 - 2x$, on en déduit $x < \frac{82}{9}$.

Si l'on a l'inégalité $43 - 5x < 10 - 8x$, on en conclura de la même manière $x < -11$.

Dans le premier exemple, le nombre $\frac{12}{5}$, ou $2\frac{2}{5}$, est la *limite inférieure* des valeurs de x.

Dans le deuxième exemple, le nombre $\frac{82}{9}$, ou $9\frac{1}{9}$, est la *limite supérieure* des valeurs de x.

Dans le troisième exemple, les valeurs de x ne peuvent être que des quantités négatives numériquement plus grandes que 11.

Si l'inconnue x devait vérifier à la fois les deux premières inégalités, elle ne pourrait recevoir que les valeurs comprises entre $2\frac{2}{5}$ et $9\frac{1}{9}$. Si cette inconnue devait vérifier à la fois la deuxième inégalité et la troisième, il suffirait qu'elle vérifiât la condition $x < -11$. Enfin, il n'y a aucune valeur de x qui puisse vérifier à la fois la première inégalité et la troisième.

151. Considérons actuellement deux inégalités du premier degré entre deux inconnues x et y,

$$3x - 2y > 5, \qquad 5x + 3y > 16.$$

On conclut de ces inégalités

$$x > \frac{5 + 2y}{3}, \qquad x > \frac{16 - 3y}{5}.$$

On pourra attribuer à y une valeur quelconque, et avec chaque valeur arbitraire de y on pourra donner à x toutes les valeurs plus grandes que la plus grande des deux quantités

$$\frac{5 + 2y}{3}, \qquad \frac{16 - 3y}{5}.$$

On conclut aussi des inégalités proposées

$$y < \frac{3x - 5}{2} \qquad y > \frac{16 - 5x}{3};$$

pour que ces deux dernières conditions puissent être remplies, il faut que l'on ait

$$\frac{3x - 5}{2} > \frac{16 - 5x}{3}, \quad \text{d'où l'on conclut} \quad x > \frac{47}{19}.$$

L'inconnue x ne pourra donc recevoir que les valeurs supé-

rieures à $\frac{41}{19}$ ou $2\frac{3}{19}$; et pour chaque valeur de x, on ne devra donner à y que des valeurs comprises entre les deux limites ci-dessus.

152. Lorsque l'on a plusieurs inégalités dans le même sens,

$$a > b, \quad a' > b', \quad a'' > b'', \text{ etc.},$$

on en conclut, en faisant la somme des premiers membres et celle des seconds membres,

$$a + a' + a'' + \text{etc.} > b + b' + b'' + \text{etc.};$$

car les différences $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$, etc., étant toutes positives, leur somme $a - b + a' - b' + a'' - b'' +$ etc., ou $(a + a' + a'' + \text{etc.}) - (b + b' + b'' + \text{etc.})$, est aussi positive.

Si les quantités a, a', a'', etc., b, b', b'', etc., sont toutes positives, les inégalités $a > b$, $a' > b'$, etc., donnent aussi

$$aa'a''\ldots > bb'b''\ldots,$$

car chacun des quotients $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$, etc., est alors un nombre plus grand que 1; par conséquent, le produit de ces quotients, $\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}$, est aussi plus grand que 1.

Cette dernière propriété peut cesser d'avoir lieu lorsque les quantités a, a', etc., b, b', etc., ne sont pas toutes positives. On en a un exemple en prenant les inégalités $8 > 5$ et $-3 > -4$; le produit des premiers membres est -24, celui des seconds membres est -20; ainsi le premier produit est plus petit que le second.

Lorsque les quantités a et b sont positives, si l'on a $a > b$, il en résulte, d'après la proposition précédente, $a^m > b^m$; mais la première inégalité n'entraîne plus la seconde, quand les quantités a et b ne sont pas positives. On a, par exemple, $-3 > -4$ et $(-3)^2 < (-4)^2$.

153. Théorème. *Soient* $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, *etc., plusieurs fractions dont les numérateurs sont des quantités quelconques, et dont les dénominateurs sont tous positifs; la fraction* $\frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots}$ *sera une moyenne entre toutes ces fractions; c'est-à-dire qu'elle aura une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions.*

Démonstration. Supposons que $\frac{a}{b}$ soit la plus petite des fractions proposées, en sorte que l'on ait

$$\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}, \quad \frac{a''}{b''} > \frac{a}{b}, \quad \frac{a'''}{b'''} > \frac{a}{b}, \quad \text{etc.};$$

puisque les dénominateurs sont positifs, on conclura de ces inégalités

$$a' > b' \times \frac{a}{b}, \quad a'' > b'' \times \frac{a}{b}, \quad a''' > b''' \times \frac{a}{b}, \quad \text{etc.}$$

D'après celles-ci et l'égalité $a = b \times \frac{a}{b}$, en faisant la somme des premiers membres et celle des seconds membres, on aura

$$a + a' + a'' + \text{etc.} > (b + b' + b'' + \text{etc.}) \times \frac{a}{b};$$

donc

$$\frac{a + a' + a'' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}} > \frac{a}{b}.$$

On prouverait de la même manière que la fraction $\frac{a + a' + a'' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}}$ est plus petite que la plus grande des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, etc.

CHAPITRE CINQUIÈME.

RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES. CALCUL DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

Notations. — Double valeur de la racine carrée et des racines de degré pair. — Racines imaginaires.

154. On indique les racines par le signe $\sqrt{}$, qu'on nomme radical. Pour la racine du degré m de a, on écrit $\sqrt[m]{a}$; et le nombre m est appelé *indice* ou *exposant* du radical. Dans le cas de la racine carrée on sous-entend l'indice, et on écrit simplement $\sqrt{a}$.

Pour indiquer la racine d'une fraction, il faut faire descendre le signe $\sqrt{}$ au-dessous de la barre qui sépare les deux termes. Ainsi il y a une distinction à faire entre les deux expressions $\sqrt{\frac{341}{27}}$ et $\frac{\sqrt{341}}{27}$; la première indique la racine carrée de la fraction $\frac{341}{27}$, et la seconde indique le quotient de la racine carrée de 341 par 27. Lorsque l'on a à exprimer la racine d'un polynôme, on prolonge la barre du radical sur toute la quantité, ou on emploie des parenthèses. Ainsi, pour la racine carrée de $a^3 - 2a^2b + 4b^3$, par exemple, on écrit $\sqrt{a^3-2a^2b+4b^3}$, ou $\sqrt{(a^3-2a^2b+4b^3)}$.

155. Le carré d'une quantité négative étant positif, *une quantité positive a deux racines carrées, l'une positive, l'autre négative, et dont la valeur absolue est la même.* Le nombre 25, par exemple, qui est le carré de 5, est aussi le carré de -5; ce nombre a donc deux racines carrées, $+5$ et -5. Il est évident que tout nombre plus grand ou plus petit que 5, pris positivement ou négativement, don-

nerait un carré plus grand ou plus petit que 25; par conséquent, le nombre 25 n'admet aucune autre racine carrée que + 5 et — 5.

La racine carrée d'une quantité négative ne peut être exprimée par aucune quantité positive ou négative. Supposons, par exemple, que l'on demande la racine carrée de — 25; la valeur absolue de cette racine ne pourrait être que 5, et le nombre 5, pris avec le signe + ou avec le signe —, a pour carré + 25; il n'existe donc aucune quantité positive ou négative dont le carré soit égal à — 25. On dit, par cette raison, que la racine carrée d'une quantité négative est *imaginaire*. Par opposition, les quantités positives et négatives sont appelées *quantités réelles*.

A l'égard des racines d'un degré quelconque, d'après les règles relatives aux signes dans la multiplication,

Toute racine de degré pair d'une quantité positive peut être indifféremment affectée du signe + ou du signe —.

Une racine de degré impair d'une quantité positive ou négative doit avoir le même signe que cette quantité.

La racine d'un degré pair d'une quantité négative ne peut être exprimée par aucune quantité positive ou négative; elle est imaginaire.

Racines carrées des monômes. — Expressions irrationnelles.

156. Les deux racines carrées d'une quantité ne différant l'une de l'autre que par le signe, nous ne nous occuperons que de l'une d'elles.

D'après la règle de la multiplication des monômes, on obtient le carré d'un monôme en faisant le carré du coefficient et multipliant l'exposant de chaque lettre par 2. Donc, *pour avoir la racine carrée d'un monôme, il faut prendre la racine carrée du coefficient et diviser l'exposant de chaque lettre par* 2. Et, puisque le produit de deux fractions

est égal au produit des numérateurs divisé par le produit des dénominateurs, d'où il suit que le carré d'une fraction se forme en élevant chaque terme au carré, *on obtiendra la racine carrée d'une fraction en extrayant la racine carrée de chacun des deux termes.*

Exemples. $\sqrt{25a^6b^4c^2} = 5a^3b^2c$, $\sqrt{\frac{25a^4b^6}{36c^2d^2}} = \frac{5a^2b^3}{6cd}$.

157. Lorsqu'une racine d'un nombre ne peut être exprimée exactement par aucun nombre entier ou fractionnaire, en sorte qu'on ne peut en obtenir que des valeurs approchées, on dit qu'elle est *incommensurable*, parce qu'elle n'a pas de commune mesure avec l'unité; ou bien encore qu'elle est *irrationnelle*, parce que l'on ne peut pas assigner exactement le rapport ou la raison de cette racine à l'unité. On donne, au contraire, aux nombres entiers ou fractionnaires, la dénomination de quantités *commensurables* ou *rationnelles*. On appelle, de même, *expressions* ou *quantités irrationnelles*, les racines des quantités littérales qui ne peuvent être exprimées sans le secours du signe radical; et l'on nomme, au contraire, *expressions* ou *quantités rationnelles*, toutes les quantités littérales qui ne renferment que les signes des quatre premières opérations.

Calcul des radicaux du second degré.

158. Quand on indique, au moyen du signe radical, la racine carrée d'une quantité A, on n'exprime pas qu'il faut prendre l'une des valeurs de cette racine plutôt que l'autre. La notation $\sqrt{A}$ représente donc indifféremment les deux racines carrées de A. Cependant on suppose ordinairement que, lorsque le radical $\sqrt{A}$ n'est précédé d'aucun signe, ou lorsqu'il est précédé du signe $+$, il ne représente que la racine carrée positive, qu'on nomme la *valeur arithmétique*

de la racine; on exprime la valeur négative de la racine en faisant précéder le radical du signe —; et pour indiquer à la fois les deux valeurs, on place devant le radical le double signe $\pm$. Au moyen de cette convention, on n'a à considérer, dans les explications relatives au calcul des radicaux, que les valeurs absolues de ces expressions.

159. On dit que deux quantités radicales sont *semblables* lorsqu'elles sont formées du même radical multiplié par des facteurs rationnels différents. Ainsi $5\sqrt{2ab}$, $3\sqrt{2ab}$, $3(c+d)\sqrt{2ab}$, sont des quantités radicales semblables.

Pour ajouter ou soustraire des quantités radicales semblables; il faut ajouter ou soustraire les facteurs rationnels, et multiplier le résultat par le radical commun. Ainsi

$$5\sqrt{2ab}+3\sqrt{2ab}=8\sqrt{2ab},$$
$$5\sqrt{2ab}-3\sqrt{2ab}=2\sqrt{2ab},$$
$$3a\sqrt{c}\pm 2b\sqrt{c}=(3a\pm 2b)\sqrt{c}.$$

La somme et la différence de deux quantités radicales dissemblables, comme $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$, $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}$, ne sont pas susceptibles de réduction.

160. *Pour multiplier ou pour diviser l'un par l'autre deux radicaux du second degré, on fait la multiplication ou la division des quantités placées sous le signe radical, et l'on affecte le résultat du radical du même degré.* Ainsi

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

En effet, d'après les principes relatifs à la multiplication, le carré du produit $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est $(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2$ ou $a\times b$; donc $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est la racine carrée de $a\times b$. On démontre de la même manière la seconde égalité.

Au moyen de ces règles, on trouve

$$3a\sqrt{8b}\times\frac{5}{4}\sqrt{2b}=\frac{15a}{4}\sqrt{16b^2}=\frac{15a}{4}\times 4b=15ab;$$

$$3a\sqrt{8b}\ :\ \frac{5}{4}\sqrt{2b}=\frac{12a}{5}\sqrt{4}=\frac{24}{5}a.$$

161. Les puissances de degré pair d'un radical du second degré sont des quantités rationnelles, et les puissances de degré impair sont formées du radical proposé multiplié par des quantités rationnelles; car on trouve, par des multiplications successives,

$$(\sqrt{a})^2=a,\quad (\sqrt{a})^3=a\sqrt{a},$$
$$(\sqrt{a})^4=a^2,\quad (\sqrt{a})^5=a^2\sqrt{a},$$

etc.

162. D'après ce qui a été dit à l'égard de la multiplication des radicaux (n° 160), on a

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}.$$

Donc, *lorsqu'une quantité placée sous un radical du second degré contient des facteurs qui sont des carrés, on peut prendre les racines de ces facteurs et les écrire hors du signe radical, en conservant sous ce signe les autres facteurs.* C'est ce qu'on appelle *faire sortir des facteurs du radical.*

Il résulte aussi de l'égalité ci-dessus que, *lorsqu'un radical est multiplié par des facteurs rationnels, on peut supprimer ces facteurs, en multipliant la quantité qui est sous le radical par leurs carrés.* C'est ce qu'on appelle *faire entrer des facteurs sous le radical.*

Il arrive quelquefois que des quantités radicales qui paraissent dissemblables deviennent semblables quand on simplifie chaque radical, en faisant sortir du radical tous les facteurs qui ont des racines carrées exactes. Cette sim-

Digitized by Google

plification est principalement utile lorsque les quantités radicales doivent être ajoutées ou soustraites. On aura, par exemple,

$$3a\sqrt{8b^2c^2}+\sqrt{2bd^2}=6abc\sqrt{2b}+d\sqrt{2b}=(6abc+d)\sqrt{2b},$$

$$2\sqrt{18}+3\sqrt{50}-7\sqrt{8}=6\sqrt{2}+15\sqrt{2}-14\sqrt{2}=7\sqrt{2}=\sqrt{98}.$$

Dans le second exemple, après les réductions, on fait entrer sous le radical le facteur extérieur 7, parce que, de cette manière, le calcul se réduit à l'extraction d'une racine carrée qu'on peut obtenir immédiatement avec telle approximation que l'on veut.

Pour supprimer, dans une quantité monôme placée sous un radical du second degré, le plus grand nombre possible de facteurs numériques et littéraux, il faut décomposer le coefficient numérique de cette quantité en facteurs premiers; on conserve seulement sous le radical les premières puissances des facteurs premiers et des lettres qui ont des exposants impairs, et l'on écrit hors du radical tous les facteurs premiers et toutes les lettres, avec des exposants égaux aux quotients entiers qu'on obtient en divisant par 2 les exposants de ces quantités sous le radical.

163. Il est souvent utile de changer une fraction dont le dénominateur contient des radicaux, en une autre équivalente dont le dénominateur soit rationnel.

Soit d'abord la fraction $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. On multiplie les deux termes par $\sqrt{5}$; on a ainsi $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. On peut faire entrer sous le radical le facteur 3 et le diviseur 10; par là l'expression proposée est réduite à $\sqrt{0,45}$.

Pour la fraction $\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$, on multiplie les deux

termes par $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$; on trouve ainsi

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}\,(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{35}+3\sqrt{14}.$$

On a pareillement

$$\frac{a}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\frac{a\,(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-(\sqrt{q})^2}=\frac{a\sqrt{p}-a\sqrt{q}}{p-q},$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}=\frac{a\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-\sqrt{q})^2}=\frac{a\sqrt{p}+a\sqrt{q}}{p-q}.$$

Soit encore la fraction

$$\frac{a}{\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{q}}.$$

Si l'on multiplie d'abord les deux termes par $\sqrt{n}+\sqrt{p}-\sqrt{q}$, on obtiendra une fraction équivalente dont le dénominateur sera $(\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-q$, ou $n+p-q+2\sqrt{np}$; et en multipliant les deux termes de cette fraction par $n+p-q-2\sqrt{np}$, on aura une expression dont le dénominateur sera entièrement délivré de radicaux.

On pourra toujours parvenir, par des opérations semblables, à rendre le dénominateur rationnel, quel que soit le nombre de radicaux qu'il contienne; mais, comme il est rare qu'on ait à faire de pareilles transformations dans d'autres cas que ceux que nous avons considérés, nous n'entrerons pas dans les détails nécessaires pour justifier cette proposition.

164. La signification que nous avons attribuée aux radicaux, en supposant qu'un radical qui n'est précédé d'aucun signe, ou qui est précédé du signe $+$, doit être regardé comme une quantité positive, ne s'applique rigoureusement qu'au cas où la quantité placée sous le signe $\sqrt{}$ est numérique. Quand on reste dans la généralité de l'algèbre,

il n'est pas toujours possible de se conformer à cette supposition. Quelquefois il faut ne considérer dans une formule que la valeur d'un radical déterminée par des conditions qui s'appliquent tantôt à la valeur positive, tantôt à la valeur négative, selon les valeurs particulières que l'on attribue aux données de la question. Quelquefois, aussi, les radicaux doivent être pris dans toute leur généralité, quoiqu'on ne les fasse pas précéder du double signe.

Quand on considère seulement les valeurs absolues des radicaux, l'égalité $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ suppose que le facteur a est positif. Il n'en est plus de même lorsque l'on considère les radicaux dans toute leur généralité. Alors, quel que soit le signe de a, les produits des deux valeurs de $\sqrt{b}$ par a donnent deux déterminations égales et de signes contraires, qui sont précisément les deux valeurs de $\sqrt{a^2 b}$. L'égalité $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ est pareillement vraie en considérant les radicaux dans toute leur généralité; car, si l'on représente par a' et b' les valeurs absolues des radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, le premier radical sera équivalent à l'expression $\pm a'$, le second sera équivalent à $\pm b'$; et les quatre produits qu'on pourra former, en combinant de toutes les manières les déterminations des deux radicaux, seront tous renfermés dans l'expression $\pm a'b'$, qui donne précisément les deux valeurs du radical $\sqrt{ab}$. La même observation s'applique à l'égalité $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Des carrés et de la racine carrée des polynômes.

165. On a trouvé, en multipliant le binôme $a + b$ par lui-même (n° 56),

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pour obtenir le carré du trinôme $a + b + c$, on peut

considérer d'abord $(a+b)$ comme un seul terme; on trouve

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

On obtient pareillement, en considérant $a+b+c$ comme un seul terme,

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2.$$

Sans aller plus loin, on peut conclure, par analogie, que *le carré d'un polynôme est formé du carré du premier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième, et ainsi de suite.*

On peut dire aussi que le carré d'un polynôme se compose de la somme des carrés de tous les termes, et du double de la somme des produits deux à deux de ces termes.

166. Supposons maintenant que l'on ait à extraire la racine carrée d'un polynôme.

Le polynôme proposé devant être le produit de deux facteurs égaux à la racine cherchée, il résulte des remarques que l'on a faites sur la composition d'un produit (n° 63), que, si ce polynôme et sa racine étaient ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, le premier terme du polynôme serait le carré du premier terme de la racine. Par conséquent, si l'on ordonne le polynôme proposé, et si l'on extrait la racine carrée du premier terme, on obtiendra le premier terme de la racine. Représentons ce terme par a, désignons par r l'ensemble des autres termes de la racine, et par P le polynôme proposé; on aura

$$P=(a+r)^2=a^2+2ar+r^2.$$

En retranchant du polynôme P le carré du premier terme

a de la racine, et désignant le reste par R, il viendra

$$R = P - a^2 = r \times (2a + r).$$

Puisque les exposants de la lettre principale dans les termes de r sont tous moindres que l'exposant de cette lettre dans a, et puisque le reste R est le produit des deux polynômes r et $2a + r$, le terme de R qui contient la plus haute puissance de la lettre principale doit être égal au produit de $2a$ par le terme de r affecté de la plus haute puissance de la même lettre, lequel est le 2e terme de la racine. Donc, en divisant le 1er terme de R par $2a$, on aura le 2e terme de la racine. Représentons par b ce 2e terme, et désignons par r' la somme de tous les autres termes de la racine; on aura

$$P = (a + b + r')^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ar' + 2br' + r'^2.$$

Si l'on retranche de P la quantité $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui se réduit à retrancher de R la somme $2ab + b^2$, formée du double produit du 1er terme de la racine par le 2e et du carré du 2e terme, on aura, en nommant R′ le reste,

$$R' = P - (a^2 + 2ab + b^2) = R - (2ab + b^2) = r' \times (2a + 2b + r');$$

et en raisonnant comme précédemment, on verra que, pour trouver le 3e terme de la racine, il faudra diviser le 1er terme du reste R′ par $2a$.

D'après ces explications, et en observant qu'elles ne changeraient pas si l'on supposait le polynôme P et sa racine ordonnés par rapport aux puissances croissantes de la lettre principale, on est conduit à la règle suivante :

Pour extraire la racine carrée d'un polynôme P, *ordonnez-le par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une lettre; prenez la racine carrée du* 1er *terme; vous aurez ainsi le* 1er *terme de la racine. Retranchez le carré de ce terme du polynôme* P, *vous obtiendrez un reste* R. *Divisez le* 1er *terme de* R *par le double du* 1er *terme de la racine, vous aurez le* 2e *terme. Retranchez du reste* R *le double produit du* 1er *terme de la racine par le* 2e *et le carré*

du 2e, *vous aurez un second reste* R′. *Divisez le* 1er *terme de ce second reste par le double du* 1er *terme de la racine, vous aurez le* 3e *terme. Retranchez de* R′ *le double de la somme des deux premiers termes multipliés par le* 3e *et le carré du* 3e *terme, vous aurez un troisième reste* R″. *Divisez le* 1er *terme de ce troisième reste par le double du* 1er *terme de la racine, vous aurez le* 4e *terme. Ainsi de suite.* (Il doit être entendu que les restes R, R′, R″, etc., sont ordonnés de la même manière que le polynôme P.)

Le 1er terme du premier reste R est toujours le 2e terme du polynôme P; de sorte que les deux premiers termes de ce polynôme font connaître immédiatement les deux premiers termes de la racine.

Lorsque le polynôme P est un carré, les opérations prescrites par la règle ci-dessus conduisent à un reste nul; car on obtient successivement tous les termes de la racine, et après la soustraction qu'on exécute quand on a obtenu le dernier terme, on a retranché du polynôme proposé toutes les parties qui le composent.

Réciproquement, lorsqu'on parvient à un reste nul, le polynôme proposé est un carré, et celui qu'on a obtenu en est la racine.

167. Les opérations étant les mêmes pour l'extraction de la racine carrée d'un polynôme que pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, on dispose le calcul de la même manière; c'est ce qu'on voit dans l'exemple ci-dessous :

$$
\begin{array}{l|l}
P = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
\quad\quad + 6ax^5 - 9a^2x^4 & \overline{2x^3 - 3ax^2} \\
\hline
R' = \quad\quad + 6a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & \overline{2x^3 - 6ax^2 - 3a^2x} \\
\quad\quad\quad - 6a^2x^4 + 18a^3x^3 - 9a^4x^2 & \overline{2x^3 - 6ax^2 + 6a^2x - a^3} \\
\hline
R'' = \quad\quad\quad - 2a^3x^3 + 6a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & \\
\quad\quad\quad\quad + 2a^3x^3 - 6a^4x^2 + 6a^5x - a^6 & \\
\hline
R''' = \quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Le polynôme proposé étant ordonné, on prend la racine carrée du 1er terme x^6; on a ainsi le 1er terme x^3 de la racine. On retranche du polynôme P le carré de x^3; le reste R est le polynôme P dans lequel on a effacé le terme x^6. On divise le 2e terme, $-6ax^5$, de P, par le double du 1er terme de la racine, c'est-à-dire par $2x^3$: le quotient est $-3ax^2$. On écrit ce quotient à la racine et à côté de $2x^3$; on multiplie $2x^3-3ax^2$ par $-3ax^2$, et on retranche le produit du reste R; ce qui donne le reste R'. On divise le 1er terme $6a^2x^4$ de R' par $2x^3$: le quotient est $+3a^2x$. On place ce quotient à la racine et à côté du double des deux premiers termes; on multiplie $2x^3-6ax^2+3a^2x$ par $+3a^2x$, et l'on retranche le produit du reste R', ce qui donne le 3e reste R''. On divise le 1er terme $-2a^3x^3$ de R'' par $2x^3$: le quotient est $-a^3$. On écrit $-a^3$ à la racine et à côté du double des trois premiers termes; on multiplie $2x^3-6ax^2+6a^2x-a^3$ par $-a^3$, et l'on retranche le produit de R'', ce qui donne le 4e reste R''', qui est zéro. Il suit de là que la racine du polynôme P est $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$.

168. Quand on a ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre principale, on reconnaît que l'opération ne se terminera pas, lorsqu'on est conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de cette lettre est moindre que la moitié de l'exposant de la même lettre dans le dernier terme du polynôme proposé; car, si l'opération se terminait, le dernier terme de ce polynôme serait le carré du dernier terme de la racine. Par conséquent, l'exposant de la lettre principale dans le dernier terme du polynôme serait le double de l'exposant du dernier terme de la racine, ce qui est contre la supposition.

On voit par un raisonnement semblable que, lorsqu'on a ordonné par rapport aux puissances croissantes de la lettre

principale, on reconnaît que l'opération ne se terminera pas, quand on est conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de cette lettre surpasse la moitié de l'exposant de la même lettre dans le dernier terme du polynôme.

169. Lorsqu'un polynôme ne contient aucun dénominateur littéral ou numérique, on est certain que ce polynôme n'est pas un carré, quand on obtient un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le double du premier terme de la racine. On reconnaît aussi qu'un polynôme ordonné par rapport à une lettre n'est pas un carré, lorsque le premier terme et le dernier ne sont pas des carrés. Mais il y a, sur ces cas d'impossibilité, plusieurs observations à faire.

Examinons d'abord le cas où, en cherchant la racine d'un polynôme qui ne contient pas de dénominateurs et dont le premier terme est un carré, on parvient à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le double du premier terme de la racine. Il est clair que, si le polynôme avait une racine exacte, cette racine contiendrait des dénominateurs. Or on conçoit que le carré d'une quantité fractionnaire ne peut pas être une quantité entière; et l'on peut démontrer cette proposition de la même manière que pour les nombres, au moyen des principes sur les facteurs premiers des quantités algébriques, que nous ferons connaître dans la suite. L'opération est donc impossible.

Quand les dénominateurs qu'il faudrait mettre à la racine contiennent la lettre principale, on est assuré que l'opération ne se terminera pas, parce que la racine renfermerait alors des termes dans lesquels les exposants de la lettre principale seraient moindres que la moitié du plus faible exposant de cette lettre dans le polynôme proposé.

170. Supposons maintenant que le premier terme du

polynôme ne soit pas un carré. Il est clair que le polynôme n'est pas le carré d'une quantité rationnelle ; mais, si l'on effectue l'opération, en exprimant la racine carrée du premier terme avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (n° 162); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra, après avoir soustrait ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable, et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$, c'est-à-dire le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples ; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+\text{etc.}$, et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme $ax^2 + bx + c$. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx + c$ le produit de $2x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c - \frac{b^2}{4a}$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'est donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

CHAPITRE SIXIÈME.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

Résolution des équations du second degré à une inconnue.

171. Une équation du second degré à une inconnue peut avoir trois sortes de termes : des termes qui contiennent le carré de l'inconnue, d'autres dans lesquels l'inconnue n'est qu'à la première puissance, et des termes connus. Par conséquent, si l'on met dans le premier membre les termes en x^2 et en x, et dans le second membre les termes connus, après les réductions, on aura ramené l'équation à cette forme,

$$ax^2 + bx = c, \tag{1}$$

a, b, c étant des quantités connues numériques ou littérales.

172. Lorsqu'il ne se trouve pas de terme contenant la première puissance de l'inconnue, on a $b = 0$, et l'équation est

$$ax^2 = c. \tag{2}$$

En divisant les deux membres par a, on conclut

$$x^2 = \frac{c}{a}. \tag{3}$$

Puisque le carré de l'inconnue x doit être égal à la quantité connue $\frac{c}{a}$, les valeurs de x, par lesquelles l'équation est vérifiée, sont les racines carrées de $\frac{c}{a}$. Ainsi on a

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}. \tag{4}$$

On voit que l'équation (2) admet deux solutions; et elle n'en admet que deux, puisqu'une quantité a seulement deux racines carrées (n° 155).

Lorsque le quotient de la division de c par a est positif, la formule (4) donne pour x deux valeurs réelles. Quand $\frac{c}{a}$ est une quantité négative, les valeurs de x sont imaginaires (n° 155); l'équation est alors impossible.

173. On pourrait croire que, pour passer de l'équation (3) à la formule (4), on extrait la racine carrée de chaque membre; et que, puisque la racine carrée de x^2 est $-x$ aussi bien que $+x$, on doit écrire, en désignant, pour abréger, le second membre de l'équation par b, $\pm x = \pm\sqrt{b}$. Mais l'inconnue ayant été représentée simplement par la lettre x sans aucun signe ou avec le signe $+$, c'est la valeur de x que l'on doit chercher, et non pas celle de $-x$. D'ailleurs, en combinant de toutes les manières les signes des deux membres dans l'équation $\pm x = \pm\sqrt{b}$, on trouve $+x = +\sqrt{b}$, $+x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$, $-x = -\sqrt{b}$; or les deux dernières équations se déduisent des deux premières, en changeant les signes des deux membres : l'équation $\pm x = \pm\sqrt{b}$ n'exprime donc rien de plus que $x = \pm\sqrt{b}$.

174. Lorsque la quantité connue c est nulle, l'équation (1) devient

$$ax^2 + bx = 0, \quad \text{ou} \quad x(ax + b) = 0.$$

On vérifie cette équation en posant $x = 0$, et en posant $ax + b = 0$, d'où $x = -\frac{b}{a}$.

175. Considérons à présent l'équation complète

$$ax^2 + bx = c.$$

En divisant les deux membres par le coefficient de x^2, et

posant, pour abréger, $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, on obtient l'équation plus simple

$$x^2 + px = q. \tag{5}$$

Les deux termes x^2 et px peuvent être considérés comme les deux premiers termes d'un carré. Le premier terme de la racine sera x, et le second terme sera le quotient de px par $2x$ ou $\frac{1}{2}p$. Pour compléter le carré, il faut ajouter à $x^2 + px$ le carré de $\frac{1}{2}p$, ou $\frac{1}{4}p^2$; et en ajoutant aussi cette quantité au second membre, afin que l'équation ne soit pas altérée, on obtient

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2, \quad \text{ou} \quad (x + \tfrac{1}{2}p)^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2.$$

D'après ce qui a été dit dans le n° 172, on aura toutes les solutions de l'équation $(x + \frac{1}{2}p)^2 = q + \frac{1}{4}p^2$ en posant

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2};$$

d'où, en transposant le terme $\frac{1}{2}p$,

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}. \tag{6}$$

Ainsi, *dans toute équation du second degré, l'inconnue admet deux valeurs, et elle n'en admet que deux; et lorsque l'équation est ramenée à la forme* $x^2 + px = q$, *on obtient les deux valeurs de l'inconnue, en prenant la moitié du coefficient de la première puissance de* x *en signe contraire, plus et moins la racine carrée de la somme que l'on forme en ajoutant au carré de la moitié de ce coefficient le terme indépendant de* x.

Cette règle et la formule (6), qui en est l'expression algébrique, s'appliquent aux cas particuliers que nous avons précédemment considérés. Quand on a $p = 0$, la formule (6) devient $x = \pm\sqrt{q}$; quand on a $q = 0$, elle devient $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$, ce qui donne $x = 0$ et $x = -p$.

Les valeurs d'une inconnue déterminées par une équation du second degré sont appelées les *racines* de l'équation.

176. Comme il importe de se familiariser avec la règle ci-dessus, nous allons l'appliquer à quelques exemples.

1er Exemple. $$\frac{4}{x-1}+1=\frac{15}{x+2}.$$

L'inconnue entrant dans les dénominateurs, il faut d'abord les faire disparaître; à cet effet, on multiplie tous les termes par le produit $(x-1)(x+2)$. L'équation devient

$$4x+8+x^2+x-2=15x-15.$$

En transposant les termes et réduisant, on trouve

$$x^2-10x=-21;$$

on en conclut alors

$$x=5\pm\sqrt{25-21};$$

et, en effectuant les calculs indiqués, $x=7$ et $x=3$.

2e Exemple. $$3x^2+2x=56.$$

On divise les deux membres par le coefficient 3 de x^2; il vient

$$x^2+\tfrac{2}{3}x=\tfrac{56}{3},$$

donc

$$x=-\tfrac{1}{3}\pm\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{56}{3}};$$

et, en effectuant les calculs, $x=4$ et $x=-\frac{14}{3}$.

3e Exemple. $$5x-x^2=4.$$

Il faut changer les signes des deux membres, afin que le carré de l'inconnue soit affecté du signe $+$. L'équation devient ainsi

$$x^2-5x=-4;$$

on en déduit

$$x=\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-4},$$

c'est-à-dire

$$x=4 \quad \text{et} \quad x=1.$$

4e Exemple. $7x^2 - 11x = 23.$

En agissant comme dans le 2e exemple, on trouve

$$x = \frac{11}{14} \pm \sqrt{\frac{(11)^2}{(14)^2} + \frac{23}{7}}.$$

Pour effectuer les calculs, il faut d'abord réduire au même dénominateur les deux fractions qui sont sous le radical. Or, 14 étant le produit de 7 par 2, $14^2 = 7^2 \times 2^2$; donc, si l'on multiplie les deux termes de la seconde fraction par 4×7, elle aura le même dénominateur que la première. On trouve ainsi

$$x = \frac{11}{14} \pm \sqrt{\frac{765}{(14)^2}}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{765}}{14}.$$

La racine carrée de 765 ne peut pas s'obtenir exactement; en la calculant à moins d'un centième, on trouve 27,65; il en résulte que les valeurs de x sont, à moins d'un centième, 2,76 et $-1,18$. Si l'on prend, pour la racine carrée de 765, le nombre 27,66, qui est aussi la valeur approchée de cette racine, à moins d'un centième, on aura pour la racine négative de l'équation $-1,19$, et cette valeur sera approchée à moins de $\frac{1}{1400}$, parce que la division de $27,66 - 11$ par 14 se fait sans reste.

5e Exemple. $x^2 - 3x = -4.$

On trouve

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - 4}, \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{7}{4}}.$$

Les racines sont donc imaginaires.

Dans ces divers exemples nous avons appliqué immédiatement la règle du numéro précédent; on pourrait répéter pour chacun d'eux les raisonnements que nous avons employés à l'égard de l'équation générale.

177. Nous allons à présent résoudre quelques problèmes qui conduisent à des équations du second degré.

1er Problème. — *Un marchand vend un objet* 11 *fr., et à ce prix, il gagne autant pour cent que l'objet lui a coûté. Quel était le prix d'achat?*

Soit x le prix que le marchand a payé : le gain qu'il fait sera le quatrième terme de la proportion $100 : x :: x : \frac{x^2}{100}$. On devra donc avoir

$$x + \frac{x^2}{100} = 11.$$

Les racines de cette équation sont $x = 10$ et $x = -110$. D'après la valeur positive $x = 10$, le prix d'achat est 10 fr. En effet, si le marchand gagne 10 pour 100 sur ce prix, il gagnera $\frac{10 \times 10}{100}$ fr., ou 1 fr.; le prix de vente devra donc être 11 fr.

La valeur négative $x = -110$ est étrangère à la question. Si l'on change x en $-x$ dans l'équation, elle devient $\frac{x^2}{100} - x = 11$, et il n'y a aucun changement, dans l'acception des quantités connues ou inconnues, qui puisse conduire à un énoncé conforme à cette nouvelle équation.

2e Problème. — *Deux marchands vendent du drap à des prix différents; le premier vend* 3 *mètres de plus que le second, et les produits qu'ils en tirent forment ensemble* 350 *fr. Le premier marchand dit au second: J'aurais retiré* 125 *fr. du nombre de mètres que vous avez vendus. Le second répond : Et moi, j'aurais retiré* 240 *fr. de ce que vous avez vendu. Combien de mètres chaque marchand a-t-il vendu?*

Désignons par x le nombre de mètres que le second marchand a vendus, le premier en aura vendu $x + 3$. Celui-ci aurait reçu 125 fr. pour x mètres; donc il recevait pour un mètre $\frac{125^{fr}}{x}$: et comme il a vendu $x + 3$ mètres, il a retiré

de cette vente $\frac{125(x+3)}{x}$. Le second marchand aurait reçu 240 fr. pour $x+3$ mètres; donc, pour un mètre, il recevait $\frac{240}{x+3}$; et comme il a vendu x mètres, il a retiré de sa vente $\frac{240x}{x+3}$. On a donc

$$\frac{240x}{x+3}+\frac{125(x+3)}{x}=350.$$

Cette équation devient, par les réductions,

$$x^2-20x+75=0;$$

les racines sont $x=15$ et $x=5$.

Le problème admet donc deux solutions : suivant l'une, le second marchand a vendu 15 mètres, et le premier en a vendu 18; suivant l'autre solution, le second marchand a vendu 5 mètres, et le premier en a vendu 8.

3e Problème. — *On a acheté plusieurs mètres de drap pour 540 fr.; si l'on avait reçu pour la même somme 3 mètres de plus, le mètre aurait coûté 15 fr. de moins. Combien a-t-on acheté de mètres?*

Désignons par x le nombre cherché, le mètre aura coûté $\frac{540^{fr}}{x}$. Si l'acheteur avait eu $x+3$ mètres pour 540 fr., le mètre lui serait revenu à $\frac{540^{fr}}{x+3}$; et puisqu'il eût alors coûté 15 fr. de moins que dans le premier cas, il faut que l'on ait

$$\frac{540}{x+3}=\frac{540}{x}-15.$$

En faisant les réductions, on trouve

$$x^2+3x=108;$$

d'où $$x=9 \quad \text{et} \quad x=-12.$$

La valeur positive $x=9$ satisfait à la question, et il est

aisé de le vérifier. Quant à la valeur négative $x = -12$, elle fait connaître que le nombre 12 serait une solution, si l'on modifiait la question de manière qu'elle se traduisît par l'équation

$$\frac{540}{-x+3} = \frac{540}{-x} - 15, \quad \text{ou} \quad \frac{540}{x-3} = \frac{540}{x} + 15.$$

Il faudrait alors énoncer le problème comme il suit :

On a acheté plusieurs mètres de drap pour 540 fr.; si pour le même prix on avait eu 3 mètres de moins, le mètre aurait coûté 15 fr. de plus. Combien a-t-on eu de mètres?

Dans ce cas, les deux valeurs de x seraient $+12$ et -9.

Examen des diverses particularités des équations du second degré.

178. Lorsqu'une équation du second degré est ramenée à la forme $x^2 + px = q$, les signes de p et q peuvent présenter quatre cas : 1° p et q positifs; 2° p négatif et q positif; 3° p positif et q négatif; 4° p et q négatifs.

Pour mieux distinguer ces différents cas, on peut considérer les quatre équations suivantes :

(1) $x^2 + px = q$, (2) $x^2 - px = q$,

(3) $x^2 + px = -q$, (4) $x^2 - px = -q$;

de cette manière p et q seront toujours des quantités positives. Mais il ne faut pas perdre de vue que chacune de ces équations comprend toutes les équations du second degré, lorsqu'on n'établit aucune restriction à l'égard des signes des quantités p et q.

Les racines de l'équation (1) sont données par la formule

(5) $$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

Pour l'équation (2) il faut changer p en $-p$, ce qui donne

(6) $$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

On obtient les racines de l'équation (3) en changeant dans la formule (5) q en $-q$; de sorte que l'on a

$$(7) \qquad x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Pour l'équation (4), on a, en remplaçant p par $-p$ dans la formule (7),

$$(8) \qquad x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Considérons d'abord les formules (5) et (6). La quantité sous le radical, $\frac{1}{4}p^2 + q$, est positive, puisqu'elle est la somme de deux quantités positives; en outre, la racine carrée de cette somme est plus grande que $\frac{1}{2}p$. Donc les deux valeurs de x sont réelles : l'une d'elles est positive et l'autre est négative.

Dans la formule (7), la quantité sous le radical, $\frac{1}{4}p^2 - q$, peut être positive, nulle ou négative.

Lorsque l'on a $q < \frac{1}{4}p^2$, les deux valeurs de x sont réelles; et comme la racine carrée de $\frac{1}{4}p^2 - q$ est moindre que $\frac{1}{2}p$, ces valeurs sont toutes deux négatives.

On reconnaît, à l'inspection de l'équation (3), qu'elle ne saurait être vérifiée par aucune valeur positive de l'inconnue; car, pour une telle valeur, le premier membre est positif, il ne peut donc pas être égal au second membre, qui est négatif.

Lorsque l'on a $q = \frac{1}{4}p^2$, on n'obtient qu'une seule valeur de x, qui est $-\frac{1}{2}p$. On dit alors que *les deux racines sont égales*. En remplaçant q par $\frac{1}{4}p^2$ dans l'équation (3), on a

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (x + \tfrac{1}{2}p)^2 = 0.$$

Il est clair que, pour que cette équation soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$x + \tfrac{1}{2}p = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\tfrac{1}{2}p.$$

Lorsque l'on a $q > \frac{1}{4}p^2$, le radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ est imaginaire; par conséquent il n'existe aucune valeur réelle de l'inconnue qui puisse vérifier l'équation.

On peut rendre cette conclusion manifeste dans l'équation, en y introduisant la condition $q > \frac{1}{4}p^2$. A cet effet, posons $q = \frac{1}{4}p^2 + r$, r désignant une quantité positive. En substituant cette valeur de q dans l'équation, et faisant passer tous les termes dans le premier membre, il vient

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 + r = 0, \quad \text{ou} \quad (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + r = 0.$$

Pour toute valeur réelle de x, la quantité $(x + \frac{1}{2}p)^2$ est positive, et puisque r est aussi une quantité positive, le premier membre ne peut pas être nul. L'équation ne peut donc être vérifiée par aucune quantité réelle.

Toutes les observations qui viennent d'être faites, à l'égard de l'équation (3) et de la formule (7), s'appliquent à l'équation (4) et à la formule (8), avec cette seule différence que, dans le cas de l'équation (8), lorsque les racines sont réelles, elles sont toutes deux positives. On reconnaît, à l'inspection de l'équation, qu'elle n'a pas de racine négative; car, pour une valeur négative de x, le premier membre est positif.

179. Lorsque l'on réunit les termes connus et les termes inconnus d'une équation du second degré dans un même membre, l'équation se présente sous cette forme

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{9}$$

Pour obtenir les racines de cette équation, il suffit d'appliquer la règle du n° 175, après avoir divisé les deux membres par a, et transporté le terme connu dans le second membre; on trouve ainsi

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

et, en réduisant,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{10}$$

Suivant que l'on a $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont réelles et inégales, égales ou imaginaires. Si a et c ont des signes contraires, la valeur du radical est numériquement plus grande que b; par conséquent, les deux racines ont des signes contraires. Si a et c sont des quantités de même signe, la valeur du radical est numériquement moindre que b; par conséquent, les deux racines ont l'une et l'autre le signe de $-\frac{b}{2a}$.

180. Quand on fait dans la formule (10) $a = 0$, la première racine $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ est réduite au symbole $\frac{0}{0}$, la seconde racine $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ devient $-\frac{2b}{0}$. En introduisant dans l'équation la supposition $a = 0$, on obtient $bx + c = 0$; d'où $x = -\frac{c}{b}$. Il semblerait donc que la formule (10) n'est pas applicable au cas que nous examinons; mais la valeur finie que l'on tire de l'équation peut se déduire de l'expression $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $b + \sqrt{b^2-4ac}$, le numérateur devient $-4ac$; on peut supprimer dans les deux termes le facteur $2a$, il vient $\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$; et en faisant dans cette expression $a = 0$, on obtient $-\frac{c}{b}$.

Quant à la valeur infinie de x, elle fait connaître que, si la quantité a s'approchait de plus en plus de zéro, de manière à pouvoir devenir aussi voisine que l'on voudrait de cette limite, la valeur de x exprimée par $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ augmenterait de plus en plus, et pourrait s'élever au-dessus de toute grandeur assignable.

Cette conclusion peut aussi être tirée directement de l'équation. Pour le faire voir, divisons les deux membres par x^2; il viendra

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0,$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(11) \qquad \frac{1}{x}\left(b + \frac{c}{x}\right) = -a.$$

Il est clair que toute valeur de x, différente de zéro et de l'infini, qui vérifiera l'équation (11), vérifiera aussi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et la réciproque est également vraie.

Cela posé, concevons que l'on fasse croître x positivement ou négativement, de manière que le signe de $b \times \frac{1}{x}$ soit contraire à celui de a; à mesure que x augmentera, $\frac{c}{x}$ diminuera, et quand la valeur de x sera très-grande, le facteur $b + \frac{c}{x}$ aura une valeur très-peu différente de b. En même temps, le facteur $\frac{1}{x}$ aura une très-petite valeur; donc le premier nombre de l'équation (11) aura lui-même une valeur très-petite. Nommons α la valeur que prend le premier membre de l'équation (11) lorsqu'on fait $x = \beta$, la valeur numérique de β pouvant être supposée aussi grande qu'on le voudra. Si l'on conçoit que x, sans changer de signe, passe par tous les états de grandeur entre β et l'infini, le premier membre de l'équation (11) passera par tous les états de grandeur entre α et zéro; de sorte que, si la quantité $-a$ est comprise entre α et zéro, l'équation sera vérifiée par une valeur de x comprise entre β et l'infini. Donc, pour les valeurs de a qui tendent indéfiniment vers la limite

zéro, l'équation admet une racine dont la valeur numérique converge vers l'infini.

On déduit également de l'équation (11) la racine $-\frac{c}{b}$; car lorsqu'on fait dans cette équation $a = 0$, elle est vérifiée en posant $b + \frac{c}{x} = 0$, d'où $x = -\frac{c}{b}$.

181. Lorsque l'on suppose à la fois $a = 0$ et $b = 0$, les deux valeurs de x données par la formule (10) se réduisent l'une et l'autre au symbole $\frac{0}{0}$. D'un autre côté, si l'on introduit dans l'équation les suppositions $a = 0$, $b = 0$, elle devient $c = 0$; par conséquent, elle ne peut être vérifiée par aucune valeur finie de x. On est conduit à la même conclusion, en appliquant à chacune des deux valeurs comprises dans la formule (10) la transformation dont nous avons fait usage dans le numéro précédent. Lorsqu'on fait $a = 0, b = 0$ dans l'expression $\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$, qu'on a trouvée pour la première valeur de x, on obtient $-\frac{2c}{0}$. Les deux valeurs de x ne différant, dans la formule (10), que par le signe du radical, la seconde valeur est équivalente à $\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$; et en faisant dans cette expression $a = 0$, $b = 0$, on obtient aussi $-\frac{2c}{0}$.

182. Lorsque l'on a en même temps $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, l'équation (9) devient une identité; ainsi les valeurs de l'inconnue sont indéterminées. Si l'on introduit ces suppositions dans les expressions générales des valeurs de x transformées comme ci-dessus, elles donnent l'une et l'autre $x = \frac{0}{0}$.

Décomposition du trinôme $x^2 + px + q$ *en facteurs du premier degré. — Propositions sur les racines de l'équation* $x^2 + px + q = 0$.

183. Reprenons l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Afin de compléter dans le premier membre le carré dont les deux premiers termes sont $x^2 + px$, ajoutons à ces termes $\frac{1}{4}p^2$, en retranchant aussi cette quantité, pour ne rien changer à l'équation. Le premier membre deviendra

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + q,$$

ou bien

$$(2) \qquad (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q).$$

En écrivant, au lieu de $\frac{1}{4}p^2 - q$, $(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q})^2$, on aura la différence de deux carrés qui est égale au produit de la somme des deux racines par leur différence, c'est-à-dire

$$(3) \qquad (x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q})(x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}).$$

Il suit de là que l'équation (1) peut être mise sous cette forme,

$$(x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q})(x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}) = 0.$$

Or il est clair que, pour qu'un produit devienne nul, il suffit et il faut qu'un de ses facteurs soit égal à zéro. On obtiendra donc les valeurs de l'inconnue x par les deux équations

$$x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} = 0, \quad x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} = 0;$$

d'où l'on conclut, comme par la méthode qui a été exposée précédemment, les deux solutions

$$x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}, \quad x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{2}p^2 - q}.$$

On conclut, en outre, d'après l'expression (3) du premier membre de l'équation, la proposition suivante :

Le trinôme $x^2 + px + q$ *est le produit de deux facteurs du premier degré par rapport à* x, *qui sont les différences que l'on obtient en retranchant de* x *chacune des racines de l'équation* $x^2 + px + q = 0$.

184. Pour que le trinôme $x^2 + px + q$ puisse être considéré comme la différence de deux carrés, il faut que la quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$ soit positive. Lorsque cette quantité est nulle, on a $q = \frac{1}{4}p^2$; le trinôme est $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$, ou $(x + \frac{1}{2}p)(x + \frac{1}{2}p)$; et la proposition ci-dessus est encore vérifiée, puisque les deux racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont égales l'une et l'autre à $-\frac{1}{2}p$ (n° 178). Lorsque la quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$ est négative, le trinôme $x^2 + px + q$ peut être mis sous la forme $(x + \frac{1}{2}p)^2 + r$, r étant une quantité positive égale à la valeur absolue de $\frac{1}{4}p^2 - q$ (n° 178); si l'on voulait décomposer le trinôme en facteurs, comme on le voit dans l'expression (3), on n'obtiendrait que des facteurs imaginaires.

185. Voici des exemples des diverses transformations des trinômes du second degré.

1er Exemple. $x^2 - 7x + 10$.

En posant l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$, on trouve pour les racines, $x = 5$ et $x = 2$. On en conclut l'égalité

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

2e Exemple. $3x^2 - 5x - 2$.

En égalant ce trinôme à zéro, après l'avoir divisé par 3, on obtient l'équation $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$; les racines de cette équation étant $x = 2$ et $x = -\frac{1}{3}$, on en conclut

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)(x + \tfrac{1}{3}) = (x - 2)(3x + 1).$$

3e Exemple. $x^2 + 5x + 3$.

En opérant comme dans le premier exemple, on trouve

$$x^2 + 5x + 3 = (x + \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{13})(x + \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{13}).$$

4e Exemple. $4x^2 - 4x + 1$.

Les racines de l'équation $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$, on en conclut

$$4x^2 - 4x + 1 = 4(x - \tfrac{1}{2})^2 = (2x - 1)^2.$$

5e Exemple. $x^2 - 5x + 7$.

Les racines de l'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$ sont $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. On a

$$x^2 - 5x + 7 = (x - \tfrac{5}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

On peut aisément vérifier à posteriori les égalités que nous avons obtenues dans ces exemples. On parviendrait aussi, directement, à ces égalités, par des opérations semblables à celles qui ont été exécutées dans le n° 183.

186. Les transformations dont nous venons de nous occuper sont principalement utiles pour reconnaître les signes des valeurs que prend un trinôme du second degré en x, quand on donne différentes valeurs à x. Soit, par exemple, le trinôme $x^2 - 7x + 10$. Il est égal au produit $(x - 2)(x - 5)$. Or ce produit est positif quand les deux facteurs ont le même signe, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de x plus grandes que 5, ou plus petites que 2. Il est, au contraire, négatif, pour les valeurs de x comprises entre 2 et 5, puisque les deux facteurs ont des signes différents. Lorsque le trinôme proposé est un carré, il est positif pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et il peut passer par tous les états de grandeur entre zéro et l'infini. Lorsque le trinôme peut être mis sous la forme $(x + \frac{1}{2}p)^2 + r$, la quantité r étant positive, ce trinôme est encore positif pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et il peut passer par tous les états de grandeur compris entre r et l'infini, mais il ne peut prendre aucune valeur plus petite que r.

187. En nommant x' et x'' les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, on a, par la proposition du n° 183,

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'').$$

En effectuant la multiplication de $x - x'$ par $x - x''$, il vient

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x'';$$

comme cette dernière égalité a lieu quelle que soit la valeur de x, il s'ensuit que l'on doit avoir

$$x' + x'' = -p, \quad x'x'' = q;$$

Ainsi, *dans une équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2 + px + q = 0$, *la somme des deux racines est égale au coefficient de la première puissance de* x *pris en signe contraire, et le produit des racines est égal au terme indépendant de* x.

On est conduit aux mêmes conclusions, en faisant la somme et le produit des expressions des deux racines.

Au moyen de ces propositions, on peut reconnaître, à l'inspection d'une équation du second degré, quels sont les signes de ses racines. Si le terme indépendant de l'inconnue, qui est le produit des racines, est négatif, les racines doivent avoir des signes contraires; et puisque leur somme doit être égale au coefficient de la première puissance de x pris en signe contraire, il faut que la racine qui a la plus grande valeur numérique soit affectée du signe contraire à celui de ce coefficient. Quand le terme indépendant de l'inconnue est positif, si les racines sont réelles, elles doivent avoir le même signe, et leur signe doit être contraire à celui du coefficient de la première puissance de x. Ces conclusions sont celles que l'on a obtenues dans le n° 178.

188. Proposons-nous maintenant cette question : *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à un nombre donné* p, *et dont le produit soit égal à un autre nombre donné* q.

D'après les propositions qui viennent d'être établies, les nombres demandés sont les deux racines de l'équation $x^2 - px + q = 0$.

L'énoncé de la question conduit directement à cette équation ; car si l'on représente l'un des deux nombres par x, l'autre sera $p - x$, et l'on devra avoir

$$x(p - x) = q, \quad \text{d'où} \quad x^2 - px + q = 0.$$

Cette équation donne

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},$$

et l'on en conclut

$$p - x = \tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

On voit que les deux valeurs de x donnent les deux nombres demandés. On pouvait d'ailleurs prévoir qu'il en serait ainsi, puisque x ne désigne pas l'un de ces nombres plutôt que l'autre.

Pour que la question soit possible, il est nécessaire que l'on ait $q < \frac{1}{4}p^2$ ou $q = \frac{1}{4}p^2$. Si l'on avait $q > \frac{1}{4}p^2$, les valeurs de x seraient imaginaires.

Il suit de là que *le plus grand produit qu'on puisse former avec deux nombres qui doivent donner une somme connue* p, *est le carré de la moitié de cette somme.*

La démonstration de ce théorème peut encore être faite comme il suit. En représentant l'un des deux nombres par $\frac{1}{2}p + z$, l'autre sera $\frac{1}{2}p - z$, et le produit de ces nombres sera $\frac{1}{4}p^2 - z^2$; or la quantité $\frac{1}{4}p^2 - z^2$ ne peut jamais être plus grande que $\frac{1}{4}p^2$, et elle n'est égale a $\frac{1}{4}p^2$ que lorsqu'on suppose $z = 0$; dans ce cas, les deux nombres sont égaux l'un et l'autre à $\frac{1}{2}p$. On voit en outre, par cette explication, que si les deux facteurs variaient, le produit varierait et s'approcherait d'autant plus de la limite $\frac{1}{4}p^2$ que la différence des facteurs serait plus petite.

Des équations trinômes réductibles au second degré. — Réduction de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

189. Lorsqu'une équation du quatrième degré ne contient ni la troisième puissance de l'inconnue, ni la première, elle peut être ramenée à cette forme

$$(1) \qquad z^4 + pz^2 + q = 0.$$

En posant $z^2 = y$, on obtient

$$(2) \qquad y^2 + py + q = 0.$$

On tire de cette dernière équation

$$(3) \qquad y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

et, d'après la relation $z^2 = y$, on voit que toutes les racines de l'équation (1) sont comprises dans la formule

$$(4) \qquad z = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}.$$

On obtient ainsi pour l'inconnue z quatre valeurs, qui sont deux à deux égales et de signes contraires.

Quand les valeurs de y données par la formule (3) sont réelles et positives, les quatre valeurs de z sont réelles. Quand une des valeurs de y est négative, l'autre étant positive, deux des valeurs de z sont imaginaires, et les deux autres sont réelles. Enfin, lorsque les deux valeurs de y sont négatives ou imaginaires, les quatre valeurs de z sont imaginaires.

190. Considérons plus généralement l'équation trinôme

$$(5) \qquad z^{2m} + pz^m + q = 0,$$

m désignant un nombre entier positif quelconque.

Si l'on pose $z^m = y$, il vient $y^2 + py + q = 0$; d'où

$$y = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

On vérifiera donc l'équation (5) en posant

$$(6) \qquad z = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}.$$

Quand m est un nombre pair, chaque valeur positive de y donne deux valeurs réelles de z, de signes contraires; les valeurs négatives de y ne donnent aucune valeur réelle de z. Quand m est un nombre impair, chaque valeur réelle de y, positive ou négative, donne une valeur réelle de z, et n'en donne qu'une seule.

191. Lorsque la quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$ n'est pas un carré, on obtient pour les racines de l'équation (1) des expressions de cette forme $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, a et b étant des nombres commensurables, et $\sqrt{b}$ étant incommensurable. Or une semblable expression peut être équivalente à une autre plus simple; car, le carré de $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ étant $m + n \pm 2\sqrt{mn}$, la première quantité est la racine carrée de la seconde; ce qui montre qu'une quantité composée d'une partie rationnelle et d'une partie irrationnelle du second degré, peut avoir une racine carrée exprimée par la somme de deux radicaux du second degré.

Pour reconnaître dans quel cas cette réduction de $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ est possible, et quelle est alors l'expression équivalente, plus simple, posons

$$(7) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

x et y étant des quantités inconnues pour lesquelles il s'agit d'obtenir des valeurs commensurables.

En élevant les deux membres au carré, on obtient

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}, \quad \text{d'où} \quad 2\sqrt{xy} = a - x - y + \sqrt{b};$$

et en élevant une seconde fois au carré,

$$4xy = (a - x - y)^2 + b + 2(a - x - y)\sqrt{b}.$$

Le premier membre de la dernière équation étant une quantité commensurable, puisque x et y doivent être commensurables, il faut que le second membre soit aussi commensurable, ce qui exige que l'on ait

$$a - x - y = 0, \quad \text{d'où} \quad x + y = a.$$

L'équation ci-dessus se réduit alors à

$$4xy = b; \quad \text{d'où} \quad xy = \tfrac{1}{4}b.$$

On conclut de là que les valeurs de x et de y sont les deux racines de l'équation $z^2 - az + \frac{1}{4}b = 0$ (n° 188); donc

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

et par suite, en mettant les valeurs de x et de y dans l'équation (7),

$$(8) \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Il résulte de ce calcul, que la réduction que l'on s'était proposée est possible toutes les fois que la différence $a^2 - b$ est un carré. Quand cette condition n'est pas remplie, la réduction est impossible.

Les valeurs de x et de y ne changeraient pas si, au lieu de $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, on considérait l'expression $\sqrt{a - \sqrt{b}}$, en posant $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$; par conséquent,

$$(9) \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Prenons pour exemple l'expression $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. On a $a = 2$, $b = 3$, $a^2 - b = 1$, et en mettant ces valeurs dans la formule (8), on en conclut

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$. On a $a=11$, $b=6^2\times 2=72$, $a^2-b=49=7^2$, et en mettant ces valeurs dans la formule (9), on obtient

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}.$$

192. Les formules (8) et (9) ne cessent pas de subsister quels que soient les signes des deux quantités a et b. Mais le cas où b est négatif appartient au calcul des radicaux imaginaires, dont nous nous occuperons plus loin. Lorsque a est négatif et b positif, il faut que l'on ait $a^2<b$ pour que l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ soit réelle; dans ce cas, $\sqrt{a^2-b}$ est imaginaire, de sorte que l'équation (7) ne peut pas être vérifiée par des valeurs rationnelles de x et de y.

Élimination d'une inconnue entre deux équations du second degré.

193. Lorsque l'on a un système d'équations composé de plusieurs équations du premier degré et d'une seule équation du second degré, on peut déterminer, au moyen des équations du premier degré, les valeurs de toutes les inconnues, hors une, exprimées en fonction de celle-ci. En substituant ces valeurs dans l'équation du second degré, on en obtient une du même degré, à une seule inconnue, qui fait connaître les valeurs de cette inconnue; et on en conclut les valeurs de toutes les autres inconnues. Le système admet généralement deux solutions, et il ne peut en admettre plus de deux.

194. Une équation du second degré à deux inconnues ne peut contenir que des termes dépendants du carré de l'une des inconnues, du produit de ces inconnues, de leurs premières puissances, et des termes connus; elle est donc de cette forme,

$$(1)\qquad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0.$$

En considérant x, dans cette équation, comme une quantité connue, pour la résoudre par rapport à y, on peut l'écrire ainsi :

$$y^2 + \frac{bx+d}{a}y + \frac{cx^2+ex+f}{a} = 0.$$

On en conclut alors, d'après la règle du n° 175,

$$y = -\frac{bx+d}{2a} \pm \sqrt{\frac{(bx+d)^2}{4a^2} - \frac{cx^2+ex+f}{a}},$$

et en effectuant les calculs indiqués sous le radical,

$$y = -\frac{bx+d \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}}{2a}.$$

Si le trinôme $(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af$ est un carré, les valeurs de y sont rationnelles par rapport à x, et elles ne contiennent cette inconnue qu'au premier degré. Supposons cette condition remplie, et représentons les deux valeurs de y, après toutes les réductions, par $mx+n$ et $px+q$. Suivant la proposition du n° 183, l'équation proposée pourra être mise sous cette forme,

$$(y-mx-n)(y-px-q) = 0.$$

Si, au lieu de résoudre l'équation par rapport à y, on la résolvait par rapport à x, on obtiendrait également pour cette inconnue des valeurs rationnelles; car ces valeurs seraient celles qu'on trouverait en résolvant séparément les deux équations du premier degré

$$y-mx-n=0, \quad y-px-q=0.$$

195. Supposons maintenant que l'on ait une autre équation du second degré, entre les mêmes inconnues x et y, et représentons-la par

(2) $$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0.$$

Si les valeurs de l'une des inconnues, en fonction de l'autre,

qu'on déduira de cette équation, sont rationnelles, en les représentant par $m'x + n'$ et $p'x + q'$, l'équation sera

$$(y - m'x - n')(y - p'x - q') = 0.$$

Dans ce cas, on obtiendra toutes les solutions du système des équations (1) et (2) en résolvant les quatre systèmes d'équations du premier degré :

1°. $y - mx - n = 0, \quad y - m'x - n' = 0;$

2°. $y - mx - n = 0, \quad y - p'x - q' = 0;$

3°. $y - px - q = 0, \quad y - m'x - n' = 0;$

4°. $y - px - q = 0, \quad y - p'x - q' = 0.$

Si une seule des deux équations donne des valeurs de l'une des inconnues rationnelles par rapport à l'autre, en supposant que ce soit la première, on pourra substituer successivement, dans l'autre équation, les deux valeurs $y = mx + n$, $y = px + q$. Chacune de ces substitutions conduira à une équation du second degré en x, par laquelle on obtiendra deux valeurs de x; et de chaque valeur de x, on conclura une valeur correspondante de y.

1er Exemple. $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1, \\ y^2 - x^2 - 6x - 9 = 0. \end{cases}$

Sans effectuer la résolution de ces équations par rapport à l'une des inconnues, on voit que la première est

$$(x - y)^2 - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (x - y + 1)(x - y - 1) = 0.$$

L'autre équation revient à

$$y^2 - (x + 3)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (y - x - 3)(y + x + 3) = 0.$$

On aura donc toutes les solutions du système proposé par quatre systèmes d'équations du premier degré. Deux de ces systèmes présentent des équations incompatibles; les deux autres donnent les deux solutions

$$(x = -2,\ y = -1); \quad (x = -1,\ y = -2).$$

2e Exemple $\begin{cases} y^2 - 3xy + 2x^2 + 2y - 4x = 0, \\ y^2 + x^2 - 3xy + 4 = 0. \end{cases}$

On déduit de la première équation

$$y = 2x \quad \text{et} \quad y = x - 2.$$

En remplaçant y par $2x$, dans la seconde équation, on parvient à l'équation

$$x^2 - 4 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = -2.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y = 4$ et $y = -4$.

En remplaçant, dans la seconde équation, y par $x - 2$, on obtient

$$x^2 - 2x - 8 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 4 \quad \text{et} \quad x = -2.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y = 2$ et $y = -4$.

Le système proposé admet donc trois solutions différentes :

$$(x = 2,\ y = 4); \quad (x = -2,\ y = -4); \quad (x = 4,\ y = 2).$$

196. Quand les valeurs d'une des inconnues x ou y, dans chacune des deux équations, sont irrationnelles, la substitution de ces valeurs dans l'autre équation en donne une dans laquelle l'inconnue se trouve sous un radical; et, pour la résoudre, il est nécessaire de faire disparaître le radical. On est alors conduit généralement à une équation du quatrième degré. Mais il est préférable d'effectuer l'élimination de l'une ou de l'autre des inconnues, en évitant les radicaux.

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par a', ceux de l'équation (2) par a, et retranchant ensuite la seconde équation de la première, on obtient une équation qui ne contient plus que la première puissance de y, et que nous représenterons, pour abréger, par

$$(3) \qquad myx + nx^2 + py + qx + r = 0.$$

On peut alors considérer, au lieu du système des équations (1) et (2), celui des équations (1) et (3).

L'équation (3) donne

$$(4)\qquad y = -\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p};$$

en substituant cette valeur de y dans l'équation (1), on obtient celle-ci :

$$a\frac{(nx^2 + qx + r)^2}{(mx + p)^2} - (bx + d)\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p} + cx^2 + ex + f = 0,$$

et en chassant les dénominateurs, il vient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &a(nx^2 + qx + r)^2 - (bx + d)(mx + p)(nx^2 + qx + r) \\ &\qquad + (cx^2 + ex + f)(mx + p)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Il faudra donc résoudre cette dernière équation, qui sera généralement une équation complète du quatrième degré.

On a déjà vu qu'une équation du quatrième degré peut avoir quatre racines (n° 189); on verra dans la suite qu'elle en a toujours quatre, réelles ou imaginaires, et qu'elle n'en a pas un plus grand nombre. D'ailleurs, pour chaque valeur de x, l'équation (4) donne une valeur correspondante de y, et elle n'en donne qu'une. Le système des équations (1) et (2) admettra donc généralement quatre solutions, et il ne pourra pas en admettre plus de quatre.

197. Quand on fait usage de la méthode qui vient d'être indiquée en dernier lieu, il peut arriver que la quantité $nx^2 + qx + r$ soit divisible par $mx + p$; dans ce cas, en représentant le quotient par $hx + k$, on a

$$nx^2 + qx + r = (mx + p)(hx + k),$$

et l'équation (3) est

$$(mx + p)(y + hx + k) = 0.$$

On satisfait donc à cette équation, en posant

$$x = -\frac{p}{m}, \quad \text{ou} \quad y = -hx - k.$$

En portant la valeur $-\frac{p}{m}$ de x dans l'une des équations (1) et (2), on obtient une équation du second degré en y, dont les racines sont les valeurs de y correspondantes à $x = -\frac{p}{m}$. En substituant dans la même équation la valeur $-hx-k$ de y, on parvient à une équation du second degré en x, par laquelle on trouve deux autres solutions du système proposé.

3e Exemple. $\begin{cases} yx + x^2 - 3y - 3x = 0. \\ 2y^2 + x^2 - 4xy - 2y - 9 = 0. \end{cases}$

La première revient à $(x-3)(y+x) = 0$; ainsi, on y satisfait en posant $x = 3$ ou $y = -x$. En remplaçant x par 3 dans la seconde équation, on trouve $2y^2 - 14y = 0$; d'où $y = 0$, $y = 7$. En remplaçant y par $-x$ dans la même équation, on trouve $7x^2 + 2x - 9 = 0$, d'où $x = 1$ et $x = -\frac{9}{7}$. Les valeurs correspondantes de y sont $y = -1$ et $y = \frac{9}{7}$. Le système proposé admet donc ces quatre solutions :

$$(x = 3,\ y = 0);\quad (x = 3,\ y = 7);\quad (x = 1,\ y = -1);$$
$$(x = -\tfrac{9}{7},\ y = \tfrac{9}{7}).$$

PROBLÈMES.

4e Problème. — *Partager un nombre donné* a *en deux parties telles, que leurs carrés soient dans le rapport de* m *à* 1.

Désignons par x l'une des parties; l'équation du problème sera

$$(1)\qquad \frac{x^2}{(a-x)^2} = m.$$

On déduit successivement de cette équation

$$(1-m)x^2+2amx=ma^2,\quad x^2+\frac{2am}{1-m}x=\frac{ma^2}{1-m},$$

$$x=-\frac{am}{1-m}\pm\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)^2}+\frac{a^2m}{1-m}}$$

$$=-\frac{am}{1-m}\pm\frac{\sqrt{a^2m^2+a^2m(1-m)}}{1-m},$$

(2) $$x=\frac{-am\pm a\sqrt{m}}{1-m}.$$

On peut résoudre l'équation (1) d'une autre manière, qui est plus simple. En prenant la racine carrée de chaque membre, on trouve

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m}.$$

On conclut de là

$$x=\pm(a-x)\sqrt{m},\quad x(1\pm\sqrt{m})=\pm a\sqrt{m},$$

(3) $$x=\frac{\pm a\sqrt{m}}{1\pm\sqrt{m}}.$$

Les formules (2) et (3) ne sont pas identiques; mais, en réduisant les expressions des deux valeurs de x données par la formule (2), on retrouve celles qui résultent de la formule (3). On a

$m=\sqrt{m}\times\sqrt{m}$, et $1-m=1-(\sqrt{m})^2=(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})$;

par conséquent la formule (2) peut s'écrire ainsi :

$$x=\frac{-a\sqrt{m}\times\sqrt{m}\pm a\sqrt{m}}{(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})},\quad\text{ou}\quad x=\frac{-a\sqrt{m}(\sqrt{m}\mp 1)}{(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})}.$$

Quand on prend le signe inférieur, on peut diviser les deux termes de la valeur de x par $1+\sqrt{m}$, et l'on obtient

(4) $$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Quand on prend le signe supérieur, on peut diviser les deux termes de la valeur de x par $1-\sqrt{m}$; et en observant que le quotient de $\sqrt{m}-1$ par $1-\sqrt{m}$ est -1, on trouve

$$(5) \qquad x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}.$$

Lorsque l'on prend la valeur (5) de x, les deux parties sont

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}, \quad a-x=a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

elles sont donc toutes deux positives, et plus petites que le nombre proposé. Quand on suppose $m=1$, les valeurs de x et de $a-x$ deviennent égales; c'est ce qu'on pouvait prévoir d'après l'énoncé.

Lorsque l'on prend la valeur (4) de x, les deux parties sont

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}, \quad \text{et} \quad a-x=a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

comme elles ont des signes contraires, le nombre a est la différence de leurs valeurs absolues. Quand on suppose $m=1$, ces deux parties deviennent infinies; et, en effet, il est impossible de trouver deux nombres tels, que leur différence soit égale au nombre donné a, et que le rapport de leurs carrés soit égal à l'unité.

En introduisant l'hypothèse $m=1$ dans la valeur de x exprimée par $\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}$, on trouve que cette valeur se réduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Ce résultat est dû au facteur $1-\sqrt{m}$, qui est contenu dans les deux termes, et qu'on a supprimé pour arriver à la formule (5).

Le problème que nous venons de résoudre correspond à cette question qui a été traitée par Clairaut : *Trouver sur la ligne qui joint deux lumières d'intensités inégales, le*

point où ces deux lumières éclairent également. Il correspond encore à cette autre question : *Trouver sur la ligne qui joint les centres de deux masses inégales, le point qui est également attiré par ces masses.* Le nombre m est alors le rapport des intensités des lumières, ou celui des masses.

5e Problème. — *Trouver deux nombres tels, que la différence de leurs produits par les nombres respectifs* a *et* b *soit égale à un nombre donné* s, *et que la différence de leurs carrés soit égale à un autre nombre donné* q.

Soient x et y les nombres cherchés, les équations du problème seront

$$ax - by = s, \quad x^2 - y^2 = q.$$

La première équation donne $y = \frac{ax - s}{b}$; la substitution de cette valeur dans la seconde équation conduit à

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2asx = -s^2 - b^2q;$$

on tire de là

$$x = \frac{as \pm b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

et en reportant cette valeur de x dans la valeur de y tirée de la première équation, on trouve

$$y = \frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

La question admet donc les deux solutions suivantes :

$$1^\circ.\ x = \frac{as + b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{bs + a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2};$$

$$2^\circ.\ x = \frac{as - b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{bs - a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Discussion. Nous distinguerons trois cas :

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

1er *Cas.* $a > b$. Pour que les valeurs de x et de y soient réelles, il faut que l'on ait $s^2 > q(a^2 - b^2)$.

Dans la première solution, les valeurs de x et de y sont positives. Dans la seconde solution, la valeur de x est aussi positive, car on a $as > bs$, et par conséquent $as > b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$; mais, pour que la valeur de y soit positive, il faut que l'on ait $bs > a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$, ce qui revient à $b^2 s^2 > a^2 s^2 - a^2 q(a^2 - b^2)$, d'où $(a^2 - b^2)s^2 < a^2 q(a^2 - b^2)$, et enfin, $s^2 < a^2 q$.

Si, avec les deux conditions $a > b$, $s^2 > q(a^2 - b^2)$, on a $s^2 = a^2 q$, la valeur de y, dans la seconde solution, est nulle; et si l'on a $s^2 > a^2 q$, la valeur de y est négative.

Quand on a $a > b$ et $s^2 = q(a^2 - b^2)$, les deux solutions ne diffèrent pas, et les valeurs des inconnues sont positives.

Quand on a $s^2 < q(a^2 - b^2)$, les valeurs des inconnues sont imaginaires.

2e *Cas.* $a < b$. La quantité $a^2 - b^2$ étant négative, les valeurs de x et de y sont réelles. Pour examiner dans quels cas elles sont positives ou négatives, on peut les écrire comme il suit :

$$1^\circ.\ x = \frac{-as - b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}, \quad y = \frac{-bs - a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2};$$

$$2^\circ.\ x = \frac{-as + b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}, \quad y = \frac{-bs + a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}.$$

On voit alors que, dans la première solution, x et y sont négatifs. Dans la seconde solution, x est toujours positif, car on a $b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > bs > as$. Quant à la valeur de y, on trouve qu'elle est positive, nulle ou négative, selon que l'on a $s^2 < a^2 q$, $s^2 = a^2 q$, $s^2 > a^2 q$.

3e *Cas.* $a = b$. La première solution donne pour x et y

des valeurs infinies qui ne peuvent pas convenir au problème. Dans la seconde solution, les valeurs des inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour obtenir la véritable solution de la question, il suffit d'introduire dans les équations proposées l'hypothèse $a = b$; elles deviennent

$$x - y = \frac{s}{a} \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = q;$$

on en déduit $x + y = \frac{aq}{s}$, et, par suite,

$$x = \frac{a^2 q + s^2}{2as}, \quad y = \frac{a^2 q - s^2}{2as}.$$

Ces valeurs sont toujours réelles. La valeur de x est positive; celle de y est positive, nulle ou négative, selon que l'on a $s^2 < a^2 q$, $s^2 = a^2 q$, $s^2 > a^2 q$.

On aurait pu tirer les valeurs de x et de y relatives au cas de $a = b$ des formules générales du problème, en exécutant des transformations semblables à celle qui a été employée dans le n° 180; mais il est plus simple de remonter aux équations.

Toute la discussion que nous venons d'établir est résumée dans le tableau suivant :

$a > b$	$s^2 > q(a^2 - b^2)$	1re *solution.* x et y sont positifs.	
		2e *solution.* x est positif.....	$s^2 < a^2 q$, y est positif.
			$s^2 = a^2 q$, y est nul.
			$s^2 > a^2 q$, y est négatif.
	$s^2 = q(a^2 - b^2)$	*Une seule solution.* x et y sont positifs.	
	$s^2 < q(a^2 - b^2)$	*Pas de solution.*	
$a < b$	.....	1re *solution.* x et y sont négatifs.	
	.....	2e *solution.* x est positif.....	$s^2 < a^2 q$, y est positif.
			$s^2 = a^2 q$, y est nul.
			$s^2 > a^2 q$, y est négatif.
$a = b$	.....	*Une seule solution.* x est positif.	$s^2 < a^2 q$, y est positif.
			$s^2 = a^2 q$, y est nul.
			$s^2 > a^2 q$, y est négatif.

6e Problème. — *Trouver les termes d'une proportion*

par quotient, connaissant la somme a *des extrêmes, la somme* b *des moyens, et la différence* s^2 *entre la somme des carrés des deux premiers termes et la somme des carrés des deux autres.*

Désignons par x et y les deux termes du premier rapport; les termes du second rapport seront $b-y$ et $a-x$, et l'on devra avoir les deux équations

$$x(a-x)=y(b-y), \qquad x^2+y^2-(a-x)^2-(b-y)^2=s^2.$$

Ces équations se réduisent à

$$x^2-y^2-ax+by=0, \quad 2ax+2by=s^2+a^2+b^2;$$

la dernière donne

$$y=\frac{s^2+a^2+b^2-2ax}{2b}:$$

en substituant cette valeur de y dans la première équation, on trouve, après quelques réductions,

$$(a^2-b^2)x^2-a(s^2+a^2-b^2)x+\tfrac{1}{4}(s^4+2a^2s^2+a^4-b^4)=0.$$

On déduit de cette équation

$$x=\frac{a(s^2+a^2-b^2)\pm b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)},$$

et l'on trouve ensuite

$$y=\frac{b(a^2-b^2-s^2)\mp a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}.$$

Ces valeurs de x et y fournissent les deux solutions ci-après :

$$1^{\circ}.\begin{cases} x=\dfrac{a(s^2+a^2-b^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y=\dfrac{b(a^2-b^2-s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, \\ a-x=\dfrac{a(a^2-b^2-s^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y=\dfrac{b(a^2-b^2+s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}. \end{cases}$$

$$2^{\circ}.\begin{cases} x=\dfrac{a(s^2+a^2-b^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y=\dfrac{b(a^2-b^2-s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, \\ a-x=\dfrac{a(a^2-b^2-s^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y=\dfrac{b(a^2-b^2+s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}. \end{cases}$$

Discussion. Supposons $a > b$. Pour que les valeurs des inconnues soient réelles, il faut que l'on ait $s^2 > a^2 - b^2$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

La première solution donne des valeurs positives pour x et $b - y$; mais la valeur de y et celle de $a - x$ sont négatives, car chacune d'elles est formée de deux parties négatives.

Dans la seconde solution, les valeurs de x et de y sont toujours positives. En effet, le radical $\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}$ étant équivalent à $\sqrt{(s^2 + a^2 - b^2)\,[s^2 - (a^2 - b^2)]}$ qui est la moyenne proportionnelle entre les deux quantités $s^2 + a^2 - b^2$, $s^2 - (a^2 - b^2)$, la valeur de ce radical est plus petite que $s^2 + (a^2 - b^2)$, et plus grande que $s^2 - (a^2 - b^2)$; et puisque a est plus grand que b, on a

$$a(s^2 + a^2 - b^2) > b\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}$$

et
$$a\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2} > b[s^2 - (a^2 - b^2)].$$

Quant aux valeurs de $a - x$ et de $b - y$, pour qu'elles soient positives, il faut que l'on ait

$$b\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2} > a[s^2 - (a^2 - b^2)]$$

et
$$a\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2} < b(s^2 + a^2 - b^2);$$

ces deux conditions se réduisent l'une et l'autre à $s^2 < a^2 + b^2$.

Si l'on a $s^2 = a^2 + b^2$, les valeurs de $a - x$ et de $b - y$, dans la seconde solution, sont nulles; par suite, la valeur de x se réduit à a, et celle de y se réduit à b.

Quand on a $s^2 = a^2 - b^2$, les deux solutions ne diffèrent pas; on a $x = a$, $y = 0$, $a - x = 0$, $b - y = b$.

Quand on a $s^2 < a^2 - b^2$, le problème est impossible.

L'hypothèse $a < b$ conduit à des conclusions semblables à celles que nous avons obtenues en supposant $a > b$, si ce n'est que tout ce que nous avons dit de x et de $a - x$ s'applique alors à y et à $b - y$, et *vice versâ*.

Quand on suppose $a = b$, les valeurs des inconnues dans le premier système sont infinies, et dans le second système, elles deviennent indéterminées. En introduisant cette hypothèse dans les équations, on trouve qu'elles se réduisent à

$$(x - y)(x + y - a) = 0, \quad x + y = \frac{s^2 + 2a^2}{2a}.$$

La seconde équation exige que $x + y - a$ ne soit pas zéro; on ne peut donc satisfaire à la première qu'en posant $x - y = 0$, ou $x = y$; on en conclut

$$x = \frac{s^2 + 2a^2}{4a}, \quad a - x = \frac{2a^2 - s^2}{4a}.$$

Il resterait à chercher quelle interprétation on doit donner aux valeurs négatives des inconnues x, y, $a - x$, $b - y$. Mais cette recherche est sans difficulté, et elle n'offre que peu d'intérêt; elle acquerrait plus d'importance si, à la question que nous nous sommes proposée, on substituait celle-ci, qui donne les mêmes équations : *Inscrire dans un rectangle donné, dont les côtés sont* a *et* b, *un second rectangle tel, que la différence des carrés de ses côtés soit égale à un carré donné* s^2.

7e Problème. — *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant son périmètre* 2p *et sa surface* m^2.

Soient x et y les côtés de l'angle droit, et z l'hypoténuse; on aura les trois équations

$$x + y + z = 2p, \quad xy = 2m^2, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Pour résoudre ces équations, on prend la valeur de z dans la première et on la porte dans la troisième, ce qui donne

$$2p^2 - 2p(x + y) + xy = 0;$$

en remplaçant xy par $2m^2$, on a

$$p^2 - p(x + y) + m^2 = 0;$$

d'où

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p}.$$

On conclut de là, d'après l'équation $x + y + z = 2p$,

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p};$$

et, d'après la valeur ci-dessus de $x + y$ et l'équation $xy = 2m^2$, les deux autres côtés x et y sont les deux racines de l'équation

$$X^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} X + 2m^2 = 0;$$

ce qui donne

$$x = \frac{p^2 + m^2 + \sqrt{p^4 + m^4 - 6p^2m^2}}{2p},$$

$$y = \frac{p^2 + m^2 - \sqrt{p^4 + m^4 - 6p^2m^2}}{2p}.$$

Discussion. La valeur de z est toujours réelle; pour qu'elle soit positive, il faut que $p^2 > m^2$. Pour que les valeurs de x et de y soient réelles, il faut que l'on ait

$$p^4 + m^4 - 6p^2m^2 > 0,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. Ces valeurs ne sont jamais négatives; car, dans l'équation d'où elles ont été tirées, le terme connu est positif, et le coefficient du second terme est négatif. Les deux inégalités ci-dessus expriment donc toutes les conditions nécessaires pour la possibilité du problème.

Le polynôme $p^4 - 6p^2m^2 + m^4$ est un trinôme du second degré par rapport à p^2, que l'on peut décomposer en deux facteurs. La seconde inégalité devient ainsi

$$[p^2 - m^2(3 + 2\sqrt{2})]\,[p^2 - m^2(3 - 2\sqrt{2})] > 0.$$

Pour que cette condition soit remplie, il faut que les deux facteurs aient le même signe. On doit donc avoir

$$p^2 > m^2(3 + 2\sqrt{2}), \quad \text{ou bien} \quad p^2 < m^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Mais, d'après la condition $p^2 > m^2$, on ne peut admettre que l'inégalité

$$p^2 > m^2(3 + 2\sqrt{2});$$

d'où l'on conclut

$$p > m\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad p > m(1 + \sqrt{2}) \text{ (n° 191)}.$$

Lorsqu'on a $p = m(1 + \sqrt{2})$, les valeurs de x, y et z deviennent

$$x = \frac{m(2 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = m\sqrt{2}, \quad y = m\sqrt{2}, \quad z = 2m.$$

La relation $p = m(1 + \sqrt{2})$ détermine, pour chaque valeur de m, la plus petite valeur possible de p; d'où il suit que, parmi tous les triangles rectangles qui ont une surface donnée m^2, celui dont le périmètre est le plus petit est celui qui satisfait à cette relation : et puisque l'on a $x = y$, ce triangle est isocèle.

La condition $p > m(1 + \sqrt{2})$ peut s'écrire

$$m < \frac{p}{1 + \sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad m < p(\sqrt{2} - 1).$$

On en conclut alors que, parmi tous les triangles rectangles de même périmètre $2p$, celui qui a la plus grande surface est le triangle isocèle, lequel est équivalent au carré dont le côté est $p(\sqrt{2} - 1)$.

8e Problème. — *Trouver deux nombres* x *et* y, *connaissant leur produit* b *et la somme* a *de leurs carrés.*

Les équations du problème sont

$$x^2 + y^2 = a \qquad xy = b.$$

On peut éliminer y entre ces deux équations, en prenant la valeur de y dans la seconde et la substituant dans la première. On peut aussi remarquer que l'équation $xy = b$ donnant $x^2y^2 = b^2$, on connaît la somme et le produit des deux

quantités x^2 et y^2, de sorte qu'on pourrait former immédiatement une équation du second degré dont les racines donneraient les valeurs de ces quantités; mais les calculs sont plus simples par le procédé suivant.

En ajoutant et en retranchant les deux équations, membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la seconde par 2, on obtient

$$(x+y)^2 = a + 2b, \quad (x-y)^2 = a - 2b;$$

donc

$$x + y = \pm\sqrt{a+2b}, \quad x - y = \pm\sqrt{a-2b}.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$x = \frac{\pm\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{2},$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}{2}.$$

Chaque radical doit avoir à la fois, dans les valeurs des deux inconnues, le signe supérieur ou le signe inférieur; de sorte qu'en désignant le premier radical par $2\sqrt{A}$ et le second par $2\sqrt{B}$, on a ces quatre solutions :

$$1^{\circ}. \begin{cases} x = +\sqrt{A} + \sqrt{B}, \\ y = +\sqrt{A} - \sqrt{B}; \end{cases} \qquad 2^{\circ}. \begin{cases} x = -\sqrt{A} - \sqrt{B}, \\ y = -\sqrt{A} + \sqrt{B}; \end{cases}$$

$$3^{\circ}. \begin{cases} x = +\sqrt{A} - \sqrt{B}, \\ y = +\sqrt{A} + \sqrt{B}; \end{cases} \qquad 4^{\circ}. \begin{cases} x = -\sqrt{A} + \sqrt{B}, \\ y = -\sqrt{A} - \sqrt{B}; \end{cases}$$

Les deux dernières solutions ne diffèrent pas des deux premières : ainsi on n'en a réellement que deux. On pouvait d'ailleurs prévoir, par la forme des équations, que l'on aurait deux solutions, dont l'une se déduirait de l'autre en changeant les signes des valeurs de x et de y, puisque ces équations restent les mêmes quand on change x en $-x$ et y en $-y$.

Quand on emploie, pour résoudre ce problème, l'une des deux méthodes que nous avons d'abord indiquées, il y a des radicaux superposés dans les valeurs de x et de y; et il faut appliquer la réduction qui a été enseignée dans le n° 191.

9e Problème. — *On donne la somme* a *de deux nombres et la somme* b *de leurs quatrièmes puissances; trouver ces nombres.*

Les équations du problème sont

$$(1) \qquad x + y = a, \qquad (2) \qquad x^4 + y^4 = b.$$

En prenant dans la première équation la valeur de y en fonction de x, et la substituant dans la seconde équation, on parvient à une équation complète du quatrième degré; mais on peut obtenir une équation plus simple. A cet effet, on élève à la quatrième puissance les deux membres de l'équation (1), ce qui donne

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = a^4.$$

Remplaçant $x^4 + y^4$ par b, et mettant xy en facteur commun, il vient

$$(3) \qquad xy(4x^2 + 6xy + 4y^2) = a^4 - b.$$

L'équation (1) donne aussi, en élevant les deux membres au carré,

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy;$$

et en remplaçant, dans l'équation (3), $4x^2 + 4y^2$ par $4a^2 - 8xy$, on parvient à l'équation

$$xy(4a^2 - 2xy) = a^4 - b, \quad \text{d'où} \quad xy = a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4 + b)}.$$

Les valeurs de x et de y sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - aX + a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4 + b)} = 0.$$

En prenant le signe + devant le radical $\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4 + b)}$, on n'obtient que des racines imaginaires. Quand on prend le

signe —, la nature des racines dépend des valeurs de a et de b.

La résolution du problème dont nous venons de nous occuper peut aussi être effectuée comme il suit.

Si l'on considère le produit xy comme une inconnue auxiliaire représentée par z, les valeurs de x et de y seront les racines de l'équation

$$X^2 - aX + z = 0,$$

de sorte que l'on aura

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (2), on obtient une équation semblable à celle qu'on a précédemment résolue, si ce n'est que xy est remplacé par z.

On peut encore poser $x - y = t$; on tire de cette relation, jointe à l'équation $x + y = a$,

$$x = \frac{a+t}{2}, \quad y = \frac{a-t}{2}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $x^4 + y^4 = b$, et réduisant, on obtient l'équation

$$2t^4 + 12a^2t^2 + 2a^4 = 16b;$$

cette équation se résout par les règles qui ont été précédemment expliquées (n° 189).

10e Problème. — *Si au produit de deux nombres on ajoute* m *fois leur somme, on obtient un nombre donné* a; *et si à la somme des carrés de ces mêmes nombres on ajoute* n *fois leur somme, on obtient un autre nombre donné* b. *Trouver ces deux nombres.*

Soient x et y les nombres demandés; on a les deux équations

$$xy + m(x+y) = a, \quad x^2 + y^2 + n(x+y) = b.$$

En ajoutant ces équations, après avoir multiplié les deux membres de la première par 2, on obtient

$$(x+y)^2+(2m+n)(x+y)=2a+b.$$

Cette équation fait connaître la valeur de $x+y$; on en conclut celle de xy, et on trouve celles de x et de y par une équation du second degré.

On voit, dans ce problème et dans le précédent, comment on peut quelquefois réussir à ramener au second degré, par des artifices de calcul, ou par un choix convenable d'inconnues, une question qui, par les méthodes ordinaires, conduit à une équation de degré plus élevé.

11e Problème. — *Une personne possède* 13 000 *francs, qu'elle partage en deux parties inégales, dont elle tire des revenus égaux; si elle faisait valoir la première partie au taux de la seconde, elle en retirerait un revenu de* 360 *francs; et si la seconde partie était placée au taux de la première, elle produirait un revenu de* 490 *francs. Trouver les deux taux.* (Réponse : 7 pour 100 et 6 pour 100.)

12e Problème. — *Les trois arêtes d'un parallélipipède rectangle sont entre elles comme* 2 : 3 : 4; *et si ces arêtes augmentaient respectivement de* 1 *mètre,* 2 *mètres,* 3 *mètres, le volume du corps augmenterait de* 153 *mètres cubes. Déterminer les longueurs des arêtes.* (Réponse : 3 mètres, 4 mètres $\frac{1}{2}$, 6 mètres.)

13e Problème. — *Trouver trois nombres tels, que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient* 20, 18 *et* 14. (Réponse : 4, 3, 2.)

14e Problème. — *Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de* 4; *la différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égale au chiffre des centaines; et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second*

nombre qui, retranché du premier, donne pour reste 390 *augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. Trouver ce nombre.* (Réponse : 864.)

15e Problème.—*Quatre nombres sont en proportion par quotient; la somme des extrêmes est* 14, *celle des moyens est* 11, *et la somme des quatrièmes puissances des quatre termes est* 24929. *Trouver ces quatre nombres.* (Réponse : 12, 8, 3, 2.)

16e Problème. — *Trouver les côtés* x *et* y, z *et* t *de deux rectangles dont on connaît la somme* q *des surfaces, la somme* a *des bases, et dont les surfaces deviennent* p *et* p', *quand à la base de chacun d'eux on donne la hauteur de l'autre.* (En mettant dans les formules les données suivantes : $q = 10$, $a = 3$, $p = 4$, $p' = 4$, on trouvera ces deux solutions : $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 4$, et $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $t = 2$.)

17e Problème. — *Partager les deux nombres* a *et* b *chacun en deux parties, de manière que la somme des carrés d'une partie de* a *et d'une partie de* b *soit égale à un nombre donné* p, *et que la somme des carrés des deux autres parties de* a *et de* b *soit égale à un nombre donné* q. (En mettant dans les formules les données $a = 7$, $b = 11$, $p = 13$, $q = 89$, on trouvera que les parties cherchées sont 2, 5, 3 et 8.)

18e Problème. — *Trouver un nombre tel, que son carré soit au produit des différences de ce nombre à deux nombres donnés* a *et* b *dans le rapport de* p *à* q. (En mettant dans la formule les données $a = 3$, $b = 2$, $p = 3$, $q = 1$, on trouvera pour le nombre demandé les deux valeurs 6 et $\frac{3}{2}$.)

Des questions de maximum et de minimum que l'on peut faire dépendre des équations du second degré.

198. On dit qu'une quantité variable devient *maximum*, quand elle atteint une valeur au delà de laquelle elle ne peut pas croître; et qu'elle est *minimum*, quand elle atteint une valeur au-dessous de laquelle elle ne peut pas décroître. Ainsi, suivant ce que l'on a vu dans le n° 188, le produit de deux nombres dont la somme est constante, est maximum quand les deux nombres sont égaux.

Cette proposition peut être étendue à un produit d'un nombre quelconque de facteurs; c'est-à-dire que *le produit de* m *nombres* a, b, c, d, *etc., dont la somme doit rester constante, est maximum quand ces nombres sont égaux.*

Pour le démontrer, supposons qu'on ait formé le produit maximum; si deux des facteurs, a et b, sont inégaux, on n'altérera pas la somme en remplaçant chacun de ces deux facteurs par leur demi-somme $\frac{a+b}{2}$; mais, puisque $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) > ab$, on aura aussi

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)cd\ldots > abcd\ldots.$$

Le produit maximum ne peut donc être que celui dont tous les facteurs sont égaux.

199. La proposition qui vient d'être établie conduit à cette autre : *La somme de* m *nombres* a, b, c, d, *etc., qui doivent donner un produit constant, est minimum quand ces nombres sont égaux.* Car, en nommant P la valeur constante du produit des m nombres, S la somme de ces nombres quand ils sont égaux, et S′ un nombre moindre que S, le plus grand produit de m nombres donnant une somme égale à S′, sera celui qu'on obtiendra quand les

facteurs seront égaux, et il sera moindre que le produit P des m nombres égaux dont la somme est S : il est donc impossible d'obtenir une somme $S' < S$ avec m nombres dont le produit est P.

200. Considérons le trinôme du second degré

$$x^2 + px + q.$$

On a vu que, lorsque les racines de l'équation $x^2+px+q=0$ sont imaginaires, le trinôme proposé est minimum pour $x = -\frac{1}{2}p$ (n° 186).

Supposons que l'équation $x^2 + px + q = 0$ ait deux racines réelles et inégales; nommons-les x' et x'', et soit $x' < x''$; on a alors

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'').$$

Pour les valeurs de x plus grandes que x'', la valeur du trinôme $x^2 + px + q$ est positive; et lorsque x augmente depuis x'' jusqu'à $+\infty$, la valeur du trinôme augmente depuis zéro jusqu'à $+\infty$. Pour les valeurs de x plus petites que x', les deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont négatifs; donc leur produit est positif. Si l'on change les signes de ces facteurs, ils sont $x' - x$ et $x'' - x$; et quand x décroît depuis x' jusqu'à $-\infty$, leurs valeurs augmentent jusqu'à $+\infty$. Donc la valeur du trinôme augmente depuis zéro jusqu'à $+\infty$.

Quand la valeur de x est comprise entre x' et x'', le premier facteur est positif et l'autre est négatif; donc le produit est négatif. On peut écrire ce produit ainsi :

$$-(x - x')(x'' - x).$$

La valeur de x restant comprise entre x' et x'', les deux facteurs $x - x'$ et $x'' - x$ sont positifs, et leur somme est constante et égale à $x'' - x'$; la valeur absolue du pro-

duit est donc maximum quand les deux facteurs sont égaux. On a alors

$$x = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{et} \quad x^2 + px + q = -\frac{(x'' - x')^2}{4}.$$

La valeur $-\frac{1}{4}(x'' - x')^2$ est un minimum, puisqu'elle est négative et surpasse en valeur absolue toutes les autres valeurs négatives du trinôme.

On parvient à la même conclusion, en écrivant le trinôme $x^2 + px + q$ de cette manière :

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q).$$

Lorsque la valeur de $x + \frac{1}{2}p$ est comprise entre $-\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ et $+\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, la quantité ci-dessus est négative, et elle a la plus grande valeur absolue quand la partie positive $(x + \frac{1}{2}p)^2$ est nulle, c'est-à-dire quand $x = -\frac{1}{2}p$; elle est alors $-(\frac{1}{4}p^2 - q)$. Ces résultats ne diffèrent pas des précédents ; car $-\frac{1}{2}p$ est la demi-somme des racines x' et x'', et $(\frac{1}{4}p^2 - q)$ est le carré de la moitié de leur différence.

201. On peut résoudre plusieurs autres questions de maximum ou de minimum, à l'aide des principes qui ont été exposés dans ce chapitre. A cet effet, on suppose que l'expression dont on veut trouver le maximum ou le minimum doive prendre une valeur déterminée, et l'on cherche les conditions nécessaires pour que cette supposition conduise à des valeurs réelles de l'inconnue, ou des inconnues contenues dans l'expression proposée, et pour que ces valeurs soient positives, si la question l'exige : le maximum ou le minimum demandé résulte de ces conditions. Si l'on demande, par exemple, quel est, parmi tous les triangles rectangles qui ont une surface donnée m^2, celui dont le périmètre est minimum, on supposera que le périmètre soit donné ; la question deviendra le problème 7°,

(page 188), par lequel on a vu que le périmètre minimum est celui du triangle isocèle, et que sa valeur est $m(\sqrt{2}-1)$.

202. On parvient, de cette manière, à trouver les valeurs maximum et minimum de toutes les fonctions de cette forme

$$(1)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Si l'on pose

$$(2)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y,$$

cette équation fera connaître les valeurs de x pour chaque valeur de y, et il faudra que la valeur de y soit telle, que l'on obtienne des valeurs réelles de x. En chassant les dénominateurs et réduisant, on a

$$(3)\qquad (a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0.$$

La condition de réalité des valeurs de x est

$$(4)\qquad (b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)>0;$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

En réduisant le premier membre de cette inégalité, on a une quantité de cette forme, ny^2+py+q, n pouvant être positif, négatif ou nul; et il peut arriver que l'inégalité soit satisfaite par toutes les valeurs de y, ou qu'elle ne comporte que des valeurs de y comprises dans de certaines limites. Dans le premier cas, la fraction proposée pourra prendre toutes les valeurs possibles; dans le second cas, cette fraction aura pour maximum la limite supérieure des valeurs de y, et elle aura pour minimum la limite inférieure de ces valeurs. Nous ne nous arrêterons pas à discuter d'une manière générale les différentes circonstances que pourra présenter l'inégalité (4), parce que l'on doit opérer directement sur chaque exemple. Quand le coefficient n de y^2 n'est pas nul, dans

l'inégalité (4), on détermine les limites des valeurs de y, qui vérifient cette inégalité, comme cela a été expliqué dans le n° 186.

19e Problème.—*Partager un nombre donné* 2 a *en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit minimum.*

En désignant les deux parties par x et y, on a

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4a^2 - 2xy.$$

Il suit de là que la somme $x^2 + y^2$ sera minimum quand le produit xy sera maximum; par conséquent, pour $x = y$, cette somme sera d'autant plus grande que le produit xy sera plus petit, et elle sera la plus grande possible, en n'admettant point de valeurs négatives pour x et y, quand une des parties sera zéro.

20e Problème. — *Partager un nombre donné en deux parties, de telle sorte que la somme des deux quotients qu'on obtiendra en divisant chacune des deux parties par l'autre, soit minimum.*

Nommons x et y les deux parties. On aura à chercher le minimum de

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Or, le produit des deux parties de cette somme étant constant, la somme est minimum quand les deux parties sont égales; d'où l'on conclut $x = y$. Il faudra donc partager le nombre donné en deux parties égales.

La somme proposée peut être rendue aussi grande qu'on le veut, puisqu'on peut prendre une des parties x et y aussi petite qu'on le veut.

21e Problème. — *Trouver le maximum et le minimum de la fraction* $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$.

En représentant par y une valeur quelconque de la frac-

tion proposée, on a l'équation

$$\frac{x-4}{x^2-3x-3}=y; \quad \text{d'où} \quad yx^2-(3y+1)x-3y+4=0.$$

Pour qu'elle donne des valeurs réelles de x, il faut que

$$(3y+1)^2-4y(4-3y)>0, \quad \text{ou} \quad 21y^2-10y+1>0,$$

et, en décomposant en facteurs le premier membre de l'inégalité,

$$21\left(y-\tfrac{1}{3}\right)\left(y-\tfrac{1}{7}\right)>0;$$

d'où l'on conclut

$$y>\tfrac{1}{3}, \quad \text{ou} \quad y<\tfrac{1}{7},$$

le signe d'inégalité n'excluant pas d'ailleurs l'égalité.

Il résulte de là que la fraction proposée peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $\frac{1}{7}$, et toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{3}$ et $+\infty$; et qu'elle ne peut acquérir aucune valeur comprise entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{7}$ est le maximum des valeurs comprises entre cette limite et $-\infty$, et $\frac{1}{3}$ est le minimum des valeurs comprises entre cette limite et $+\infty$.

Si l'on veut obtenir les valeurs de x, correspondantes à ces deux limites, on remarquera que, pour $y=\frac{1}{7}$ et pour $y=\frac{1}{3}$, les racines de l'équation entre x et y sont égales; d'où il suit que chacune d'elles est la moitié de leur somme, ou $\frac{3y+1}{2y}$. En faisant, dans cette expression, $y=\frac{1}{7}$, on trouve $x=5$, et en faisant $y=\frac{1}{3}$, on trouve $x=3$.

22e Problème. — *Quel est, parmi tous les rectangles que l'on peut inscrire dans un triangle donné, celui dont la surface est maximum?* (Réponse : celui dont la hauteur est la moitié de la hauteur du triangle.)

23e Problème. — *Quel est, parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, celui qui jouit de cette propriété que la perpendiculaire abaissée du sommet de*

l'angle droit sur l'hypoténuse est maximum? (Réponse : le triangle isocèle.)

24e Problème. — *Trouver la limite supérieure des valeurs positives que peut prendre la fraction* $\frac{4(x+2)}{4x^2+8x+9}$, *en supposant* 1° *que* x *peut recevoir des valeurs négatives;* 2° *que* x *ne peut recevoir que des valeurs positives.* (Dans le premier cas, la limite cherchée est 1, et elle répond à $x = -\frac{1}{2}$; dans le second cas, la limite cherchée est $\frac{8}{9}$, et elle répond à $x = 0$.)

25e Problème. — *Trouver les limites des valeurs positives que peut prendre la fraction* $\frac{x+2}{x^2-3x+2}$ *quand on n'attribue à* x *que des valeurs positives.* (Réponse : $+\infty$ pour $x = 1$ et $x = 2$, et *zéro* pour $x = \infty$.)

26e Problème. — *Trouver les limites des valeurs positives que peut prendre la fraction* $\frac{2x-1}{2x^2-1}$, *quand on n'attribue à* x *que des valeurs positives.* (Réponse : *zéro* et ∞.)

CHAPITRE SEPTIÈME.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Réduction des expressions imaginaires du second degré à la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Module. Addition, soustraction, multiplication, division des expressions de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

203. Quoique l'indication de la racine carrée d'une quantité négative ne soit que le symbole d'une opération impossible, cependant les algébristes mettent ces sortes de racines au rang des quantités, et ils les emploient fréquemment dans leurs calculs au moyen d'un petit nombre de conventions.

Soit β une quantité réelle quelconque; les racines carrées de la quantité négative $-\beta^2$ seront exprimées par $\pm\sqrt{-\beta^2}$. Mais la quantité négative $-\beta^2$ étant le produit de β^2 par -1, si l'on suppose que les racines carrées de ce produit peuvent être formées, comme dans le cas où les facteurs sont positifs, en multipliant entre elles les racines carrées des facteurs, les racines carrées de $-\beta^2$ seront exprimées par $\pm\beta\sqrt{-1}$. On peut donc convenir que les expressions $\pm\sqrt{-\beta^2}$ et $\pm\beta\sqrt{-1}$ seront regardées comme équivalentes; de cette manière on n'a plus à considérer dans les calculs d'autre radical imaginaire que $\sqrt{-1}$.

Lorsque les racines d'une équation complète du second degré sont imaginaires, elles sont de cette forme

$$x = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2}, \quad \text{ou} \quad x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}.$$

On donne généralement le nom d'*expression imaginaire* à

toute expression qui n'est susceptible d'aucune valeur réelle positive ou négative. Mais les expressions imaginaires telles que $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ sont les seules qu'on emploie dans les calculs algébriques; et lorsque nous nous servirons de la dénomination d'expression imaginaire, on devra entendre qu'il s'agit d'une expression de cette forme.

Lorsque le coefficient β de $\sqrt{-1}$ devient nul, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est regardé comme réduit à zéro. Par cette convention, l'expression $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ se réduit à la quantité réelle α; de sorte que les expressions imaginaires comprennent comme cas particulier les quantités réelles.

Il est évident que, pour que deux expressions imaginaires soient égales, il faut et il suffit qu'il y ait égalité entre les parties réelles de ces expressions, et entre les coefficients de $\sqrt{-1}$. Ainsi, une équation entre des quantités imaginaires est la représentation *symbolique* de deux équations entre des quantités réelles. Par exemple, l'équation

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

représente à la fois les deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

On dit que deux expressions imaginaires sont conjuguées quand elles ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$, comme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

204. On applique aux expressions imaginaires les règles ordinaires du calcul, en observant que, lorsque l'on a à multiplier le symbole $\sqrt{-1}$ par lui-même, il faut admettre, d'après la signification du signe $\sqrt{}$, que le produit est -1.

En considérant seulement deux expressions imaginaires, la somme, la différence et le produit de ces expressions se

formeront comme on le voit dans les égalités ci-dessous :

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - (\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

En ajoutant les expressions conjuguées

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on obtient une quantité réelle 2α; le produit des mêmes expressions est aussi une quantité réelle $\alpha^2 + \beta^2$.

La valeur absolue de la racine carrée de la quantité $\alpha^2 + \beta^2$ est ce qu'on nomme le *module* de chacune des expressions $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. Il suit de cette définition que le module d'une quantité réelle est la valeur absolue de cette quantité.

Pour que le module $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ soit nul, il faut qu'on ait en même temps $\alpha = 0$, $\beta = 0$; dans ce cas, l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ devient zéro. Réciproquement, pour que l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ soit nulle, il faut que son module soit nul, puisque l'on doit avoir $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne l'égalité de leurs modules; mais la réciproque n'est pas vraie.

205. Le module de l'expression imaginaire qu'on a obtenue en multipliant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, est

$$\sqrt{[(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2]}.$$

Or on a

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Le module ci-dessus est donc égal à $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}$, ce qui revient à

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \times \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Il suit de là que *le module du produit de deux facteurs*

imaginaires est égal au produit des modules des deux facteurs; d'où l'on conclut que *le module du produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs* (*).

Pour qu'un produit de plusieurs facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que le module de ce produit soit nul (n° 204). Or, ce module étant le produit des modules des facteurs imaginaires, qui sont des quantités réelles, il ne peut être nul qu'autant que le module de l'un des facteurs est zéro, ce qui exige que l'un des facteurs imaginaires soit nul. Donc, *pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

206. En formant, par des multiplications successives, les puissances de $\sqrt{-1}$, on trouve d'abord

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^4 = +1.$$

La puissance quatrième étant $+1$, si l'on formait les puissances supérieures, on retrouverait périodiquement les

---

(*) D'après l'égalité $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$, *le produit de deux nombres qui sont chacun la somme de deux carrés, est aussi la somme de deux carrés.* La manière dont on parvient ici à ce théorème est un exemple remarquable de la liaison qui peut souvent exister entre des propriétés en apparence très-éloignées les unes des autres.

En échangeant entre elles les lettres γ et δ, dans l'égalité ci-dessus, on obtient la suivante : $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 + (\alpha\gamma + \beta\delta)^2$. Ainsi, *il y a toujours deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres dont chacun est la somme de deux carrés.*

Ce théorème conduit à un autre plus général, savoir, que le produit des facteurs $\alpha^2 + n\beta^2$ et $\gamma^2 + n\delta^2$ peut être exprimé de deux manières différentes, par une somme de la forme $A^2 + nB^2$. Pour démontrer ce dernier théorème, il suffit de remplacer dans les égalités ci-dessus β par $\beta\sqrt{n}$ et δ par $\delta\sqrt{n}$.

quatre résultats

$$\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}, \quad +1.$$

Si l'on représente par n un nombre entier quelconque, tous les nombres entiers seront compris dans les quatre expressions $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, et on aura toutes les puissances de $\sqrt{-1}$ par les formules

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1, \quad (\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1, \quad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

207. Soit à diviser l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par une quantité réelle γ. Si l'on suppose que le quotient soit $p + q\sqrt{-1}$, il faudra que l'on ait

$$\gamma(p + q\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

ou bien

$$p\gamma + q\gamma\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

La dernière égalité exige que $p\gamma = \alpha$, $q\gamma = \beta$, d'où $p = \frac{\alpha}{\gamma}$, $q = \frac{\beta}{\gamma}$; le quotient est donc $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}$.

Soit à diviser l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\gamma + \delta\sqrt{-1}$. Supposons que le quotient puisse être exprimé par $p + q\sqrt{-1}$; on devra avoir

$$(p + q\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

ce qui revient à

$$p\gamma - q\delta + (p\delta + q\gamma)\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Cette équation se partage en deux autres

$$p\gamma - q\delta = \alpha, \quad p\delta + q\gamma = \beta.$$

On tire de celles-ci

$$p = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad q = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2};$$

le quotient demandé est donc

$$\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

On parvient au même résultat en indiquant le quotient par une fraction, et en multipliant les deux termes de cette fraction par $\gamma - \delta\sqrt{-1}$; car on trouve ainsi

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Il résulte du principe qui a été établi dans le n° 205, que *le module du quotient de deux expressions imaginaires est le quotient de leurs modules;* et on peut le vérifier au moyen de l'expression ci-dessus du quotient.

Racines carrées de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. — Considérations sur les valeurs algébriques des racines de tous les degrés.

208. On peut obtenir les racines carrées de l'expression $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ par les formules (8) et (9) du n° 191; il suffit de remplacer, dans ces formules, a par α et b par $-\beta^2$; on trouve ainsi

$$(1)\quad \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}\sqrt{-1}.$$

$$(2)\quad \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}\sqrt{-1}.$$

Il suit de là qu'une expression imaginaire, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, a, comme une quantité réelle, deux racines carrées de la même forme; car, dans chacune des formules (1) et (2), le

carré du second membre ne changera pas, si l'on change à la fois le signe de la partie réelle et celui du coefficient de $\sqrt{-1}$.

Pour reconnaître si l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ a d'autres racines carrées que celles qui sont données par les formules (1) et (2), il faut chercher tous les couples de valeurs réelles de x et de y qui vérifient l'équation

$$(x + y\sqrt{-1})^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Cette équation se partage en deux autres :

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta.$$

On conclut de celles-ci, en les élevant au carré et les ajoutant,

$$(x^2 + y^2)^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2};$$

par suite on a

$$x^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}},$$

Les valeurs de x et de y devant être réelles, la somme $x^2 + y^2$ doit être une quantité positive, en sorte qu'il faut ne prendre pour cette somme que la valeur absolue de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; de plus, les valeurs de x et de y devant vérifier l'équation $2xy = \beta$, il faut qu'elles aient le même signe lorsque β est une quantité positive, et des signes contraires lorsque β est une quantité négative.

On conclut de là que l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ a seulement deux racines carrées de la forme $x + y\sqrt{-1}$, et qui sont égales et de signes contraires. En exprimant, suivant les notations ordinaires, ces deux racines carrées par

$\pm\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$, on aura, si β est positif,

$$(3)\quad \pm\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

Si β est négatif, ou, ce qui revient au même, si l'expression proposée est $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, β étant positif, les deux racines carrées de cette expression seront données par la formule

$$(4)\quad \pm\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

On peut remplacer les formules (3) et (4) par d'autres qui s'appliquent à la fois aux valeurs positives et négatives de β. Pour cela, après avoir déterminé la valeur de l'une des inconnues x ou y comme ci-dessus, il faut déterminer la valeur de l'autre inconnue au moyen de l'équation $2xy=\beta$. On trouve ainsi

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}},\quad y=\pm\frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}};$$

ou, ce qui revient au même,

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}},\quad x=\pm\frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}.$$

On a donc

$$(5)\quad \pm\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}+\frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}\sqrt{-1}\right);$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\quad \pm\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\pm\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

209. Si l'on veut avoir les racines carrées de $+\sqrt{-1}$ et de $-\sqrt{-1}$, il faudra faire, dans les formules (3) et (4),

$\alpha = 0$ et $\beta = 1$; on trouvera ainsi

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Les racines carrées de $+\sqrt{-1}$ et de $-\sqrt{-1}$ sont les valeurs qu'on obtiendrait pour z en considérant l'équation $z^4 = -1$; car cette équation peut s'écrire ainsi : $(z^2)^2 = -1$, d'où $z^2 = \pm\sqrt{-1}$. D'un autre côté, l'équation $z^4 = -1$ exprime que z est une racine quatrième de -1. On voit donc qu'il y a quatre racines quatrièmes de -1, qui sont :

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\quad \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

210. Pour obtenir les racines quatrièmes d'une quantité quelconque A, il faut résoudre l'équation

$$z^4 = A.$$

Supposons d'abord que la quantité A soit positive. Désignons par a le nombre dont la quatrième puissance est égale à A, et posons $z = ay$; l'équation $z^4 = A$ deviendra

$$a^4y^4 = a^4, \quad \text{d'où} \quad y^4 = 1, \quad \text{ou bien} \quad y^4 - 1 = 0.$$

$y^4 - 1$ étant le produit de $y^2 - 1$ par $y^2 + 1$, l'équation $y^4 - 1 = 0$ peut être remplacée par les suivantes :

$$y^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 + 1 = 0.$$

La première donne $y = \pm 1$, et la seconde donne $y = \pm\sqrt{-1}$. En multipliant les quatre valeurs de y par a, on a quatre racines quatrièmes de A, qui sont : $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$.

Si la quantité dont on veut avoir les racines quatrièmes

est négative, en la représentant par $-A$, il faudra résoudre l'équation

$$z^4 = -A.$$

Représentons encore par a le nombre dont la quatrième puissance est égale à A, et posons $z = ay$; l'équation $z^4 = -A$ se changera dans la suivante :

$$a^4 y^4 = -a^4, \quad \text{ou} \quad y^4 = -1.$$

Il suit de là que l'on aura toutes les racines quatrièmes de $-A$, en multipliant par a les racines quatrièmes de -1, que nous avons obtenues dans le numéro précédent.

211. Soient k un nombre entier quelconque et A une quantité réelle ou même une expression imaginaire : si l'on pose l'équation

$$(7) \qquad z^{2^k} = A,$$

les valeurs de z qui satisferont à cette équation seront les racines de A, du degré 2^k. Or, z^{2^k} étant le carré de $z^{2^{k-1}}$, les valeurs de $z^{2^{k-1}}$ seront les deux racines carrées de A. De ces deux valeurs de $z^{2^{k-1}}$ on déduira de même deux valeurs de $z^{2^{k-2}}$. Chacune de celles-ci donnera pareillement deux valeurs de $z^{2^{k-3}}$. En continuant ainsi, on obtiendra, par des extractions successives de racines carrées, un nombre de valeurs de z égal à 2^k; toutes ces valeurs étant des expressions de la forme $p + q\sqrt{-1}$, puisque les racines carrées d'une telle expression sont des expressions de la même forme.

Il est facile de prouver que toutes les valeurs de z que l'on obtiendra par ces calculs seront différentes; il suffit pour cela de faire voir que, si cette proposition est vraie pour l'équation $z^{2^{k-1}} = A$, elle sera vraie aussi pour l'équation $z^{2^k} = A$. Or, soient $m + n\sqrt{-1}$; et $m' + n'\sqrt{-1}$ deux

valeurs différentes de z qui satisfont à l'équation $z^{2^{k-1}} = A$; les valeurs correspondantes de z pour l'équation $z^{2^k} = A$ seront les racines carrées de ces deux expressions imaginaires. Mais, d'après les formules du n° 208, les deux racines carrées de $m + n\sqrt{-1}$ seront différentes l'une de l'autre. Celles de $m' + n'\sqrt{-1}$ seront aussi différentes l'une de l'autre; de plus, chacune d'elles sera différente des deux racines carrées de la première expression; autrement, en élevant ces racines au carré, on aurait le même résultat, et les expressions $m + n\sqrt{-1}$ et $m' + n'\sqrt{-1}$ ne seraient pas différentes, ce qui est contraire à la supposition.

212. Si l'on considère l'équation

$$z^m = A, \tag{8}$$

m désignant un nombre entier quelconque, les valeurs de z qu'on déduira de cette équation seront les racines du degré m de A. Lorsque m est un nombre pair, il est de la forme $n \times 2^l$, n désignant un nombre impair; si l'on pose alors $z^{2^k} = y$, l'équation (8) devient

$$y^n = A. \tag{9}$$

Quand on pourra déterminer les valeurs de y qui vérifieront la dernière équation, on déduira de chaque valeur de y, par des extractions successives de racines carrées, un nombre de valeurs de z égal à 2^l.

Considérons le cas particulier où A est une quantité réelle, positive ou négative, et $n = 3$; l'équation (9) est alors

$$y^3 = A. \tag{10}$$

Supposons qu'on ait extrait, par les procédés de l'arithmétique, la racine cubique de la valeur absolue de A, et désignons par a cette racine cubique prise avec le signe de A.

on aura $A = a^3$, et si l'on pose $y = ax$, l'équation (10) deviendra

$$a^3x^3 = a^3; \quad \text{d'où} \quad x^3 = 1, \quad \text{ou bien} \quad x^3 - 1 = 0.$$

$x^3 - 1$ est divisible par $x - 1$ (n° 71), et le quotient est $x^2 + x + 1$; de sorte que l'équation $x^3 - 1 = 0$ peut s'écrire ainsi :

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Or, pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il suffit et il faut que l'un des facteurs soit nul (n° 205). On obtiendra donc toutes les racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$ en résolvant séparément les deux équations

$$x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

La première donne $x = 1$, et on déduit de la seconde

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

Il suit de là que l'unité a trois racines cubiques qui sont

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

En multipliant ces trois racines cubiques de l'unité par a, on aura toutes les racines cubiques de A.

Si l'on veut reconnaître à posteriori comment l'expression $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})$ est une racine cubique de l'unité, il faudra élever cette expression au cube; en l'élevant d'abord au carré, on obtient $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})$, et en multipliant ce résultat par $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})$, on a pour produit l'unité. On s'assurera de même que le cube de $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})$ est l'unité.

Ces derniers calculs montrent que chacune des deux racines cubiques imaginaires de l'unité est le carré de l'autre;

de sorte que si l'on représente, pour abréger, l'une de ces racines par α, l'autre sera α^2; et si l'on continue de désigner par a la racine cubique réelle de A, les trois racines cubiques de A seront a, $a\alpha$, $a\alpha^2$.

213. Pour obtenir les racines sixièmes d'une quantité quelconque, il suffit de prendre les racines carrées de chacune des trois racines cubiques de cette quantité.

Supposons la quantité proposée positive; représentons-la par $+A^2$, et désignons par a^2 le nombre dont le cube est A^2; les trois racines cubiques de A^2 seront a^2, $a^2\alpha$, $a^2\alpha^2$. Les racines carrées de a^2 sont $\pm a$, et celles de $a^2\alpha^2$ sont $\pm a\alpha$. Pour trouver les racines carrées de $a^2\alpha$, on remarque que la relation $\alpha^3 = 1$ donne $\alpha^4 = \alpha$; d'où il suit que les racines carrées de $a^2\alpha$ sont $\pm a\alpha^2$. Les racines sixièmes de A^2 sont donc $\pm a$, $\pm a\alpha$, $\pm a\alpha^2$.

On peut obtenir ces racines d'une autre manière; en représentant l'une quelconque d'entre elles par z, on doit avoir

$$z^6 = A^2.$$

Désignons encore par a^2 le nombre dont le cube est $+A^2$; on aura $A^2 = a^6$; et si l'on pose $z = ay$, l'équation ci-dessus deviendra

$$a^6y^6 = a^6; \quad \text{d'où} \quad y^6 = 1, \quad \text{ou bien} \quad y^6 - 1 = 0.$$

$y^6 - 1$ étant le produit de $y^3 - 1$ par $y^3 + 1$, l'équation $y^6 - 1 = 0$ peut être remplacée par les deux suivantes:

$$y^3 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + 1 = 0.$$

Les racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$ étant 1, α, α^2, celles de l'équation $y^3 + 1 = 0$ sont -1, $-\alpha$ et $-\alpha^2$. En multipliant ces six valeurs de y par a, on trouve, comme ci-dessus, que les racines sixièmes de A^2 sont $+a$, $+a\alpha$, $+a\alpha^2$, $-a$, $-a\alpha$, $-a\alpha^2$.

214. Les considérations que nous venons de présenter montrent que les racines dont le degré est une puissance de 2, ou le produit de 3 par une puissance de 2, ont autant de valeurs qu'il y a d'unités dans leur degré. On verra par la suite que cette proposition s'étend aux racines de tous les degrés; de sorte qu'en désignant par m un nombre entier quelconque, une quantité réelle, ou même une expression de la forme $p + q\sqrt{-1}$, a toujours m racines du degré m, toutes les déterminations imaginaires de ces racines étant de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Résolution générale de l'équation du troisième degré.

215. Une équation du troisième degré à une inconnue peut contenir, avec la troisième puissance de l'inconnue, les puissances inférieures, et un terme indépendant de l'inconnue; mais, comme il sera démontré dans la suite que l'on peut toujours ramener la résolution d'une équation à celle d'une autre qui ne renferme pas la puissance de l'inconnue immédiatement inférieure au degré de l'équation, nous supposerons que cette réduction a été opérée; et, pour éviter les fractions, nous présenterons l'équation du troisième degré sous cette forme

$$(1) \qquad x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Nous supposerons d'ailleurs que p et q sont des quantités réelles.

Si l'on fait

$$x = y + z,$$

on pourra écrire l'équation résultante comme il suit

$$y^3 + z^3 + 3(yz + p)(y + z) + 2q = 0.$$

Cette dernière équation est évidemment vérifiée quand on

pose

$$yz + p = 0, \quad \text{et} \quad y^3 + z^3 + 2q = 0.$$

Celles-ci donnent

$$y^3 z^3 = -p^3, \quad y^3 + z^3 = -2q;$$

on conclut de ces deux équations que y^3 et z^3 sont les deux racines de l'équation

$$t^2 + 2qt - p^3 = 0;$$

donc

$$y^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}, \quad z^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3},$$

et puisque $x = y + z$,

$$(2) \qquad x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Si l'on n'avait point égard aux valeurs algébriques des radicaux, la formule (2) ne donnerait qu'une seule valeur de x; mais chaque radical cubique ayant trois déterminations, la somme des deux radicaux fournira pour x neuf expressions différentes. Ces neuf valeurs de x ne conviennent pas toutes à l'équation proposée; car les valeurs de y et de z doivent vérifier les deux équations $yz = -p$, $y^3 + z^3 = -2q$; or, la première équation a été remplacée par $y^3 z^3 = -p^3$, et toute quantité ayant trois racines cubiques, l'équation $y^3 z^3 = -p^3$ comporte, pour le produit yz, trois déterminations différentes. Si l'on représente, comme dans le n° **212**, les racines cubiques imaginaires de l'unité par α et α^2, les trois valeurs de yz correspondantes à $y^3 z^3 = -p^3$ sont $yz = -p$, $yz = -p\alpha$, $yz = -p\alpha^2$; la formule (2) doit donc donner à la fois les racines de l'équation (1), et celles des équations qu'on obtiendrait en remplaçant p soit par $p\alpha$, soit par $p\alpha^2$. Or, p étant une quantité réelle, on devra rejeter dans la formule (2) toutes les combinaisons des valeurs des deux radicaux cubiques dont le produit sera imaginaire.

Lorsque la quantité $q^2 + p^3$ est positive, chaque radical

cubique a une valeur réelle. Représentons, pour abréger, la valeur réelle du premier radical par A, et celle du second par B; les trois valeurs du premier radical seront A, αA, α^2A, et celles du second seront B, αB, α^2B. Or, en multipliant successivement les trois premières quantités par les trois dernières, et en observant que α et α^2 sont des expressions imaginaires, que $\alpha^3 = 1$, et que α^4 est imaginaire, puisque, à cause de $\alpha^3 = 1$, on a $\alpha^4 = \alpha$, on voit que l'on n'obtient que trois produits réels, savoir, $A \times B$, $\alpha A \times \alpha^2 B$, $\alpha^2 A \times \alpha B$. Il suit de là que l'on doit seulement admettre pour x les trois valeurs ci-après :

$$A + B, \quad \alpha A + \alpha^2 B, \quad \alpha^2 A + \alpha B.$$

La première valeur est réelle, et les deux autres sont imaginaires. On verra d'ailleurs dans la suite que l'équation ne peut pas admettre un plus grand nombre de racines.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

On a $p = -2$, $q = -\frac{9}{2}$, d'où $\sqrt{q^2 + p^3} = \frac{7}{2}$; ce qui donne

$$A = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{\tfrac{16}{2}} = 2,$$

$$B = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = 1.$$

Ainsi les trois racines sont

$$x = 3,$$

$$x = -1 + \sqrt{3}\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

$$x = -1 - \sqrt{3}\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

On s'assurera aisément que ces trois valeurs de x vérifient l'équation proposée.

Lorsque la quantité $q^2 + p^3$ est négative, ce qui exige que p soit négatif, les radicaux cubiques compris dans la

formule (2) n'ont plus de valeur réelle; cependant toutes les racines sont réelles (*). Mais, pour déduire ces racines de la formule (2), il faudrait la débarrasser des imaginaires; et l'on ne peut y parvenir qu'en exprimant chaque radical cubique par une suite composée d'un nombre infini de termes. C'est ce qu'on appelle le *cas irréductible* de l'équation du troisième degré.

On a un exemple de ce cas dans l'équation

$$x^3 - 21x + 20 = 0;$$

il faut faire dans la formule (2) $p = -7$, $q = 10$; on trouve

$$x = \sqrt[3]{-10 + 9\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-10 - 9\sqrt{-3}}.$$

Il est facile de s'assurer que l'équation a trois racines réelles; car elle est vérifiée quand on remplace x par chacun des nombres 1, 4 et -5.

(*) Lorsque deux nombres, substitués dans le premier membre d'une équation dont le second membre est zéro, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine réelle de l'équation. En admettant cette proposition, qui sera démontrée dans la suite, il est facile de prouver que l'équation (1) a trois racines réelles, lorsque $q^2 + p^3 < 0$. En effet, supposons q positif, et puisque p doit être négatif, remplaçons p par $-p$; on aura $p^3 > q^2$, et l'équation pourra s'écrire ainsi

$$x(x^2 - 3p) + 2q = 0.$$

On peut donner à x une valeur négative, telle que x^2 soit plus grand que $3p$, et telle aussi que la valeur absolue de $x(x^2 - 3p)$ soit plus grande que $2q$; alors le premier membre de l'équation aura une valeur négative, puisque x étant négatif et $x^2 - 3p$ étant positif, le produit $x(x^2 - 3p)$ sera négatif. Pour $x = 0$, on a un résultat positif. Pour $x = \sqrt{p}$, le premier membre de l'équation devient $-2p\sqrt{p} + 2q$, donc il est négatif; car de $p^3 > q^2$, on conclut $p\sqrt{p} > q$. Enfin, pour $x > \sqrt{3p}$, on a un résultat positif. Il suit de là que l'équation a une racine négative, une racine positive moindre que $\sqrt{p}$, et une autre racine positive comprise entre $\sqrt{p}$ et $\sqrt{3p}$. Si l'on changeait q en $-q$ dans l'équation, le résultat serait le même que si l'on changeait x en $-x$; par conséquent les racines changeraient seulement de signes, et l'équation aurait encore trois racines réelles.

Lorsque la quantité $q^2 + p^3$ est positive, la formule (2) présente encore une imperfection, qui consiste en ce qu'elle peut ne donner pour la racine réelle qu'une expression embarrassée de radicaux, quoique la racine soit rationnelle. On en a un exemple dans l'équation

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Il faut faire dans la formule (2) $p = -2$, $q = -20$, ce qui conduit à

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

La racine réelle se trouve ainsi exprimée sous une forme irrationnelle; cependant elle est commensurable, car l'équation est vérifiée quand on fait $x = 4$.

Pour déduire de la formule (2) la valeur exacte de la racine, lorsqu'elle est rationnelle, il faudrait exécuter sur chacun des radicaux cubiques compris dans la formule une transformation analogue à celle que nous avons exposée au sujet de l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$; mais cette transformation dépend elle-même de la recherche d'une racine rationnelle d'une équation du troisième degré.

Dans le cas où l'on a $q^2 + p^3 = 0$, les quantités A et B sont égales l'une et l'autre à la valeur réelle de $\sqrt[3]{-q}$; et comme $\alpha + \alpha^2 = -1$, on trouve

$$A + B = 2\sqrt[3]{-q},\quad A\alpha + B\alpha^2 = -\sqrt[3]{-q},\quad A\alpha^2 + B\alpha = -\sqrt[3]{-q}.$$

Ainsi, les trois racines de l'équation sont réelles, et deux d'entre elles sont égales.

CHAPITRE HUITIÈME.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. PROGRESSIONS. FRACTIONS CONTINUES.

(On aurait pu ne pas donner place, dans ce chapitre, aux propositions qui se trouvent ordinairement contenues dans les Traités d'arithmétique; mais on a jugé à propos de conserver les plus essentielles, afin de rendre sensible la liaison des principes, et de faire apprécier l'avantage que donne, pour la simplicité des démonstrations, l'emploi des notations et des règles de l'algèbre.)

Propositions sur les nombres premiers, les diviseurs des nombres, et les fractions irréductibles.

216. Théorème Ier. — *Si un nombre* p *divise un produit* ab *de deux facteurs, et s'il est premier avec* a, *il doit diviser* b.

Soit $a > p$, et supposons qu'on opère sur les nombres a et p, comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur; nommons q, q', etc., les quotients successifs qui résulteront de cette opération, et r, r', etc., les restes; on aura

$$a = pq + r, \quad p = rq' + r', \text{ etc.}$$

En multipliant ces égalités par b, et les divisant ensuite par p, il vient

$$\frac{ab}{p} = bq + \frac{rb}{p}, \quad b = \frac{br}{p} \times q' + \frac{r'b}{p}, \text{ etc.}$$

D'après la première égalité, puisque $\frac{ab}{p}$ est un nombre entier, il faut que $\frac{br}{p}$ soit aussi un nombre entier; d'après la deuxième égalité, $\frac{br}{p}$ étant un nombre entier, $\frac{br'}{p}$ doit être

aussi un nombre entier; ainsi de suite. Or a et p étant premiers entre eux, l'un des restes r, r', etc., est égal à l'unité. Donc $\frac{b \times 1}{p}$ ou $\frac{b}{p}$ doit être un nombre entier.

La démonstration ne changerait pas si l'on avait $a < p$.

Corollaire Ier. — Tout nombre premier p, qui divise un produit $abcd$, divise un des facteurs de ce produit. Car, si p ne divise pas a, il est premier avec a, donc il doit diviser bcd. De même, si p ne divise pas b, il est premier avec b, donc il doit diviser cd. Enfin, si p ne divise pas c, il doit diviser d.

Corollaire II. — Tout nombre premier qui divise a^m divise aussi a, car $a^m = a \times a \times a \times$ etc.

Corollaire III. — Lorsqu'un nombre n est divisible par plusieurs nombres d, d', d'', etc., tels que chacun d'eux est premier avec tous les autres, le nombre n est divisible par le produit $dd'd''$.... En effet, n étant divisible par d, on a $n = dq$, et q est un nombre entier. Puisque d' divise n, il doit diviser dq; or d' est premier avec d, donc il doit diviser q. Il suit de là que l'on a $q = d'q'$, q' étant un nombre entier, par conséquent $n = dd'q'$; le nombre n est donc divisible par dd'. En continuant ces raisonnements, on prouvera que n est divisible par $dd'd''$....

217. Théorème II. — *Un nombre* N *ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière.*

Soit $N = abcd\ldots$, les lettres a, b, c, d, etc., désignant des facteurs premiers égaux ou inégaux. Si l'on avait aussi $N = \alpha\beta\gamma\delta\ldots$, en désignant par α, β, γ, δ, etc., d'autres facteurs premiers, il en résulterait $abcd\ldots = \alpha\beta\gamma\delta\ldots$. D'après cette égalité, α doit diviser le produit $abcd$, donc il doit diviser un des facteurs; or tous ces facteurs sont premiers, par conséquent il faut que l'un d'eux soit égal à α. Supposons $a = \alpha$; en supprimant ces facteurs égaux, on ob-

tiendra une nouvelle égalité au moyen de laquelle on prouvera que δ doit être égal à l'un des facteurs b, c, d, etc.; ainsi de suite. Les facteurs des deux produits sont donc égaux chacun à chacun.

Corollaire 1er. — Supposons $N = a^n b^p c^q$, les facteurs a, b, c étant premiers, et les exposants n, p, q étant des nombres entiers positifs, il est évident que le nombre N aura pour diviseurs tous les produits qu'on pourra former avec les puissances des facteurs premiers a, b, c, marquées par les exposants depuis o jusqu'à n pour le premier facteur, depuis o jusqu'à p pour le deuxième, depuis o jusqu'à q pour le troisième; de plus, le nombre N n'aura pas d'autres diviseurs que ces produits, car, s'il en avait d'autres, il se décomposerait de plusieurs manières en facteurs premiers. Il suit de là que les diviseurs de N sont les termes qu'on obtiendra en formant le produit

$$(1+a+a^2+\ldots+a^n)(1+b+b^2+\ldots+b^p)(1+c+c^2+\ldots+c^q).$$

Les termes de ce produit sont tous différents; car il ne s'en trouve pas deux qui soient composés des mêmes facteurs premiers avec les mêmes exposants. Le nombre des diviseurs de N, en y comprenant l'unité et le nombre N, est donc

$$(n+1)(p+1)(q+1).$$

Corollaire II. — La somme des diviseurs du nombre N est la valeur du produit ci-dessus; or, en se reportant au n° 71, on voit que $1+a+a^2+\ldots+a^n$ est le quotient de $a^{n+1}-1$ par $a-1$; la somme des diviseurs de N est donc exprimée par cette formule

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{p+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{q+1}-1}{c-1}.$$

Corollaire III. — Lorsque le nombre N est un carré, le nombre de ses diviseurs est impair; car les exposants n, p,

q, etc., doivent être tous pairs; donc les nombres $n+1$, $p+1$, $q+1$, etc., sont impairs. Lorsque N n'est pas un carré, le nombre des diviseurs est impair; car un des exposants n, p, q, etc., est impair; donc un des facteurs $n+1$, $p+1$, etc., est pair. On parvient aux mêmes conclusions en remarquant que, si d est un diviseur de N plus petit que $\sqrt{N}$, le quotient de la division de N par d sera aussi un diviseur de N, et sera plus grand que $\sqrt{N}$. D'après cette observation, si la racine carrée de N n'est pas exacte, les diviseurs de ce nombre sont en nombre pair, puisque le nombre des diviseurs plus grands que $\sqrt{N}$ est égal à celui des diviseurs plus petits que $\sqrt{N}$. Si $\sqrt{N}$ est un nombre entier, ce nombre fait partie des diviseurs de N, et il y en a, par conséquent, un nombre impair.

Corollaire iv. — Si l'on voulait décomposer le nombre N en deux facteurs, on pourrait prendre successivement, pour l'un des deux facteurs, chacun des diviseurs de N. Mais, si $N = dd'$, les deux diviseurs d et d' ne donnent qu'une seule décomposition; donc, lorsque le nombre N n'est pas un carré, le nombre des décompositions différentes de N en deux facteurs est la moitié du nombre des diviseurs; c'est-à-dire $\frac{1}{2}(n+1)(p+1)(q+1)\ldots$. Quand N est un carré, on peut former ce nombre en multipliant sa racine par elle-même, et le nombre des décompositions est la moitié du nombre des diviseurs augmenté de 1.

Si l'on voulait que les deux facteurs fussent premiers entre eux, le nombre des décompositions ne dépendrait pas des exposants n, p, q, etc., et il serait le même que si l'on avait $N = abc\ldots$; il serait donc la moitié du produit $(1+1)(1+1)(1+1)\ldots$, ou $\frac{1}{2} \times 2^k$, ou 2^{k-1}, en nommant k le nombre des facteurs premiers différents de N.

Corollaire v. — D'après ce qui a été dit dans le corollaire 1er, les diviseurs communs à plusieurs nombres ne

peuvent contenir que des facteurs premiers communs à ces nombres. Par conséquent, le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est le produit de tous les facteurs premiers, égaux ou inégaux, communs à ces nombres.

Corollaire vi. — Il résulte aussi, de ce qui a été dit dans le corollaire 1er, qu'un nombre divisible par plusieurs nombres donnés doit renfermer tous les facteurs premiers égaux ou inégaux contenus dans ces nombres. Par conséquent, le plus petit nombre divisible par plusieurs nombres donnés est le produit de tous les facteurs premiers différents qui entrent dans ces nombres, chaque facteur étant affecté de l'exposant qu'il a dans le nombre où son exposant est le plus fort.

On peut aussi former le plus petit nombre entier divisible par plusieurs nombres donnés, en n'employant que le procédé du plus grand commun diviseur. Soient a et b deux nombres, et d leur plus grand commun diviseur; on aura $a = a'd$, $b = b'd$, et les quotients a' et b' seront premiers entre eux. Soit A un nombre divisible par a; on aura $A = a'dq$, d'où $\frac{A}{b} = \frac{a'q}{b'}$; donc, pour que A soit aussi divisible par b, il faudra que b' divise $a'q$, et puisque les nombres b' et a' sont premiers entre eux, b' devra diviser q. Il suit de là que A sera le plus petit nombre divisible par a et par b, si l'on pose $q = b'$, d'où $A = a'b'd$.

Pour trouver le plus petit nombre divisible par trois nombres a, b, c, on cherchera d'abord le plus petit nombre A divisible par a et b, et ensuite le plus petit nombre divisible par A et c. S'il y a plus de trois nombres, on agira de la même manière.

218. Théorème iii. — *Pour qu'une fraction soit égale à une autre fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, il faut que les deux termes de la première frac-*

tion soient respectivement égaux aux deux termes de la seconde multipliés par un même nombre entier.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux. Si l'on a $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, il en résultera $A = \frac{aB}{b}$; donc b divisera aB; et puisque b est premier avec a, il divisera B; on aura donc $B = bm$, en désignant par m un nombre entier, et, par suite, $A = am$.

Corollaire Ier. — *Une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est irréductible;* car, d'après le théorème précédent, elle ne peut être égale à aucune fraction exprimée avec des termes plus simples.

Corollaire II. — Pour que deux fractions irréductibles soient égales, il faut que les numérateurs soient égaux, ainsi que les dénominateurs.

219. Problème. — *Trouver la plus grande puissance d'un nombre premier θ, qui divise le produit $1.2.3\ldots n$.*

Soit n' la partie entière du quotient de la division de n par θ. Le produit $1.2.3\ldots n$ contient les facteurs θ, 2θ, $3\theta, \ldots, n'\theta$, et ces facteurs sont les seuls qui soient divisibles par θ. La plus haute puissance de θ qui divise le produit proposé, est donc la même que celle qui divise le produit $1.2.3\ldots n'.\theta^{n'}$; on obtiendra donc l'exposant de cette puissance en ajoutant n' à l'exposant de la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n'$. Si n' est plus grand que θ, soit n'' la partie entière du quotient de la division de n' par θ; on aura la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n'$, en multipliant $\theta^{n''}$ par la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n''$. Supposons qu'en nommant n''' la partie entière du quotient de n'' par θ, on ait $n''' < \theta$; le produit $1.2.3\ldots n'''$ ne sera pas divisible par θ, et la puissance demandée sera $\theta^{n'+n''+n'''}$.

Si l'on avait $n = \theta^m$, les nombres n', n''... seraient θ^{m-1}, θ^{m-2}... 1, et leur somme serait $\frac{\theta^m - 1}{\theta - 1}$, ou $\frac{n-1}{\theta - 1}$.

220. Théorème IV. — *Soit* m = ou > n + p + q + etc., *le produit* 1.2.3...n × 1.2...p × 1.2...q × etc., *est un diviseur de* 1.2.3...m.

Il suffit de démontrer qu'un facteur premier quelconque θ, qui ne surpasse pas m, n'est pas contenu dans le premier produit à une puissance plus élevée que celle à laquelle il se trouve dans le second produit. Or soient m', n', p', q', etc., les parties entières des quotients de m, n, p, q, etc., divisés par θ; soient m'', n'', p'', q'', etc., les parties entières des quotients de m', n', p', q', etc., divisés par θ; et ainsi de suite. L'exposant de la plus haute puissance de θ qui divise $1.2.3...m$ est $m' + m'' + m''' +$ etc.; l'exposant de la plus haute puissance de θ contenue dans le produit $1.2...n \times 1.2...p \times 1.2...q \times$ etc., est $n' + n''...+ p' + p''... + q' + q''...+$ etc. Mais, puisque $m =$ ou $> n + p + q +$ etc., en divisant par θ, on a

$$\frac{m}{\theta} = \text{ ou } > \frac{n}{\theta} + \frac{p}{\theta} + \frac{q}{\theta} + \text{etc.},$$

et à fortiori, en ne prenant que les parties entières des quotients,

$$m' = \text{ ou } > n' + p' + q' + \text{etc.}$$

On conclut pareillement, de cette inégalité,

$$m'' = \text{ ou } > n'' + p'' + q'' + \text{etc.};$$

ainsi de suite. Donc, en ajoutant,

$$m' + m''... = \text{ ou } > n' + n''... + p' + p''... + q' + q''...+ \text{etc.}$$

221. Théorème V. — *Soit* p *un nombre premier avec* a; *si l'on divise par* p *les multiples successifs de* a *jusqu'à* (p − 1) a, *les restes de ces divisions seront tous différents.*

Supposons que deux multiples ma et na, moindres que $(p-1)a$, divisés par p, donnent le même reste. En désignant les parties entières des quotients par q et q', on aura

$$ma = pq + r,\ na = pq' + r'; \quad \text{d'où} \quad (m-n)a = p(q-q').$$

On conclut de là que p devrait diviser $(m-n)a$, et comme p est premier avec a, il faudrait que p divisât $m-n$; ce qui est impossible, puisque m et n sont moindres que p.

Remarque. Si l'on divise par p les multiples pa, $(p+1)a$, $(p+2)a$, etc., le premier pa donnera le reste zéro; et les suivants donneront les restes qu'on aura obtenus en divisant a, $2a$, etc., par p; de sorte que les restes se reproduiront périodiquement.

222. Théorème VI. — p *étant un nombre premier qui ne divise pas* a, $a^{p-1}-1$ *est divisible par* p.

D'après la proposition précédente, si l'on divise par p les nombres a, $2a$, $3a$... $(p-1)a$, les restes seront tous différents; ils seront moindres que p, et aucun d'eux ne sera zéro, puisque p est premier avec a, et le multiplicateur de a est moindre que p. Donc ces restes seront tous les nombres depuis 1 jusqu'à $p-1$.

Considérons maintenant les égalités

$$a = pq_1 + r_1,\ 2a = pq_2 + r_2, \ldots, (p-1)a = pq_{p-1} + r_{p-1}.$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, le produit des seconds membres sera un multiple de p, augmenté du produit de tous les restes. Or ce produit est celui des nombres de 1 à $p-1$. Donc

$$1.2.3\ldots(p-1)a^{p-1} = Mp + 1.2.3\ldots p-1,$$

ou $$1.2.3\ldots(p-1)(a^{p-1}-1) = Mp.$$

Il suit de la dernière égalité que p divise le produit $1.2.3\ldots(p-1)(a^{p-1}-1)$. Mais puisque p est premier, il est aussi premier avec chacun des nombres de 1 à $p-1$. Donc il divise $a^{p-1}-1$.

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Fermat.*

Lorsque p est premier avec a, sans être premier absolu, le théorème précédent doit être remplacé par celui-ci :

Si s *est le nombre des entiers plus petits que* p *et premiers avec lui, p divise* $a^s - 1$.

On démontre ce théorème de la même manière que le précédent, en ne considérant que les multiples de a moindres que pa, et premiers avec p, et en remarquant que ces multiples divisés par p donnent des restes qui sont aussi premiers avec p; car, d'après l'égalité $ma = pq + r$, si p et r avaient un facteur commun, ce facteur diviserait ma; donc p ne serait pas premier à la fois avec a et avec m. Il suit de cette observation que le produit des multiples de a moindres que pa, et premiers avec p, est un multiple de p, augmenté du produit de tous les multiplicateurs de a; puisque les restes, tous différents et premiers avec p, sont en même nombre que les multiplicateurs. Donc en nommant R le produit des nombres premiers avec p et plus petits que p, on a $Ra^s = Mp + R$ ou $R(a^s - 1) = Mp$; d'où il résulte que p divise $a^s - 1$, puisqu'il est premier avec R, et il divise $R(a^s - 1)$. Ce dernier théorème comprend le précédent, comme cas particulier; car, lorsque p est premier, on a $s = p - 1$.

Il résulte aussi du second théorème que, lorsque a^{p-1} est la plus faible puissance de a dont la division par p donne le reste 1, p est premier.

Quand p n'est pas premier avec a, il n'existe aucune puissance de a qui, divisée par p, donne le reste 1; car en supposant $a^m = pq + 1$, il s'ensuivrait que le facteur commun à a et p diviserait l'unité.

Remarque. Soit s' l'exposant de la plus faible puissance de a qui, divisée par p, donne le reste 1.

Les puissances de a inférieures à $a^{s'}$ donneront toutes

des restes différents; car, en supposant $a^m = pq + r$, $a^n = pq' + r$, on en conclut $a^m - a^n = p(q - q')$ ou $a^n(a^{m-n} - 1) = p(q - q')$; p diviserait donc $a^n(a^{m-n} - 1)$. Mais puisque p est premier avec a, il est aussi premier avec a^n; donc p diviserait $a^{m-n} - 1$. Donc si m et n étaient moindres que s', $a^{s'}$ ne serait pas la plus faible puissance de a conduisant au reste 1.

L'égalité $a^{s'} = pq + 1$ donne $a^{s'+1} = pqa + a$, par conséquent le reste de la division de $a^{s'+1}$ par p est le même que celui de la division de a par p. $a^{s'+2}$ donne le même reste que a^2; ainsi de suite. Donc si l'on divise par p les puissances consécutives de a, les restes se reproduiront périodiquement.

Si s' est plus petit que s, en désignant, comme ci-dessus, par s le nombre des entiers moindres que p et premiers avec p, s' sera un diviseur de s; car, d'après la périodicité des restes, les seules puissances de a qui donneront le reste 1, seront $a^{s'}$, $a^{2s'}$, $a^{3s'}$, etc.

223. Problème. — *Trouver combien il y a de nombres entiers premiers avec un nombre donné* N, *et plus petits que ce nombre*

Soit $N = aN'$, a étant un nombre premier, et N' un nombre qui peut être divisible par une puissance quelconque de a. Les nombres divisibles par a, dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, sont $a, 2a, 3a, \ldots, N'a$. Si on les exclut, les nombres qui restent sont premiers avec a, et il y en a un nombre égal à $N - N'$ ou $N'(a - 1)$.

Soit $N = abN''$, a et b étant des facteurs premiers différents. La suite $1, 2, 3, \ldots, N$ contient des nombres qui sont premiers avec a sans être premiers avec b, d'autres qui sont premiers avec b sans être premiers avec a, et d'autres qui sont premiers avec ab. Suivant la formule précédente, les nombres premiers avec a sont en nombre égal

à $N''b(a-1)$. Cherchons combien il se trouve dans ces nombres de multiples de b. Avant l'exclusion des multiples de a de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, les multiples de b étaient $b, 2b, 3b, \ldots, N''ab$. Dans cette dernière suite, il y a autant de nombres premiers avec a qu'il s'en trouve dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N''a$; donc il y en a un nombre égal à $N''(a-1)$. En retranchant ce nombre de $N''b(a-1)$, on aura celui des nombres premiers avec le produit ab dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, lequel sera, par conséquent, $N''(a-1)(b-1)$.

Si $N = abcN'''$, on trouvera, par un raisonnement semblable, que le nombre des termes premiers avec abc, dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, sera $N'''(a-1)(b-1)(c-1)$. En effet, d'après la formule précédente, les nombres premiers avec ab, dans cette suite, sont en nombre égal à $N'''c(a-1)(b-1)$. Les multiples de c dans cette même suite sont $c, 2c, 3c, \ldots, N'''abc$; et ceux de ces multiples qui sont premiers avec ab, sont en nombre égal à celui des nombres premiers avec ab dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N'''ab$, lequel est $N'''(a-1)(b-1)$. On obtiendra donc le nombre des termes premiers avec abc de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, en retranchant $N'''(a-1)(b-1)$ de $N'''c(a-1)(b-1)$; ce qui donne $N'''(a-1)(b-1)(c-1)$.

S'il y avait un plus grand nombre de facteurs premiers, on obtiendrait une expression semblable aux précédentes.

Maintenant, supposons le nombre N décomposé en facteurs premiers, et soit $N = a^n b^p c^q \ldots$; le quotient de N par $abc\ldots$ sera $a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} \ldots$. D'ailleurs les nombres premiers avec N seront aussi premiers avec $abc\ldots$, et les nombres premiers avec $abc\ldots$ seront premiers avec N. Donc le nombre des entiers premiers avec N, et moindres que N, sera

$$a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} (a-1)(b-1)(c-1).$$

Caractères de divisibilité des nombres par des diviseurs quelconques.

224. Soit N un nombre entier, écrit dans le système de numération dont la base est b. Concevons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, sauf la dernière qui pourra en avoir moins; et soient, en allant aussi de droite à gauche, A, B, C, D,... ces tranches considérées comme autant de nombres isolés; on aura

$$N = A + Bb^m + Cb^{2m} + Db^{3m} + \ldots.$$

On peut mettre cette expression du nombre N sous les trois formes suivantes :

$$N = b^m(B + Cb^m + Db^{2m} + \ldots) + A,$$

$$N = [B(b^m - 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} - 1) + \ldots] + (A + B + C + D + \ldots),$$

$$N = [B(b^m + 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} + 1) + \ldots] + (A + C + \ldots) - (B + D + \ldots).$$

Les premières parties de ces trois expressions de N sont respectivement divisibles par b^m, $b^m - 1$, $b^m + 1$ (*voyez* le n° 71); et de là résultent les conséquences ci-après :

1°. *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^ième^ *puissance de la base du système, est le même que celui qu'on obtient en divisant sa première tranche de* m *chiffres à droite par ce diviseur.*

2°. *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^ième^ *puissance de la base, diminuée d'une unité, est le même que celui qu'on obtient en divisant la somme des tranches de* m *chiffres par ce diviseur.*

3°. *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* $m^{\text{ième}}$ *puissance de la base, augmentée d'une unité, est le même que celui qu'on obtient en divisant par le même diviseur la somme des tranches de* m *chiffres de rangs impairs, moins la somme des tranches de* m *chiffres de rangs pairs.*

Par conséquent, pour que la première division soit possible, il suffira, dans chaque cas, que la seconde, plus simple, se fasse exactement.

Lorsqu'on veut reconnaître, au moyen de ces règles, si un nombre N est divisible par un autre nombre p, il faut d'abord chercher quelle est la puissance de la base qui, divisée par p, donne pour reste 0, 1 ou -1.

Si le nombre p ne contient que des facteurs premiers de la base b, il y a une puissance de b exactement divisible par p; et l'on doit appliquer la première règle.

Lorsque le nombre p est premier avec la base, il existe une puissance de b qui, diminuée de 1, donne un nombre divisible par p (n° 222); de sorte qu'on peut appliquer la seconde règle.

Supposons que p soit un nombre premier, et soit b^m la plus faible puissance de b qui, diminuée de 1, donne un nombre divisible par p. Si m est un nombre pair $2n$, p divisera b^n+1; car, puisque l'on a $b^{2n}-1=(b^n-1)(b^n+1)$, il faudra que p divise ou b^n-1 ou b^n+1, et, d'après l'hypothèse, il ne peut pas diviser b^n-1.

Soit $p=37$. En divisant les puissances successives de 10 par 37, on trouve que la troisième puissance, qui est 1000, donne le reste $+1$; il en résulte que la divisibilité d'un nombre par 37 dépend de la divisibilité par 37 de la somme des tranches de trois chiffres.

Soit encore $p=7$. La plus faible puissance de 10 qui, divisée par 7, donne pour reste $+1$, est 1000000; ainsi la divisibilité d'un nombre par 7 dépend de la divisibilité

par 7 de la somme des tranches de six chiffres. Mais 1000 divisé par 7 donne pour reste — 1 ; et il en résulte qu'on reconnaît aussi qu'un nombre est divisible par 7, quand la somme des tranches de trois chiffres de rangs impairs, diminuée de la somme des tranches de trois chiffres de rangs pairs, est divisible par 7.

Propositions sur les racines. — Méthode abrégée pour extraire la racine carrée d'un nombre.

225. Théorème VII. — *La racine d'un degré quelconque d'un nombre entier ne peut être qu'un nombre entier ou un nombre incommensurable.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir qu'une racine d'un nombre entier ne peut jamais être une fraction. Or, si la racine du degré m d'un nombre entier a était une fraction $\frac{b}{c}$, qu'on pourrait toujours supposer irréductible, on aurait $\frac{b^m}{c^m} = a$: il faudrait donc que b^m fût divisible par c^m. Mais b et c étant premiers entre eux, b^m et c^m sont aussi premiers entre eux ; car si un facteur premier divisait à la fois b^m et c^m, ce facteur premier devrait diviser b et c. La fraction $\frac{b^m}{c^m}$ ne peut donc pas être égale à un nombre entier. L'hypothèse que l'on a établie ne peut donc pas être admise.

226. Théorème VIII. — *Pour que la racine du degré* m *d'une fraction irréductible soit commensurable, il faut que les deux termes de la fraction soient des puissances exactes du degré* m.

Soit $\frac{a}{b}$ un fraction irréductible. Si la racine du degré m de cette fraction est exprimée par une fraction $\frac{c}{d}$, qu'on

pourra toujours supposer irréductible, on aura $\frac{a}{b} = \frac{c^m}{d^m}$. Or, la fraction $\frac{c}{d}$ étant irréductible, il en est de même de la fraction $\frac{c^m}{d^m}$; et puisque $\frac{a}{b}$ est pareillement une fraction irréductible, l'égalité ci-dessus ne peut exister qu'autant que l'on a $a = c^m$ et $b = d^m$ (n° 218).

227. Lemme 1er. — *Les puissances successives d'un nombre* A *plus grand que l'unité sont de plus en plus grandes, et elles croissent au delà de toute limite.*

De ce que l'on a $A > 1$, on conclut $A^2 > A$, $A^3 > A^2, \ldots$, $A^{m+1} > A^m$.

En outre, si l'on pose $A - 1 = B$, on aura $A^2 - A > B$ et à fortiori $A^3 - A^2 > B, \ldots, A^m - A^{m-1} > B$. En ajoutant toutes ces relations (n° 152), on obtient $A^m - 1 > mB$ ou $A^m > 1 + mB$. Donc, pour que A^m surpasse une quantité donnée H, il suffira de prendre m de telle sorte que l'on ait $1 + mB > H$, ou $m > \frac{H-1}{B}$.

228. Lemme II. — *Les puissances successives d'un nombre* a *plus petit que l'unité sont de plus en plus petites, et elles s'approchent indéfiniment de zéro.*

De ce que l'on a $a < 1$, on conclut $a^2 < a$, $a^3 < a^2, \ldots$, $a^{m+1} < a^m$.

En outre, si l'on pose $A = \frac{1}{a}$, A sera plus grand que l'unité; on aura $a = \frac{1}{A}$, d'où $a^m = \frac{1}{A^m}$; donc, en désignant par h une quantité donnée aussi petite que l'on voudra, on satisfera à la condition $a^m < h$, si l'on satisfait à celle-ci, $\frac{1}{A^m} < h$, ou $A^m > \frac{1}{h}$. Or, d'après la proposition précédente,

on peut toujours assigner une valeur de m qui satisfasse à la dernière condition.

229. Théorème IX. — *La racine du degré* m *d'un nombre diffère d'autant moins de l'unité que le degré* m *est plus grand, et l'on peut prendre* m *assez grand pour que cette racine diffère de l'unité d'une quantité aussi petite qu'on le veut.*

Considérons d'abord un nombre A plus grand que l'unité. Soient α la racine du degré m de A, et β la racine du degré $m+n$ du même nombre; les nombres α et β seront nécessairement plus grands que 1, et l'on aura $\alpha^m = \beta^{m+n} = \beta^m \times \beta^n$; donc $\alpha^m > \beta^m$; par conséquent $\alpha > \beta$.

Soit ε une quantité donnée aussi petite qu'on le voudra; si l'on prend pour m une valeur telle, qu'on ait $(1+\varepsilon)^m > A$ (n° 227), la racine du degré m de A sera moindre que $1+\varepsilon$.

Considérons maintenant un nombre a, moindre que l'unité. Soient α la racine du degré m de a, et β la racine du degré $m+n$ du même nombre; les nombres α et β seront plus petits que 1, et l'on aura $\alpha^m = \beta^{m+n} = \beta^m \times \beta^n$; donc $\alpha^m < \beta^m$; par conséquent $\alpha < \beta$.

Soit encore ε une quantité donnée aussi petite qu'on le voudra; si l'on prend pour m une valeur telle, qu'on ait $(1-\varepsilon)^m < a$ (n° 228), la racine du degré m de a sera plus grande que $1-\varepsilon$.

230. Théorème X. — *Lorsqu'on a trouvé une partie* a *de la racine carrée d'un nombre entier* n, *composée de plus de la moitié des chiffres de la racine, à partir du chiffre des plus hautes unités, la quantité qu'il faut ajouter à* a *pour avoir la racine à moins d'une unité, est égale à la partie entière du quotient que l'on trouve en divisant le reste* $n - a^2$ par $2a$.

Supposons, par exemple, que le nombre n dont on demande la racine carrée soit 2354973285267; la racine doit

être composée de sept chiffres, et l'on trouve 1534 pour le nombre formé des quatre premiers chiffres; en sorte que $a = 1534000$. Le reste $n - a^2$ est 1817285267, et la division de ce reste par 2×1534000 donne pour quotient 592; il en résulte que la racine est 1534592 à moins d'une unité.

Pour démontrer l'exactitude de cette règle, représentons par $a + b$ la racine carrée du nombre n, on aura

$$n = a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{n - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}:$$

soit q la partie entière du quotient de la division de $n - a^2$ par $2a$, et soit r le reste; d'où $n - a^2 = 2aq + r$; la dernière égalité ci-dessus deviendra

$$b = q + \frac{r}{2a} - \frac{b^2}{2a}.$$

La partie a, qui est formée des plus hautes unités de la racine, contient autant de chiffres qu'il doit s'en trouver dans la racine; et, par hypothèse, le nombre des chiffres de la partie entière de b est moindre que la moitié du nombre des chiffres de la racine. Il suit de là que la partie entière de b^2 a moins de chiffres que a; donc $\frac{b^2}{2a}$ est une quantité moindre que l'unité. D'ailleurs $\frac{r}{2a}$ est aussi moindre que l'unité. Donc le nombre entier q est la valeur de b à moins d'une unité.

Comme on a $(a+q)^2 = a^2 + 2aq + q^2$ et $n = a^2 + 2aq + r$, si $r > q^2$, $a + q$ sera la valeur approchée de la racine par défaut; si $r < q^2$, cette valeur sera approchée par excès; enfin, si $r = q^2$, $a + q$ sera la valeur exacte de la racine.

Des progressions arithmétiques ou par différence.

231. Une *progression arithmétique* ou *par différence* est une suite de termes dans laquelle chaque terme est égal

au précédent augmenté d'une quantité constante. Cette quantité constante se nomme la *raison* de la progression.

Suivant que la raison est positive ou négative, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Pour indiquer que les nombres a, b, c, etc., forment une progression par différence, on écrit

$$\div a.b.c.d. \text{ etc.}$$

Cette notation résulte de ce que trois termes consécutifs quelconques de la progression forment une proportion continue par différence.

Si l'on représente par r la raison de la progression, et par l le $n^{ième}$ terme, c'est-à-dire le terme qui en a $n-1$ avant lui, on aura

$$b = a + r, \quad c = a + 2r, \quad d = a + 3r,$$

et, en général,

$$(1) \qquad l = a + (n-1)r.$$

La dernière relation fait connaître l'une des quatre quantités a, r, n, l, lorsque les trois autres sont connues.

Si l'on veut *insérer* m *moyens différentiels ou arithmétiques entre deux nombres donnés* a *et* l, on conclura de la relation (1)

$$r = \frac{l-a}{m+1}.$$

Cette formule indique qu'*on obtiendra la raison en divisant la différence des deux nombres donnés par le nombre des moyens augmenté de* 1.

Nommons S la somme des termes de la progression; on aura

$$S = a + (a+r) + (a+2r) \ldots + (l+2r) + (l-r) + l,$$

et en considérant les termes dans l'ordre inverse,

$$S = l + (l-r) + (l-2r) \ldots + (a+2r) + (a+r) + a.$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre et terme à terme, et désignant toujours par n le nombre des termes de la progression, on trouve

$$2S = (a + l)n,$$

d'où

$$S = \frac{(a + l)n}{2}. \tag{2}$$

Donc, *la somme des termes d'une progression par différence est égale à la demi-somme des termes extrêmes répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression.*

En remplaçant l, dans la formule (2), par la valeur que donne l'équation (1), on trouve

$$S = \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2}. \tag{3}$$

232. Lorsque l'on connaîtra trois des cinq quantités a, r, n, l, S, on pourra déterminer les deux autres, au moyen des équations (1) et (2) ou (1) et (3).

En choisissant de toutes les manières deux inconnues, parmi les cinq quantités a, r, n, l, S, on aura à résoudre dix problèmes qui offriront un exercice utile. On vérifiera aisément l'exactitude des résultats que l'on obtiendra dans chacun de ces problèmes, en attribuant aux quantités connues des valeurs déduites d'une progression numérique choisie à volonté.

Lorsque le nombre n des termes est inconnu, la question n'est possible qu'autant que l'on trouve pour n une valeur entière et positive.

Les équations (1) et (2) expriment toutes les relations entre les cinq quantités a, r, n, l, S, qui résultent de la loi de la progression; car, si l'on obtenait une troisième équation entre ces quantités, il s'ensuivrait que, deux de ces quantités étant données, on pourrait trouver les trois

autres; or on voit immédiatement que, lorsqu'on ne donne que deux des quantités ci-dessus, la progression est toujours indéterminée.

Des progressions géométriques ou par quotient.

233. Une *progression géométrique* ou *par quotient* est une suite de termes dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par une quantité constante. Cette quantité constante se nomme la *raison* de la progression.

Suivant que la raison est plus grande ou plus petite que l'unité, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Pour indiquer que les nombres a, b, c, etc., forment une progression par quotient, on écrit

$$\div\!\div\ a : b : c : d : \text{etc.}$$

Cette notation résulte de ce que trois termes consécutifs quelconques de la progression forment une proportion continue par quotient.

En représentant par r la raison de la progression, et par l le $n^{\text{ième}}$ terme, c'est-à-dire le terme qui en a $n-1$ avant lui, on a

$$b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3;$$

et, en général,

$$(1) \qquad l = ar^{n-1}.$$

La dernière relation fait connaître l'une des quatre quantités a, r, n, l, lorsque les trois autres sont connues.

Si l'on veut *insérer* m *moyens géométriques entre deux nombres donnés* a *et* l, on conclura de la relation (1)

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Cette formule indique que, *pour obtenir la raison, il faut diviser les deux nombres donnés l'un par l'autre, et ex-*

traire du quotient la racine dont le degré est marqué par le nombre des moyens augmenté de 1.

Nommons S la somme des termes de la progression; on aura

$$(2) \qquad S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1},$$

et en multipliant les deux membres par r,

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

En retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, on obtient

$$(r-1)S = ar^n - a,$$

d'où

$$(3) \qquad S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1},$$

et, en remplaçant ar^{n-1} par l,

$$(4) \qquad S = \frac{lr - a}{r-1}.$$

Il est facile de vérifier à posteriori que l'expression $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ donne la somme des n premiers termes de la progression dont le premier terme est a, et dont la raison est r; car, en effectuant la division de $r^n - 1$ par $r - 1$, et multipliant le quotient par a, on retrouve la progression.

234. Lorsque l'on connaîtra trois des cinq quantités a, r, n, l, S, on pourra trouver les deux autres au moyen de l'équation (1) jointe à l'une des équations (2), (3) et (4).

En choisissant les deux inconnues de toutes les manières possibles, on aura à résoudre dix problèmes différents. Mais ces problèmes, à l'exception de quatre seulement, exigent la connaissance des méthodes que nous exposerons dans la suite; car, lorsque l'une des inconnues est le nombre des termes, il faut résoudre une équation dans laquelle cette inconnue est en exposant; et lorsque les inconnues sont a

et r, ou l et r, on a à résoudre une équation qui est du degré n quand on prend les équations (1) et (3) ou (1) et (4), et du degré $n-1$ quand, au lieu de l'équation (3) ou (4), on prend l'équation (2).

On voit aussi, comme dans le n° 232, que les équations (1) et (3) expriment toutes les relations entre les cinq quantités a, r, n, l, S, qui résultent de la loi de la progression

235. Quand on fait $r=1$ dans la formule (3), il vient $S=\frac{0}{0}$. Mais, si l'on effectue d'abord la division de r^n-1 par $r-1$, on est ramené à l'équation (2), et en supposant $r=1$, on obtient pour S la valeur déterminée $S=na$.

Lorsque, la raison étant inconnue, on se sert, pour la déterminer, de l'équation (3), on trouve que cette équation est vérifiée par $r=1$; car, en chassant le dénominateur, l'hypothèse $r=1$ réduit les deux membres à zéro. On évite la solution $r=1$, qui est généralement étrangère à la question, en faisant usage de l'équation (2) au lieu de l'équation (3).

236. Occupons-nous actuellement du cas où la progression est décroissante et se prolonge indéfiniment. On a, d'après la formule (3),

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

Or, r étant un nombre plus petit que 1, à mesure que le nombre n augmente, la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devient de plus en plus petite; et l'on peut prendre n assez grand pour que $\frac{ar^n}{1-r}$ ait une valeur moindre que toute quantité donnée (n° 228). Donc, à mesure que l'on prend plus de termes consécutifs de la progressiou, à partir du premier terme,

la somme S approche de plus en plus de $\frac{a}{1-r}$; et l'on peut prendre assez de termes pour que la somme de ces termes diffère aussi peu qu'on le veut de $\frac{a}{1-r}$. On dit, par cette raison, que la somme d'un nombre quelconque de termes de la progression, à partir du premier terme, a pour *limite* la fraction $\frac{a}{1-r}$; et si l'on a à considérer la somme de tous les termes de la progression en nombre infini, cette somme doit être regardée comme *rigoureusement égale* à $\frac{a}{1-r}$.

Soit, par exemple, la progression

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \text{etc.}$$

On a $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{1-r} = 2$; ainsi la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de la progression proposée, à partir du premier terme, est toujours inférieure à 2; elle approche d'autant plus de 2 que l'on prend plus de termes; et la somme de tous les termes de cette progression prolongée indéfiniment est égale à 2.

On peut parvenir aux mêmes conclusions par la seule inspection de la progression; car la somme des deux premiers termes ne diffère de 2 que de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$; donc celle des trois premiers termes ne diffère du même nombre 2 que de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{8}$; celle des quatre premiers termes ne diffère de 2 que de $\frac{1}{8}$; ainsi de suite. Donc, en général, la somme des n premiers termes ne diffère de 2 que d'une quantité égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$. On peut donc prendre le nombre n assez grand pour que cette différence soit aussi petite qu'on le veut; et lorsque n est infini, cette différence doit être regardée comme nulle.

La valeur d'une fraction décimale périodique est la somme des termes d'une progression décroissante et indéfinie. Soit, par exemple, la fraction décimale

$$0,324324324 \text{ etc.}$$

Les différentes périodes forment une progression géométrique décroissante, dont la raison est $\frac{1}{1000}$; et, d'après la règle précédente, la valeur de la fraction prolongée indéfiniment est égale au quotient de $\frac{324}{1000}$ par $1 - \frac{1}{1000}$, ou $\frac{324}{999}$.

On retrouve ainsi la règle que l'on donne dans les Traités d'arithmétique; et, au moyen de cette règle, on découvre aisément celle qu'il faut suivre pour évaluer les fractions décimales périodiques, dans lesquelles la période ne commence pas immédiatement après la virgule.

Notions élémentaires sur la convergence et la divergence des séries.

237. On nomme *série* une suite de termes, en nombre infini, qui dérivent les uns des autres suivant une loi déterminée. Quand une série est telle, que la somme d'un nombre limité de termes consécutifs, à partir d'un certain rang, s'approche de plus en plus d'une limite fixe, à mesure que le nombre de ces termes devient plus grand, de manière à pouvoir différer aussi peu qu'on le veut de cette limite, on dit que la série est *convergente*. Quand la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de la série ne converge vers aucune limite fixe, on dit que la série est *divergente*.

Il résulte de ce qui a été dit sur les progressions géométriques décroissantes prolongées indéfiniment, qu'une semblable progression est une série convergente; par conséquent, toute série dont les termes décroissent plus rapi-

dement que ceux d'une progression géométrique est aussi convergente.

238. Considérons, par exemple, la série suivante, dans laquelle chaque terme, à partir du deuxième, est formé en divisant celui qui le précède par le nombre qui en marque le rang,

$$1, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \ldots, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \text{ etc.}$$

Les termes dont le rang est supérieur à n sont

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}, \quad \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)(n+2)}, \text{ etc.};$$

ils sont donc respectivement inférieurs, à l'exception du premier, aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1}{n^2}, \text{ etc.};$$

la somme de ces termes, pris en tel nombre que l'on voudra, sera donc toujours inférieure à la somme des termes correspondants de la progression géométrique; et, à plus forte raison, à la limite de la progression, qui est

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{1}{n-1}.$$

Or cette dernière quantité décroît infiniment à mesure que n augmente. Par conséquent, l'erreur que l'on commet en prenant la somme d'un nombre limité de termes de la série proposée au lieu de la somme totale, est d'autant plus petite que le nombre de ces termes est plus grand; et cette erreur peut devenir moindre que toute quantité donnée. Donc la série est convergente.

La somme de tous les termes de cette série est souvent

employée dans les parties élevées des mathématiques; on la désigne par la lettre e. En ajoutant les n premiers termes, on obtient une valeur approchée du nombre e; et, d'après ce qui précède, l'erreur est moindre que

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\times\frac{1}{n-1}.$$

Si l'on prend, par exemple, $n=11$, on trouve approximativement

$$e=2,7182818;$$

dans ce cas l'erreur est moindre que

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}\times\frac{1}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{36288000};$$

par conséquent elle n'influe pas sur les sept premières décimales.

Le nombre e est incommensurable. En effet, on a $e<3$; car la somme des termes de la série, à partir de $\frac{1}{2}$, est plus petite que 1. Le nombre e ne pouvant être entier, puisqu'il est compris entre 2 et 3, supposons qu'il soit fractionnaire, et représentons-le par $\frac{m}{n}$, m et n étant deux nombres entiers; on aura

$$\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots n+1}+\text{etc.}$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par $1.2.3\ldots n$, le premier membre deviendra un nombre entier. Les termes du second membre, jusqu'au terme $\frac{1}{1.2\ldots n}$ inclusivement, donneront des nombres entiers. Il faudra donc que la somme de tous les termes suivants soit aussi un nombre entier. Or, après la multiplication de tous les termes par $1.2.3\ldots n$, la somme des termes

fractionnaires est

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc.};$$

elle est donc moindre que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\text{etc.}$$

Cette dernière somme est plus petite que l'unité; car elle est égale à $\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ ou $\frac{1}{n}$. Le nombre e n'est donc pas un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers.

239. Il est essentiel de remarquer que les termes d'une série peuvent décroître indéfiniment, sans que la série soit convergente. Prenons, par exemple, la série

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \text{etc.}$$

Les termes décroissent indéfiniment; mais si l'on considère la somme des termes à partir de $\frac{1}{n+1}$ jusqu'à $\frac{1}{2n}$, savoir,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n},$$

cette somme est formée de n parties dont la dernière est moindre que chacune des précédentes, elle est donc supérieure, quel que soit n, au produit $n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Il résulte de là que la somme de tous les termes qui suivent $\frac{1}{n}$, dans la série proposée, est formée d'un nombre infini de parties plus grandes que $\frac{1}{2}$, de sorte que cette somme a une valeur infinie. Par conséquent, la série est divergente.

240. Si l'on change les signes des termes de rang pair, dans la dernière série, elle deviendra convergente. En général, *lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment, et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Pour démontrer cette proposition, considérons la série

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots \pm a_n \mp a_{n+1}, \text{ etc.}$$

Désignons la somme des termes, à partir de $\pm a_n$, par $\pm r_n$, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le terme a_n sera positif ou négatif, on aura

$$r_n = a_n - a_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+3}) + (a_{n+4} - a_{n+5}) + \text{etc.}$$

Puisque, par hypothèse, les termes a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, etc., vont en décroissant, les différences $a_n - a_{n+1}$, $a_{n+2} - a_{n+3}$, etc., sont toutes positives; donc r_n est une quantité positive, et on a $r_n > a_n - a_{n+1}$. Mais on peut aussi écrire l'expression de r_n sous cette autre forme

$$r_n = a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \text{etc.};$$

et par là on voit que $r_n < a_n$. Donc, si a_n décroît indéfiniment, lorsque n augmente indéfiniment, r_n décroîtra aussi indéfiniment. La série sera donc convergente.

Des fractions continues.

241. On appelle *fraction continue* une expression de cette forme :

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \text{etc.}}}}$$

En effectuant les calculs indiqués dans une semblable expression, on obtient pour résultat une fraction ordinaire qui est la valeur de la fraction continue.

Soit, par exemple, la fraction continue

$$3+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}};$$

on trouve successivement

$$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4},\quad \frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7},\quad 5+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=5+\frac{4}{7}=\frac{39}{7},$$

$$\frac{2}{5+\cfrac{1}{1+\frac{3}{4}}}=\frac{14}{39},\quad 3+\frac{2}{5+\cfrac{1}{1+\frac{3}{4}}}=3+\frac{14}{39}=\frac{131}{39}.$$

Nous ne considérerons que les fractions continues dans lesquelles les numérateurs 6, γ, δ, etc., sont égaux à l'unité, et qui sont par conséquent de cette forme :

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}.$$

Nous supposerons, de plus, que a, b, c, d, etc., sont des nombres entiers positifs.

242. Les fractions continues de cette dernière forme se présentent toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires, ou des quantités irrationnelles, dont on peut avoir la valeur approchée à moins d'une unité. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque x, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier. Si l'on cherche d'abord le nombre entier a qui approche le plus de la valeur de x, la différence $x-a$ sera une fraction plus petite que l'unité, qu'on pourra représenter par $\frac{1}{y}$, y étant un nombre plus grand que l'unité; si l'on

cherche, de même, le nombre entier b qui approche le plus de la valeur de y, la différence $y - b$ pourra être représentée par $\frac{1}{z}$, z étant un nombre plus grand que l'unité. En continuant ainsi, on aura

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z}, \quad z = c + \frac{1}{u}, \quad u = d + \frac{1}{v}, \text{ etc.};$$

d'où l'on conclut

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

Si, parmi les quantités y, z, u, v, etc., il s'en trouve une qui soit exprimée exactement par un nombre entier, la fraction continue se terminera. Dans le cas contraire, la fraction continue se prolongera indéfiniment.

243. Supposons que la quantité qu'on veut mettre en fraction continue soit un nombre fractionnaire donné $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers.

Le nombre entier qui approche le plus de cette quantité est le quotient de la division de A par B. Nommant a ce quotient et C le reste, on a

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{\left(\frac{B}{C}\right)}.$$

Soient b le quotient de la division de B par C, et D le reste, on a

$$\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C} = b + \frac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)}.$$

Sans pousser plus loin cette explication, on voit que,

pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, il faut opérer sur les deux termes de cette fraction comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur, en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur. Si les quotients successifs qu'on obtient par cette opération sont a, b, c, d, *etc., le premier quotient* a *pouvant être zéro, la fraction continue est*

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

On trouve de cette manière

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}.$$

Comme la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres conduit toujours à un reste nul, et par conséquent à un quotient qui est un nombre entier, *toute quantité commensurable peut être exprimée par une fraction continue qui se termine.*

Réciproquement, *toute fraction continue qui se termine est l'expression d'une quantité commensurable;* puisque l'on peut en obtenir exactement la valeur, exprimée par une fraction ordinaire.

Il suit de là qu'*une quantité incommensurable ne peut donner qu'une fraction continue qui se prolonge indéfiniment.*

244. Pour montrer un exemple de la réduction d'une quantité irrationnelle en fraction continue, prenons l'ex-

pression

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}.$$

La racine carrée de 7 étant comprise entre 2 et 3, la quantité proposée est comprise entre $\frac{5}{2}$ et $\frac{6}{2}$; la partie entière de cette quantité est donc 2, et on peut poser

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2 + \frac{1}{y}.$$

On conclut de là

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Puisque la racine carrée de 7 est comprise entre 2 et 3, la valeur de y est comprise entre $\frac{3}{3}$ et $\frac{4}{3}$; on posera donc

$$y = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{z}.$$

Cette relation donne

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}, \quad z = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2.$$

En continuant de la même manière, on trouve

$$z = \sqrt{7}+2 = 4 + \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{u} = \sqrt{7}-2, \quad u = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{v},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}, \quad v = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}, \quad t = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}, \quad \text{ou} \quad t = y.$$

D'après ces calculs, le développement de $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ en fraction continue est

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}}}}$$

Cette fraction continue est périodique; car, à cause de $t=y$, les quatre dénominateurs 1, 4, 1, 1 se reproduiront indéfiniment, dans le même ordre.

245. Considérons la fraction continue littérale

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

On trouve, au moyen des règles relatives aux fractions,

$$a=\frac{a}{1},\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{(abc+c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b},\ \text{etc.}$$

Les fractions

$$\frac{a}{1},\ \frac{ab+1}{b},\ \frac{(ab+1)c+a}{bc+1},\ \frac{(abc+c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b},\ \text{etc.},$$

sont désignées sous le nom de *fractions convergentes* ou de *réduites*. Les fractions $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, etc., sont nommées *fractions intégrantes*, et les quantités a, b, c, etc., sont ap-

pelées *quotients incomplets*. On verra bientôt la raison de ces différentes dénominations.

En examinant attentivement les réduites ci-dessus, on voit que, pour la troisième réduite, *le numérateur est le produit du numérateur de la réduite précédente par le dénominateur de la dernière fraction intégrante, augmenté du numérateur de la réduite qui précède de deux rangs; le dénominateur est pareillement le produit du dénominateur de la réduite précédente par le dénominateur de la dernière fraction intégrante, augmenté du dénominateur de la réduite qui précède de deux rangs.* On observe la même règle à l'égard de la quatrième réduite.

Pour démontrer que *cette règle s'applique généralement à toutes les réduites*, il suffit de faire voir que, si elle convient à trois réduites consécutives de rang quelconque, elle doit aussi convenir à la réduite suivante. A cet effet, considérons quatre réduites consécutives, que nous désignerons par

$$\frac{P}{P'},\quad \frac{Q}{Q'},\quad \frac{R}{R'},\quad \frac{S}{S'}.$$

Nommons r le dénominateur de la dernière fraction intégrante comprise dans $\frac{R}{R'}$, s le dénominateur de la dernière fraction intégrante comprise dans $\frac{S}{S'}$, et supposons que l'on ait $R = Qr + P$, $R' = Q'r + P'$. La réduite $\frac{S}{S'}$ peut se déduire de $\frac{R}{R'}$ en y remplaçant r par $r + \frac{1}{s}$. On aura donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{Q\left(r + \frac{1}{s}\right) + P}{Q'\left(r + \frac{1}{s}\right) + P'} = \frac{s(Qr + P) + Q}{s(Q'r + P') + Q'} = \frac{Rs + Q}{R's + Q'}.$$

On voit par là que la réduite $\frac{S}{S'}$ se forme au moyen des réduites précédentes, suivant la règle énoncée ci-dessus.

Calculons, d'après cette règle, les réduites de la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

On forme d'abord les deux premières réduites, et les autres s'obtiennent ensuite comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 9 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{1}, & \frac{5}{4}, & \frac{46}{37}, & \frac{97}{78}, & \frac{143}{115}, & \frac{240}{193}, & \frac{1103}{887}. \end{array}$$

On écrit sur une même ligne les quotients incomplets successifs 9, 2, 1, 1, 4. On multiplie les deux termes 5 et 4 de la deuxième réduite par 9, et l'on ajoute respectivement aux produits les termes 1 et 1 de la première réduite; on a ainsi les deux termes 46 et 37 de la troisième réduite. On multiplie ces deux termes par 2, et l'on ajoute respectivement aux produits les deux termes 5 et 4 de la deuxième réduite; ce qui donne les deux termes 97 et 78 de la quatrième réduite. Ainsi de suite. La dernière réduite est toujours la valeur exacte de la fraction continue.

Lorsque la fraction continue n'a pas de partie entière, on prend $\frac{0}{1}$ pour la première réduite.

246. *La valeur de la fraction continue est comprise entre deux réduites consécutives quelconques.*

Reportons-nous à la fraction continue littérale que nous avons considérée dans le n° 245, et désignons par x la valeur de cette fraction continue. On voit immédiatement que la première réduite $\frac{a}{1}$ est plus petite que la quantité x.

puisqu'on néglige la quantité $\frac{1}{b + \text{etc.}}$. La deuxième réduite $a + \frac{1}{b}$ est plus grande que x, puisqu'on néglige une partie du dénominateur $b + \frac{1}{c + \text{etc.}}$. On pourrait raisonner de la même manière pour les réduites suivantes; mais on peut aussi démontrer généralement la propriété énoncée, comme il suit.

En conservant les mêmes désignations que dans le n° 245, on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'}.$$

Pour déduire la valeur de x de celle de $\frac{R}{R'}$, il suffirait de remplacer, dans l'expression de cette réduite, r par $r + \frac{1}{s + \text{etc.}}$. Nommons y cette dernière quantité, qui est toujours positive et plus grande que l'unité; on aura

$$x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'},$$

d'où l'on conclut

$$x - \frac{P}{P'} = \frac{(QP' - Q'P)y}{(Q'y + P')P'}, \quad x - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{(Q'y + P')Q'}.$$

On voit par les deux dernières égalités que les deux différences $x - \frac{P}{P'}$, $x - \frac{Q}{Q'}$, sont des quantités de signes contraires; donc, si x est plus grand que $\frac{P}{P'}$, il sera moindre que $\frac{Q}{Q'}$; si, au contraire, x est plus petit que $\frac{P}{P'}$, il sera plus grand que $\frac{Q}{Q'}$. D'ailleurs, la première réduite $\frac{a}{1}$ est plus petite que x. Par conséquent, *toutes les réduites de rang impair sont moindres que la valeur de la fraction*

continue, et toutes les réduites de rang pair sont plus grandes que cette valeur.

247. La valeur absolue de la différence $x - \frac{Q}{Q'}$ est moindre que celle de la différence $x - \frac{P}{P'}$; car y est plus grand que 1, et, d'après la règle du n° 245, il est évident que Q' est plus grand que P'. Donc *chaque réduite approche plus de la valeur de la fraction continue que la réduite précédente.* C'est cette propriété qui a fait donner aux réduites le nom de *fractions convergentes.*

Il résulte des deux théorèmes ci-dessus, que les réduites de rang impair forment une suite croissante, et les réduites de rang pair forment une suite décroissante.

248. *La différence de deux réduites consécutives, exprimées suivant la règle du n° 245, est égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs de ces deux réduites.*

Cette proposition se vérifie à l'égard des deux premières réduites, dont la différence est $\frac{ab+1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{1}{b}$. Il suffit donc de prouver que, si elle est vraie pour deux réduites consécutives de rang quelconque $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, elle est également vraie pour la réduite $\frac{Q}{Q'}$ et la reduite suivante $\frac{R}{R'}$. Or

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'}; \quad \text{donc} \quad \frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{Q'(Q'r+P')};$$

par hypothèse,

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \pm \frac{1}{P'Q'}; \quad \text{d'où} \quad P'Q - PQ' = \pm 1;$$

donc

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \mp \frac{1}{Q'R'}, \quad \text{ou} \quad RQ' - QR' = \mp 1.$$

249. *Les réduites exprimées suivant la règle du n° 245 sont des fractions irréductibles.* Car, si les deux termes de la réduite $\frac{P}{P'}$ avaient un facteur commun, d'après l'égalité $P'Q - PQ' = \pm 1$, ce facteur commun diviserait l'unité. On voit, par la même égalité, que les numérateurs P et P' de deux réduites consécutives, ou leurs dénominateurs Q et Q', sont premiers entre eux.

250. La valeur de la fraction continue étant comprise entre deux réduites consécutives quelconques $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, la différence entre cette valeur et la réduite $\frac{Q}{Q'}$ est moindre que la différence des fractions $\frac{R}{R'}$, $\frac{Q}{Q'}$. Or, on vient de voir que la valeur absolue de cette différence est $\frac{1}{R'Q'}$. Par conséquent, *l'erreur que l'on commet en prenant une réduite pour la valeur approchée de la fraction continue, est moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la réduite suivante.*

On peut obtenir une limite de l'erreur qui ne dépende pas du dénominateur de la réduite qui suit celle que l'on considère; car $R' = Q'r + P'$, et le quotient incomplet r n'est jamais moindre que l'unité; la fraction $\frac{1}{R'Q'}$ n'est donc pas plus grande que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$; l'erreur est donc toujours moindre que cette dernière fraction.

On a $\frac{1}{Q'(Q'+P')} < \frac{1}{Q'^2}$; on peut donc prendre encore pour limite de l'erreur $\frac{1}{Q'^2}$. Cette dernière limite est quelquefois préférée, à cause de sa simplicité.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction donnée; pour que la réduite $\frac{Q}{Q'}$ dif-

fère de la fraction continue d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{6}$, il suffira que l'on ait $\frac{1}{Q'^2} < \frac{\alpha}{6}$ ou bien $Q' > \sqrt{\frac{6}{\alpha}}$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

On conclut de là que *l'on peut toujours obtenir exactement, ou avec autant d'approximation qu'on le veut, la valeur d'une quantité exprimée en fraction continue.* Car, lorsque la fraction continue se termine, on peut en trouver la valeur exacte; et quand la fraction continue ne se termine pas, on parvient toujours à une réduite dont le dénominateur est assez grand pour que l'on obtienne l'approximation demandée, puisque les dénominateurs sont des nombres entiers qui vont toujours en augmentant (*).

251. Pour obtenir une limite moindre que l'erreur, il suffit de remarquer que, la valeur totale x de la fraction continue étant comprise entre les réduites $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{R}{R'}$, et différant moins de $\frac{R}{R'}$ que de $\frac{Q}{Q'}$ (nos 246 et 247), la différence de x et de $\frac{Q}{Q'}$ est plus grande que la moitié de la différence des deux réduites. Il suit de là que l'erreur que l'on commet, en prenant la fraction $\frac{Q}{Q'}$ au lieu de x, est plus grande que $\frac{1}{2Q'R'}$.

(*) Quand une fraction continue peut être prolongée indéfiniment, les réduites tendent vers une limite fixe. Car, si l'on considère une réduite Z d'un rang aussi élevé qu'on le voudra, les réduites de rang impair qui précéderont Z, seront plus petites que Z et iront en croissant (nos 246 et 247); les réduites de rang pair, avant Z, seront plus grandes que Z et iront en décroissant. De plus, la réduite Z pouvant être prise aussi éloignée que l'on voudra, la différence de deux réduites consécutives antérieures à Z pourra devenir plus petite qu'une quantité quelconque donnée. La valeur d'une fraction continue qui ne se termine pas, est la limite vers laquelle tendent les réduites.

252. Les limites de la différence entre la valeur de la fraction continue et une réduite $\frac{Q}{Q'}$ peuvent aussi se déduire de l'expression qu'on a formée dans le n° 246, pour représenter la valeur de la fraction continue.

En effet, puisque $x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}$, il en résulte

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{Q'(Q'y + P')}.$$

Or $PQ' - QP' = \pm 1$; et en désignant par r le dénominateur de la dernière fraction intégrante comprise dans la réduite qui suit $\frac{Q}{Q'}$, on a $y > r$ et $y < r + 1$. On conclut de là

$$x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'(Q'r + P')} \quad \text{ou} \quad x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'R'},$$

$$x - \frac{Q}{Q'} > \frac{1}{Q'(Q'r + Q' + P')} \quad \text{ou} \quad x - \frac{Q}{Q'} > \frac{1}{Q'(R' + Q')}.$$

253. *Une réduite quelconque exprime la valeur de la fraction continue plus exactement que toute fraction dont le dénominateur est moindre que celui de cette réduite.*

Nommons toujours x la valeur exacte de la fraction continue; et supposons qu'une fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x qu'une des réduites, $\frac{Q}{Q'}$. Il est clair que la proposition énoncée sera démontrée, si nous prouvons qu'on devra avoir $m' > Q'$.

Puisque la fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x que $\frac{Q}{Q'}$, elle approchera aussi plus de x que la réduite précédente $\frac{P}{P'}$; et, puisque la valeur de la fraction continue est com-

prise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, il faudra, à fortiori, que la fraction $\frac{m}{m'}$ soit comprise entre ces réduites.

Il suit de là que la valeur absolue de la différence des fractions $\frac{P}{P'}$ et $\frac{m}{m'}$ sera moindre que la valeur absolue de la différence des deux réduites; de sorte que l'on aura

$$\frac{P}{P'} - \frac{m}{m'} < \frac{1}{P'Q'}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{Pm' - P'm}{P'm'} < \frac{1}{P'Q'};$$

donc
$$Pm' - P'm < \frac{m'}{Q'}.$$

Mais, P, P', m et m' étant des nombres entiers, $Pm' - P'm$ est au moins égal à 1. On doit donc avoir $m' > Q'$.

On peut aussi démontrer que l'on doit avoir $m > Q$. A cet effet, il faut remarquer que la fraction $\frac{m}{m'}$ étant comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, la fraction $\frac{m'}{m}$ est comprise entre $\frac{P'}{P}$ et $\frac{Q'}{Q}$. La démonstration s'achève ensuite comme ci-dessus.

On prouve, d'une manière tout à fait semblable, que, si la fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x qu'une réduite, et dans le même sens que cette réduite, les termes m et m' sont respectivement plus grands que ceux de la réduite suivante.

254. *Toute fraction continue périodique exprime l'une des racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont commensurables.*

Pour démontrer cette proposition d'une manière générale, supposons une fraction continue formée d'une partie non périodique qui comprend les fractions intégrantes $\frac{a}{1}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$, et d'une partie périodique composée des

fractions intégrantes $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}$, qui se reproduisent indéfiniment.

En représentant par y la valeur de la partie périodique, on a

$$(1)\quad y = m + \cfrac{1}{n + \vdots + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}}}\ (*) \qquad (2)\quad x = a + \cfrac{1}{b + \vdots + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{y}}}}.$$

Soient $\frac{R}{R'}$ et $\frac{S}{S'}$ les deux réduites de la valeur de y qui correspondent aux deux fractions intégrantes $\frac{1}{r}, \frac{1}{s}$, et soient $\frac{K}{K'}$ et $\frac{L}{L'}$ les deux réduites de la valeur de x qui correspondent aux deux fractions $\frac{1}{k}, \frac{1}{l}$. On aura

$$y = \frac{Sy + R}{S'y + R'}, \quad x = \frac{Ly + K}{L'y + K'}.$$

Or, en éliminant y entre ces deux équations, on parvient à une équation du second degré en x.

Au lieu de résoudre l'équation du second degré qui résulte de l'élimination de y, et qui donne deux valeurs de x,

---

(*) Si l'on désigne par y_{n-1} la valeur de la fraction continue composée de $n-1$ périodes, et par y_n la valeur de la fraction continue comprenant une période de plus, on a

$$y_n = m + \cfrac{1}{n + \vdots + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y_{n-1}}}}.$$

Quand n croît indéfiniment, y_{n-1} et y_n tendent vers la même limite, puisque pour $n = \infty$ les deux fractions continues que représentent y_{n-1} et y_n ont indéfiniment les mêmes réduites. Cette observation démontre l'exactitude de l'équation (1).

il est préférable de résoudre l'équation

$$y = \frac{Sy + R}{S'y + R'} \quad \text{ou} \quad S'y^2 + (R' - S)y - R = 0.$$

Le dernier terme de cette équation étant négatif, une des racines est négative; on ne devra prendre que la racine positive, et, au moyen de cette valeur de y, on obtiendra la valeur convenable de x.

On peut trouver, d'après les règles ordinaires, la signification de la valeur négative de y donnée par l'équation $S'y^2 + (R' - S)y - R = 0$.

Supposons, pour plus de simplicité, que la fraction continue proposée soit celle-ci :

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{m + \text{etc.}}}}, \quad \text{d'où} \quad y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{y}}}.$$

Si l'on représente la valeur négative de y par $-y'$, on aura

$$-y' = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}}.$$

On déduit de là

$$y' + m = -\cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}}, \quad \frac{1}{y' + m} = -n - \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}, \quad n + \frac{1}{y' + m} = -\cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}},$$

$$\cfrac{1}{n + \cfrac{1}{y' + m}} = -p + \frac{1}{y'}, \quad p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{y' + m}} = \frac{1}{y'},$$

$$y' = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + y'}}}, \quad \text{ou bien} \quad y' = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \text{etc.}}}}}}$$

Soit maintenant la fraction continue périodique mixte

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{m + \text{etc.}}}}}}$$

En désignant par x' la valeur de x correspondante à la valeur négative de y, on a

$$x' = a + \cfrac{1}{b - p - \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}$$

Supposons $b > p$, et posons $b - p = k$ et $z = n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}$,

on aura

$$k - \frac{1}{z} = k - 1 + \frac{z-1}{z} = k - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z-1}},$$

par conséquent

$$x' = a + \cfrac{1}{k - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{n - 1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}}$$

Si l'on a $b < p$, on trouvera, en posant $p - b = k$,

$$x' = a - \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}$$

En opérant alors comme précédemment, on pourra ramener la valeur de x' à une fraction continue dont tous les termes seront positifs.

On ne peut pas avoir $b = p$, car la période commencerait alors à la fraction intégrante $\frac{1}{b}$.

La proposition réciproque de celle que nous venons d'établir est également vraie, c'est-à-dire que *toute racine irrationnelle d'une équation du second degré dont les coefficients sont rationnels est représentée par une fraction continue périodique.* Mais nous ne croyons pas devoir rapporter la démonstration de cette proposition, pour laquelle on pourra consulter le *Traité de la résolution des équations numériques*, ou les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome Ier.

255. On peut avoir à réduire en fraction continue une quantité irrationnelle dont on a la valeur exprimée en décimales. Si l'on demande, par exemple, quelles sont les fractions dont chacune donne la valeur du rapport de la circonférence au diamètre, avec plus d'approximation que toute fraction exprimée en termes moindres, il faudra trouver la valeur de π en fraction continue; d'après la proposition du n° 253, les réduites seront les fractions demandées. Or, en se bornant à sept décimales, la valeur de π est comprise entre 3,1415926 et 3,1415927. Il est naturel de penser que si l'on exprime chacun de ces deux nombres en fraction continue, les quotients incomplets communs aux deux fractions continues seront des quotients incomplets de π. Mais, pour qu'il ne reste aucun doute à cet égard, considérons généralement trois quantités u, v, x, telles que $u > x > v$. Supposons qu'on développe u et v en fractions continues et que l'on ait

$$u = a + \frac{1}{u'}, \quad u' = b + \frac{1}{u''}, \quad \text{etc.},$$

$$v = a + \frac{1}{v'}, \quad v' = b + \frac{1}{v''}, \quad \text{etc.};$$

il s'agit de prouver que l'on aura aussi

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad \text{etc.}$$

Or, puisque x est compris entre u et v qui ont la même partie entière a, la partie entière de x est aussi a; de plus, la différence $x - a$ ou $\frac{1}{x'}$ est comprise entre $\frac{1}{u'}$ et $\frac{1}{v'}$; donc x' est compris entre u' et v'. De là on conclut que, puisque u' et v' ont la même partie entière b, la partie entière de x' est b, et la différence $x' - b$ ou $\frac{1}{x''}$ est aussi comprise entre u'' et v''. Les quotients incomplets communs de u et de v sont donc des quotients incomplets de x.

En faisant usage des valeurs ci-dessus de π, on obtient quatre quotients incomplets communs, qui sont 3, 7, 15, 1, et on a les réduites correspondantes

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}.$$

La deuxième réduite est le rapport d'Archimède; il est approché par excès, et l'erreur est comprise entre $\frac{1}{106 \times 7}$ ou $\frac{1}{742}$ et $\frac{1}{7(106+7)}$ ou $\frac{1}{791}$. La quatrième réduite est le rapport d'Adrien Metius; il est encore approché par excès. Le dénominateur de la réduite suivante, qu'on ne peut obtenir qu'en prenant la valeur de π avec un plus grand nombre de décimales, est 33102; il en résulte que l'erreur du rapport $\frac{355}{113}$ est comprise entre $\frac{1}{113 \times 33102}$ ou $\frac{1}{3740526}$ et $\frac{1}{113 \times (113 + 33102)}$ ou $\frac{1}{3753295}$.

CHAPITRE NEUVIÈME.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

Résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$.

256. L'analyse indéterminée du premier degré a pour objet la recherche des solutions d'un problème du premier degré, dont les conditions ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues, et qui ne peut être résolu que par des valeurs des inconnues en nombres entiers positifs ou négatifs, ou seulement en nombres entiers positifs.

On appelle *solutions entières* les solutions qu'on obtient en n'admettant pour les inconnues que des nombres entiers.

257. Considérons l'équation générale du premier degré à deux inconnues

$$ax + by = c,$$

a, b, c étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

On peut toujours supposer que les nombres a, b, c n'ont aucun facteur commun; car s'ils en avaient un, on le supprimerait, et l'équation serait ainsi ramenée à une autre plus simple, de la même forme. Cela posé, si les coefficients a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation n'admettra aucune solution entière. En effet, supposons que a et b aient un facteur commun m, on aura $a = a'm$, $b = b'm$, a' et b' étant des nombres entiers, et en divisant les deux membres de l'équation par m, on obtiendra

$$a'x + b'y = \frac{c}{m}.$$

Or, pour toutes les valeurs entières de x et de y, le premier

membre de la dernière équation est un nombre entier, et puisque $\frac{c}{m}$ est une quantité fractionnaire, l'équation ne peut pas être satisfaite.

258. *Lorsque les coefficients* a *et* b *sont premiers entre eux, l'équation* $ax + by = c$ *a toujours des solutions entières.*

En résolvant l'équation par rapport à x, on obtient

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Si l'on remplace successivement y par les nombres 0, 1, 2, 3, ..., $a - 1$, en effectuant, après chaque substitution, la division de $c - by$ par a, de manière que le reste soit positif (*), on aura a restes plus petits que a; tous ces restes seront différents; car, si deux valeurs différentes m et n de y, plus petites que a, donnaient des restes égaux, on aurait

$$c - bm = aq + r, \quad c - bn = aq' + r,$$

et il en résulterait

$$b(n - m) = a(q - q'), \quad \text{d'où} \quad \frac{b(n - m)}{a} = q - q';$$

il faudrait donc que $b(n - m)$ fût divisible par a, ce qui est impossible, puisque b est premier avec a, et m et n sont moindres que a.

Il suit de là qu'un des restes sera nul. Donc il existe une valeur entière de y, moindre que a, qui donne une valeur entière de x.

(*) Supposons qu'une des valeurs de $c - by$ soit négative, et représentons-la par $-p$. Si la division de p par a, faite suivant l'usage ordinaire, donne le reste r, en augmentant le quotient d'une unité, le reste sera $r - a$; il sera négatif, et sa valeur absolue sera plus petite que a. La division de $-p$ par a, en prenant le même quotient, donnera le reste positif $a - r$.

Les raisonnements seraient les mêmes pour l'équation $ax - by = c$; d'ailleurs les solutions de cette équation se déduisent de celles de l'équation $ax + by = c$, en changeant les signes des valeurs de y; donc, lorsque la dernière équation admet une solution entière, il en est de même de la première.

259. La proposition qui vient d'être établie peut aussi être démontrée au moyen des propriétés des fractions continues. Soit toujours l'équation

$$ax + by = c.$$

Supposons qu'on réduise $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et représentons par $\frac{p}{q}$ l'avant-dernière réduite. Si cette réduite est de rang pair, on aura

$$ap - bq = +1, \quad \text{d'où} \quad apc - bqc = +c.$$

La dernière égalité prouve qu'on satisfera à l'équation en prenant $x = pc$, $y = -qc$.

Si la réduite $\frac{p}{q}$ est de rang impair, on aura

$$ap - bq = -1, \quad \text{d'où} \quad -apc + bqc = +c.$$

On vérifiera donc l'équation en prenant $x = -pc$, $y = qc$.

260. *Quand on connaît une solution entière de l'équation* ax+by=c, *on peut en obtenir une infinité d'autres.*

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$, la solution connue, on devra avoir $a\alpha + b\beta = c$, et, en retranchant cette égalité de l'équation $ax + by = c$, il viendra

$$a(x - \alpha) = b(\beta - y).$$

Pour que cette dernière équation soit vérifiée par des valeurs entières de x et de y, il faut que b divise le produit

$a(x-\alpha)$; et, puisque b est premier avec a, il doit diviser $x-\alpha$. Il faut donc qu'on ait $x-\alpha=bt$, t désignant un nombre entier positif ou négatif. En remplaçant, dans l'équation ci-dessus, $x-\alpha$ par bt, on obtient $\beta-y=at$. On doit donc avoir

$$x=\alpha+bt, \quad y=\beta-at.$$

L'indéterminée t pourra recevoir toutes les valeurs que l'on voudra en nombres entiers positifs ou négatifs; et, pour chacune de ces valeurs, les valeurs de x et de y formeront une solution entière de l'équation proposée.

En donnant successivement à t les valeurs 0, 1, 2, etc., -1, -2, -3, etc., on obtiendra pour x les différents termes d'une progression arithmétique dont la raison sera le coefficient de y; et les valeurs de y formeront une progression arithmétique dont la raison sera le coefficient de x (*).

261. Au moyen de ce qui précède, on peut trouver toutes les solutions entières d'une équation du premier degré à deux inconnues. Soit, par exemple, l'équation

$$24x+65y=243.$$

(*) M. Binet a indiqué le moyen suivant de représenter toutes les solutions entières de l'équation (1) $ax+by=c$ (*Journal de l'École Polytechnique*, 20e cahier). Il suffit d'avoir une solution entière de l'équation (2) $ax+by=1$; car on en conclura une solution entière de l'équation (1), en multipliant les valeurs de x et de y par c. Or on déduit de l'équation (2) $x=\frac{1-by}{a}$. Il faut donc trouver une valeur de y qui rende $by-1$ divisible par a. Mais a étant premier avec b, si k est le nombre des entiers premiers avec a et moindres que a, b^k-1 est divisible par a (n° 222); donc, en prenant $y=b^{k-1}$, on aura une valeur entière de x. Il résulte de là que les solutions entières de l'équation (1) pourront être représentées par les deux formules

$$y=cb^{k-1}+at, \quad x=-c\frac{b^k-1}{a}-bt.$$

Si a est un nombre premier, on devra remplacer k par $a-1$.

En réduisant $\frac{65}{24}$ en fraction continue, et formant les réduites successives, on trouve que l'avant-dernière est $\frac{19}{7}$; et comme elle est de rang pair, on a

$$24 \times 19 - 65 \times 7 = +1;$$

donc

$$24 \times 19.243 - 65 \times 7.243 = 243.$$

On conclut de là que l'on satisfait à l'équation proposée en prenant $x = 19 \times 243 = 4617$, $y = -7 \times 243 = -1701$; et il en résulte, d'après le n° 260, que toutes les solutions entières de cette équation seront données par les formules

$$x = 4617 + 65t, \quad y = -1701 - 24t,$$

ou bien

$$x = 4617 - 65t, \quad y = -1701 + 24t.$$

262. On peut parvenir aux formules qui donnent toutes les solutions entières d'une équation à deux inconnues, par une méthode indépendante des propositions précédentes.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad 24x + 65y = 243.$$

En la résolvant par rapport à l'inconnue x qui a le plus petit coefficient, et en extrayant les entiers contenus dans la valeur de x, on trouve

$$x = \frac{243 - 65y}{24} = 10 - 2y + \frac{3 - 17y}{24}.$$

Pour qu'une valeur entière de y détermine une valeur entière de x, il faut et il suffit que $\frac{3 - 17y}{24}$ soit un nombre entier. Désignons par t ce nombre entier indéterminé, on aura

$$(2) \qquad \frac{3 - 17y}{24} = t, \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad x = 10 - 2y + t.$$

La recherche des solutions entières de l'équation (1) est

ainsi ramenée à celle des solutions entières de l'équation (2), dans laquelle les coefficients des inconnues sont plus simples. On voit d'ailleurs qu'on ne peut obtenir une semblable réduction qu'en résolvant l'équation par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient.

En opérant sur l'équation (2) comme on a opéré sur la proposée, on trouve

$$y = \frac{3 - 24t}{17} = -t + \frac{3 - 7t}{17}.$$

Il faut donc que $\frac{3 - 7t}{17}$ soit un nombre entier. En désignant ce nombre entier par t', il vient

$$(4) \qquad \frac{3 - 7t}{17} = t', \qquad (5) \qquad y = -t + t'.$$

La recherche des solutions entières de l'équation (2) est ainsi ramenée à celle des solutions entières de l'équation (4).

En continuant les calculs de la même manière, il vient d'abord

$$t = \frac{3 - 17t'}{7} = -2t' + \frac{3 - 3t'}{7},$$

$$(6) \qquad \frac{3 - 3t'}{7} = t'', \qquad (7) \qquad t = -2t' + t''.$$

On a ensuite

$$t' = \frac{3 - 7t''}{3} = 1 - 2t'' - \frac{t''}{3},$$

$$(8) \qquad \frac{t''}{3} = t''', \qquad (9) \qquad t' = 1 - 2t'' - t'''.$$

L'équation (8) donne

$$(10) \qquad t'' = 3t'''.$$

Le coefficient de t'' dans l'équation (10) étant l'unité, on pourra attribuer à t''' une valeur entière quelconque, positive ou négative; on en déduira une valeur entière de t''; on trouvera ensuite, au moyen des équations (9), (7), (5)

et (3), les valeurs de t', t, y et x, qui seront toutes des nombres entiers.

Au lieu de calculer successivement, d'après chaque valeur de t''', les valeurs des indéterminées t'', t', t, pour parvenir à celles de y et de x, il est préférable d'exprimer y et x au moyen de la dernière indéterminée t'''. En substituant la valeur $3t'''$ de t'' dans l'équation (9), on trouve $t' = 1 - 7t'''$. Substituant cette valeur de t' et la valeur de t'' dans l'équation (7), on obtient $t = -2 + 17t'''$. Substituant de même la valeur de t et celle de t' dans l'équation (5), on trouve $y = 3 - 24t'''$. Enfin on obtient de la même manière $x = 2 + 65t'''$. Les différents systèmes de valeurs de x et y se déduiront immédiatement des deux dernières formules, en attribuant à l'indéterminée t''' des valeurs entières quelconques, positives ou négatives.

Le procédé que nous venons d'employer fait reconnaître que, toutes les fois que les coefficients des inconnues dans l'équation proposée sont premiers entre eux, l'équation admet des solutions entières. Car on opère sur les coefficients des inconnues comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur, et les coefficients des indéterminées, dans les équations successives auxquelles on est conduit, sont les restes successifs fournis par cette opération; or, un de ces restes est nécessairement égal à l'unité : on fait donc toujours dépendre la recherche des solutions demandées de celle des solutions entières d'une dernière équation dans laquelle la pénultième indéterminée a pour coefficient l'unité; de sorte que, pour obtenir une valeur entière de cette pénultième indéterminée, il suffit d'attribuer une valeur entière à la dernière.

263. Les calculs que l'on vient de développer sont susceptibles de plusieurs abréviations. Reprenons l'équation

précédente, $24x + 65y = 243$, d'où

$$x = \frac{243 - 65y}{24}.$$

Au lieu de prendre 2 pour le quotient en nombre entier de 65 par 24, ce qui donne le reste 17, on peut prendre 3 pour quotient; le reste est alors -7, et il vient

$$x = 10 - 3y + \frac{3 + 7y}{24}.$$

En posant $\frac{3 + 7y}{24} = t$, on trouve

$$y = \frac{24t - 3}{7} = 3t + \frac{3t - 3}{7}.$$

L'expression $\frac{3t - 3}{7}$ doit être un nombre entier; or cette expression revient à $\frac{3(t-1)}{7}$, et, puisque les nombres 3 et 7 sont premiers entre eux, il faut que $t - 1$ soit divisible par 7. Il suffit donc de poser $\frac{t-1}{7} = t'$; d'où $t = 7t' + 1$.

En calculant les valeurs de x et de y, exprimées en fonction de t', d'après les relations $x = 10 - 3y + t$, $y = 3t + 3t'$, $t = 7t' - 1$, on trouve $y = 3 + 24t'$, $x = 2 - 65t'$. Les deux dernières formules s'accordent avec celles que nous avons obtenues dans le numéro précédent, puisque les indéterminées t' et t''' peuvent recevoir indifféremment des valeurs positives et des valeurs négatives.

On peut encore rendre les calculs plus simples; car, lorsqu'on a obtenu $x = 10 - 3y + \frac{3 + 7y}{24}$, on voit que, si l'on augmente de 1 le quotient de la division de 243 par 24, le reste sera -21; la partie fractionnaire de la valeur de y sera donc $\frac{7y - 21}{24}$, ou $\frac{7(y-3)}{24}$; et, comme 24

est premier avec 7, il faudra que $y-3$ soit divisible par 24. De cette manière, on trouve immédiatement $y-3=24t$; d'où $y=3+24t$, et $x=11-3y+7t=2-65t$.

264. Lorsque, dans l'équation $ax+by=c$, la quantité connue c et l'un des coefficients des inconnues ont un facteur commun, on peut immédiatement ramener l'équation à une autre plus simple. En effet, soit $a=a'm$, $c=c'm$, a' et c' étant des nombres entiers; l'équation proposée peut s'écrire

$$a'x+\frac{by}{m}=c'.$$

Pour que celle-ci soit résolue en nombres entiers, il faut que by soit divisible par m; et, comme b est nécessairement premier avec m, y doit être divisible par m. On posera donc $y=mz$; ce qui réduira l'équation à $a'x+bz=c'$.

Cette simplification s'applique à l'équation du n° 262; car le coefficient de x et la quantité connue sont divisibles par 3. Si l'on pose, en conséquence, $y=3z$, l'équation devient $8x+65z=81$; d'où

$$x=\frac{81-65z}{8}=10-8z+\frac{1-z}{8}.$$

On pose $\frac{1-z}{8}=t$, d'où $z=1-8t$; et, en substituant la valeur de z dans l'équation précédente et dans $y=3z$, on parvient à $x=2+65t$, $y=3-24t$.

265. Les résultats que nous avons obtenus dans le n° 261 diffèrent de ceux que nous avons tirés de la même équation dans les n°s 262 et 263; mais il est facile de voir que ces divers résultats sont équivalents. En effet, si l'on reprend les formules du n° 261, $x=4617-65t$, $y=-1701+24t$, en divisant 4617 par 65, et 1701 par 24, on trouve $4617=71\times65+2$, $1701=71\times24-3$; les deux for-

mules ci-dessus peuvent donc s'écrire

$$x = 2 + 65(71 - t), \quad y = 3 - 24(71 - t);$$

et si l'on pose $71 - t = t'$, il vient

$$x = 2 + 65t', \quad y = 3 - 24t'.$$

266. On peut encore apporter au procédé qui vient d'être exposé une simplification qui a été indiquée par M. Catalan. Pour faire connaître en quoi elle consiste, considérons l'équation générale, que nous écrirons ainsi :

$$ay + bx = A,$$

et supposons $b < a$.

On déduit de cette équation

$$(1) \qquad x = \frac{A - ay}{b}.$$

Soient Q, q, B, c les quotients et les restes que donnent A et a divisés par b; on aura

$$x = Q - qy + \frac{B - cy}{b}.$$

Puisque x et y doivent être des nombres entiers, il faut attribuer à y une valeur qui rende entière la quantité $\frac{B - cy}{b}$. En représentant cette quantité par z, on a l'équation

$$\frac{B - cy}{b} = z, \quad \text{ou} \quad bz + cy = B.$$

La résolution de l'équation proposée est alors ramenée à la résolution, en nombres entiers, de la dernière équation, qui est plus simple, puisque c, qui est le reste de la division de a par b, est moindre que b.

On tire, de l'équation $bz + cy = B$,

$$(2) \qquad y = \frac{B - bz}{c},$$

ou, en nommant Q', q', C, d, les quotients et les restes que donnent B et b divisés par c,

$$y = Q' - q'z + \frac{C - dz}{c}.$$

En continuant les opérations de la même manière, on a

$$\frac{C - dz}{c} = s, \quad \text{ou} \quad cs + dz = C,$$

$$(3) \qquad z = \frac{C - cs}{d},$$

$$(4) \quad s = \frac{D - dt}{e}, \quad t = \frac{E - eu}{f}, \quad u = \frac{F - fv}{g} \quad v = \frac{G - gw}{h}.$$

Les nombres c, d, e, f, etc., sont les restes successifs qui résultent de l'opération du plus grand commun diviseur pour les nombres a et b; et, puisque ces nombres sont premiers entre eux, on doit parvenir à un reste égal à l'unité. Supposons $h = 1$. Alors la dernière équation ci-dessus deviendra $v = G - gw$; pour une valeur entière attribuée arbitrairement à w, on aura une valeur entière de v, et les formules (4), (3), (2), (1) donneront successivement des valeurs entières pour les autres inconnues u, t, s, z, y, x.

On peut trouver ces valeurs par la règle suivante, qui réduit le calcul, pour chaque exemple, aux seules opérations essentielles.

On fait l'opération du plus grand commun diviseur pour les nombres a et b, et l'on calcule ensuite les nombres A, B, C, D, etc., qu'on dispose comme on le voit dans le tableau ci-dessous :

a	b	c	d	e	f	g	1
A	B	C	D	E	F	G	0

Pour former la seconde ligne de ce tableau, on écrit A sous a; on écrit à la droite de A le reste B de la division de A par b; puis, à la droite de B, le reste C de la division

de B par c; ainsi de suite. Le dernier terme de cette seconde ligne, correspondant au diviseur 1, est nécessairement zéro.

On voit, par les formules (4), (3), (2) et (1), que *l'on obtient successivement la valeur de chacune des inconnues* v, u, t, s, z, y, x, *au moyen du tableau ci-dessus, en retranchant d'un terme de la seconde ligne, en allant de la droite à la gauche, le produit du nombre écrit au-dessus de ce terme par la dernière inconnue qu'on a déterminée, et divisant le reste par le nombre de la première ligne écrit à la droite de celui que l'on a multiplié.*

Pour simplifier, on prend zéro pour la valeur de la dernière inconnue w. Quand on a ainsi trouvé un couple de valeurs entières de x et de y, on en déduit toutes les autres solutions entières de l'équation par la règle du n° 260.

Lorsque la seconde ligne du tableau ci-dessus est terminée par plusieurs zéros, il est clair que les valeurs des inconnues correspondantes à ces termes nuls sont aussi nulles; de sorte que le calcul ne commence qu'à l'inconnue correspondante au terme à la gauche du dernier zéro, en partant de la droite.

Pour l'application de cette règle, il n'est pas nécessaire que les nombres a, b, c,..., A, B, C, etc., soient positifs; de sorte que l'on peut prendre, dans chaque division, le reste plus petit que la moitié du diviseur; mais alors il faudra tenir compte des signes de ces restes: et si le dernier terme de la ligne supérieure du tableau est -1, la valeur de l'inconnue v sera $-G$, c'est-à-dire le quotient de la division de $G - g \times 0$ par -1.

Si les coefficients a et b avaient un facteur commun qui ne divisât pas la quantité connue A, la méthode qui vient d'être exposée ferait reconnaître l'impossibilité d'obtenir des solutions entières de l'équation. En effet, dans ce cas, on parviendrait à un reste h différent de l'unité, qui diviserait

les restes précédents g, f, e, etc., et les nombres a et b. Ce reste ne diviserait aucun des nombres G, F, E, etc.; car, si h divisait G, qui est le reste de la division de F par g, puisqu'il divise g, il diviserait F; divisant F et f, h diviserait aussi E; ainsi de suite. h diviserait donc A, ce qui est contre l'hypothèse. Mais, puisque, dans l'équation $v = \frac{G - gw}{h}$, h diviserait g et ne diviserait pas G, pour toute valeur entière de w, la valeur de v serait fractionnaire.

267. Nous avons considéré jusqu'à présent toutes les solutions en nombres entiers, positifs ou négatifs; nous allons examiner le cas où l'on ne veut admettre que des solutions positives.

Reprenons l'équation $ax + by = c$. On peut supposer le terme c positif; car, s'il était négatif, on le rendrait positif en changeant les signes des deux membres. De cette manière, tous les cas que peuvent présenter les signes des termes sont renfermés dans les quatre équations :

$$ax + by = c,$$
$$ax - by = c,$$
$$-ax + by = c,$$
$$-ax - by = c,$$

a, b, c étant positifs.

La troisième équation ne diffère pas de la deuxième, et la quatrième ne peut pas avoir de solution positive; il suffit donc de considérer les deux premières.

On a vu que, si l'on représente par α et β deux nombres entiers satisfaisant à l'égalité $a\alpha + b\beta = c$, toutes les solutions entières de l'équation $ax + by = c$ sont comprises dans les formules

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at \quad (\text{n}^\circ\ 260).$$

Pour que les valeurs de x et de y soient positives, il faut

que l'on ait

$$\alpha + bt > 0, \quad \beta - at > 0; \quad \text{d'où} \quad t > -\frac{\alpha}{b}, \quad t < \frac{\beta}{a}.$$

D'après ces inégalités, le nombre des solutions entières positives sera limité; cette conclusion était d'ailleurs manifeste par l'inspection de l'équation. Quand il n'y aura aucun nombre entier compris entre les deux nombres $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$, l'équation ne pourra être vérifiée par aucun système de valeurs entières positives. Les inégalités $t > -\frac{\alpha}{b}$ et $t < \frac{\beta}{a}$ ne sont jamais contradictoires; car, de l'égalité $a\alpha + b\beta = c$, on conclut, puisque c est positif, $a\alpha + b\beta > 0$; par conséquent $b\beta > -a\alpha$, et $\frac{\beta}{a} > -\frac{\alpha}{b}$.

Si l'on représente par A et B les deux nombres entiers, positifs ou négatifs, respectivement inférieurs de moins d'une unité à $-\frac{\alpha}{b}$ et à $\frac{\beta}{a}$, les valeurs de t comprises entre $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$ seront $A + 1$, $A + 2, \ldots$, B; et le nombre des solutions entières et positives sera $B - A$. Mais la différence des fractions $\frac{\beta}{a}$ et $-\frac{\alpha}{b}$ est $\frac{b\beta + a\alpha}{ab}$ ou $\frac{c}{ab}$; par conséquent, si l'on désigne par q la partie entière du quotient de c par ab, la différence $B - A$ sera égale à q ou à $q + 1$. Le nombre des solutions entières positives de l'équation sera donc q ou $q + 1$.

L'équation $ax - by = c$ se déduit de la précédente par le changement de y en $-y$, et, en effectuant le même changement dans les valeurs ci-dessus de x et de y, on a

$$x = \alpha + bt, \quad y = -\beta + at.$$

Pour obtenir des solutions positives, il faudra prendre t

de telle sorte, que l'on ait $t > -\frac{\alpha}{b}$ et $t > \frac{\beta}{a}$. Or il existe un nombre infini de valeurs entières de t qui satisfont à ces deux conditions; car il suffit, pour qu'elles soient vérifiées l'une et l'autre, que t soit plus grand que la plus grande des deux quantités $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$. Le nombre des solutions entières positives de l'équation est donc infini.

Résolution en nombres entiers d'un système quelconque d'équations du premier degré, dans lequel le nombre des inconnues surpasse celui des équations.

268. Soient les deux équations générales

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d'.$$

En éliminant une des inconnues, z par exemple, on obtient l'équation

$$(3) \qquad (ac' - ca')\,x + (bc' - cb')\,y = dc' - cd';$$

le système des équations (1) et (2) se trouve alors remplacé par celui des équations (1) et (3).

Si l'équation (3) admet des solutions entières, on déduira de cette équation les valeurs de x et de y exprimées par des fonctions entières d'une indéterminée t; et la question sera réduite à trouver les valeurs entières de t, pour lesquelles les valeurs de x et de y seront telles, qu'en les substituant dans l'équation (1) on obtienne une valeur entière de z. A cet effet on substituera dans l'équation (1) les valeurs de x et y en fonctions de t, ce qui donnera une équation de la forme $mt + cz = k$. Si cette équation admet des solutions entières, elle conduira à des formules par lesquelles z et t seront exprimées au moyen d'une indéter-

minée t'; et en substituant la valeur de t en fonction de t' dans les valeurs de x et de y déduites de l'équation (3), on aura les trois inconnues x, y, z, exprimées en fonctions entières de l'indéterminée t'.

Lorsque les coefficients c et c' sont premiers entre eux, si l'équation (3) admet des solutions entières, le système des équations (1) et (2) en admet aussi; et, dans ce cas, chaque couple de valeurs entières de x et de y qui vérifient l'équation (3) donne, dans l'équation (1), une valeur entière de z. En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$c'(d - ax - by) = c(d' - a'x - b'y);$$

si x et y sont des nombres entiers, puisque, par hypothèse, c et c' sont premiers entre eux, c devra diviser $d - ax - by$; par conséquent, la valeur de z, dans l'équation (1), sera entière.

Il suit de là que, dans le cas où c et c' sont premiers entre eux, lorsque l'on aura obtenu, au moyen de l'équation (3), les valeurs de x et de y exprimées en fonctions entières de t, la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) conduira à une équation qui donnera immédiatement une valeur de z en fonction entière de t.

269. Proposons-nous de trouver les solutions entières des trois équations

$$13x + 5y - 2z + 4u = 2559,$$
$$8x + 7y + 3z - 5u = 1595,$$
$$11x - 3y + 5z - 7u = 2157.$$

En éliminant u entre la première équation et chacune des deux autres, on obtient

$$97x + 53y + 2z = 19175, \quad 135x + 23y + 6z = 26541.$$

L'observation qui vient d'être faite pourrait faire croire

qu'on doit éliminer de préférence, entre ces deux équations, l'une des inconnues x et y, qui ont, dans les deux équations, des coefficients premiers entre eux; mais les calculs sont plus simples en éliminant z, ce qui conduit à l'équation

$$39x + 34y = 7746.$$

Le système proposé se trouve ainsi remplacé par celui des trois équations

$$13x + 5y - 2z + 4u = 2559,$$
$$97x + 53y + 2z = 19175,$$
$$39x + 34y = 7746.$$

On cherche les formules qui donnent les solutions entières de l'équation $39x + 34y = 7746$. Le coefficient de x admettant le facteur 3 qui divise 7746, et le coefficient de y admettant le facteur 2 qui divise aussi 7746, on peut abréger les calculs en posant $x = 2x'$, $y = 3y'$; l'équation devient

$$13x' + 17y' = 1291.$$

On conclut de celle-ci

$$y' = 1 + 13t, \quad x' = 98 - 17t;$$

par suite,

$$y = 3 + 39t, \quad x = 196 - 34t.$$

On substitue dans l'équation $97x + 53y + 2z = 19175$, les valeurs de x et de y exprimées en fonctions de l'indéterminée t, ce qui donne $1231t - 2z = -4$. On déduit de cette équation, en exprimant z et t au moyen d'une seconde indéterminée, $t = 2t'$, $z = 1231t' + 2$; et en remplaçant t par $2t'$ dans les valeurs précédentes de x et de y, on a $y = 3 + 78t'$, $x = 196 - 68t'$.

On substitue dans l'équation $13x + 5y - 2z + 4u = 2559$, les valeurs de x, y, z, exprimées en fonctions de l'indéterminée t', ce qui donne $739t' - u = 0$, d'où $u = 739t'$. La

valeur de u en fonction de t' étant entière, les calculs sont terminés, et les formules qui déterminent les solutions entières du système proposé sont

$$x = 196 - 68t',\ y = 3 + 78t',\ z = 2 + 1231\,t',\ u = 739\,t'.$$

Si l'on ne veut admettre que des solutions positives, il faudra que t' soit positif et moindre que $\frac{196}{68}$ ou $2\frac{15}{17}$. On obtiendra ainsi trois solutions, savoir :

pour $t' = 0$, $x = 196$, $y = 3$, $z = 2$, $u = 0$;
pour $t' = 1$, $x = 128$, $y = 81$, $z = 1233$, $u = 739$;
pour $t' = 2$, $x = 60$, $y = 159$, $z = 2464$, $u = 1478$.

270. Considérons maintenant le cas où l'on n'a qu'une seule équation qui renferme plus de deux inconnues. Soit, par exemple, l'équation

$$15x + 6y + 20z = 171.$$

En résolvant cette équation par rapport à l'inconnue y, qui a le plus petit coefficient, on obtient

$$y = \frac{171 - 15x - 20z}{6} = 28 - 2x - 3z + \frac{3 - 3x - 2z}{6}.$$

Pour que la valeur de y soit entière, x et z étant des nombres entiers, il faut que la quantité $\frac{3 - 3x - 2z}{6}$ ait une valeur entière. En représentant cette valeur par t, on a l'équation

$$\frac{3 - 3x - 2z}{6} = t, \quad \text{ou} \quad 2z + 3x + 6t = 3.$$

Il ne s'agit plus que de trouver les solutions entières de cette équation, qui est plus simple que la précédente, puisqu'elle a des coefficients moindres, celui qui était le plus petit étant maintenant le plus grand.

En résolvant l'équation $2z + 3x + 6t = 3$, par rap-

port à l'inconnue z qui a le plus petit coefficient, on obtient

$$z = \frac{3 - 3x - 6t}{2} = 1 - x - 3t + \frac{1 - x}{2}.$$

Pour que la valeur de z soit entière, x et t étant des nombres entiers, il faut que la quantité $\frac{1-x}{2}$ ait une valeur entière. En représentant cette valeur par t', on a l'équation

$$\frac{1-x}{2} = t', \quad \text{d'où} \quad x = 1 - 2t'.$$

On pourra attribuer à t' une valeur entière quelconque, et les valeurs correspondantes de x, z et y seront aussi entières.

En substituant la valeur de x dans celle de z, on trouve

$$z = 3t' - 3t;$$

et, en substituant les valeurs de x et de z dans celle de y, on obtient

$$y = 26 - 5t' + 10t.$$

On aura toutes les solutions entières de l'équation proposée en attribuant, aux deux indéterminées t et t', toutes les valeurs entières, positives et négatives, dans les trois formules

$$x = 1 - 2t', \quad z = 3t' - 3t, \quad y = 26 - 5t' + 10t.$$

Pour s'assurer de l'exactitude des opérations, il faut substituer les valeurs de x, z, y en fonction des indéterminées t et t', dans l'équation proposée; cette équation devra être satisfaite quels que soient t et t'. On peut aussi opérer la vérification en éliminant les indéterminées t et t' entre les trois équations par lesquelles x, y et z sont exprimées en fonction de t et t', on devra retrouver l'équation proposée.

Si l'on ne veut admettre que des valeurs positives de x, y, z, il faudra que l'on ait

$$1-2t'>0,\quad 3t'-3t>0,\quad 26-5t'+10t>0.$$

La première condition revient à $t'<\frac{1}{2}$; les deux autres donnent

$$t<t',\quad t>\frac{5t'-26}{10}.$$

Il faut donc que

$$t'>\frac{5t'-26}{10},\quad \text{d'où}\quad t'>-\frac{26}{5}.$$

D'après les deux conditions $t'>-\frac{26}{5}$ et $t'<\frac{1}{2}$, on ne peut donner à t' que les valeurs -5, -4, -3, -2, -1, 0.

Pour $t'=-5$ on doit avoir $t>-\frac{51}{10}$ et $t<-5$, ce qui permet seulement de prendre $t=-5$; d'où résultera $z=0$.

Pour $t'=-4$, on doit avoir $t>-\frac{46}{10}$ et $t<-4$, ce qui permet de prendre $t=-4$.

Pour $t'=-3$, on doit avoir $t>-\frac{41}{10}$ et $t<-3$; par conséquent $t=-4$, $=-3$.

Pour $t'=-2$, on doit avoir $t>-\frac{36}{10}$ et $t<-2$; par conséquent $t=-3$, $=-2$.

Pour $t'=-1$, on doit avoir $t>-\frac{31}{10}$ et $t<-1$; par conséquent $t=-3$, $=-2$, $=-1$.

Pour $t'=0$, on doit avoir $t>-\frac{26}{10}$ et $t<0$; par conséquent $t=-2$, $=-1$, $=0$.

Il y aura donc douze solutions entières positives; on en aurait seulement six si l'on excluait celles dans lesquelles $z=0$.

271. Quel que soit le nombre des inconnues, dans une équation du premier degré, on reconnaît, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait dans le n° 257, que, lorsqu'on a supprimé les facteurs communs à tous les coefficients et à la quantité connue, il faut, pour que l'équation

admette des solutions entières, que les coefficients soient premiers entre eux.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, soit l'équation

$$ax + by + cz + \ldots = k;$$

et supposons que a soit le plus petit coefficient.

En résolvant l'équation par rapport à x, on aura une valeur qui se composera d'une partie entière, et d'une partie fractionnaire dans laquelle les coefficients des inconnues y, z, etc., seront les restes que donneront les nombres b, c, etc., divisés par a; de sorte qu'ils seront moindres que a. Nommons ces restes b', c', etc.; en égalant cette partie fractionnaire à un nombre entier indéterminé, on aura l'équation

$$b'y + c'z \ldots + at = k'.$$

Les coefficients b', $c' \ldots a$ seront encore premiers entre eux; car b', c', etc., étant les restes que donnent b, c, etc., divisés par a, tout nombre qui diviserait a, b', c', etc., diviserait aussi a, b, c, etc.

En opérant sur la seconde équation de la même manière que sur la première, on en obtiendra une nouvelle, dans laquelle les coefficients des inconnues seront le plus petit des nombres b', $c' \ldots a$, et les restes que donneront les autres divisés par ce plus petit coefficient; ces coefficients seront encore premiers entre eux.

Il suit de là que les calculs amèneront nécessairement une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues sera l'unité, puisque, tant que le plus petit coefficient ne sera pas l'unité, il ne divisera pas tous les autres coefficients, et on fera dépendre la résolution de l'équation, en nombres entiers, de celle d'une autre équation avec des coefficients moindres. Mais lorsqu'on sera parvenu à une équation dans laquelle un des coefficients sera l'unité, on

aura la valeur d'une inconnue en fonction entière de toutes les autres inconnues de cette équation, et on en conclura, pour toutes les autres inconnues des équations successives, y compris l'équation proposée, des valeurs qui seront des fonctions entières des mêmes quantités.

Il est manifeste que les inconnues de l'équation proposée dépendront toujours d'un nombre d'indéterminées inférieur seulement d'une unité à celui des inconnues de l'équation.

272. Nous indiquerons, comme exercices, les problèmes suivants :

1er Problème. — *Partager* 100 *en deux parties telles, que l'une soit divisible par* 7 *et l'autre par* 11. (Rép. : 56 et 44.)

2e Problème. — *Une réunion d'hommes et de femmes a dépensé* 30 *francs dans une auberge; les hommes ont payé* 95 *centimes chacun, et les femmes* 65 *centimes. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?* (En appelant x le nombre des hommes, y celui des femmes, on a ces quatre solutions : $x=2$, $y=74$; $x=15$, $y=55$; $x=28$, $y=36$; $x=41$, $y=17$.)

3e Problème. — *Trouver un nombre* N *qui, étant divisé par* 39, *donne le reste* 16, *et tel aussi que, si on le divise par* 56, *on trouve le reste* 27. (Rép. : $N=1147+2184t$, t étant un nombre entier indéterminé.)

4e Problème. — *Quelqu'un achète pour* 100 *écus* 100 *pièces de bétail, des porcs, des chèvres et des moutons; les porcs coûtent* $3\frac{1}{2}$ *écus, les chèvres* $1\frac{1}{3}$ *écu, les moutons* $\frac{1}{2}$ *écu. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce?* (En nommant x le nombre des porcs, y celui des chèvres et z celui des moutons, on a ces trois solutions : $x=5$, $y=42$, $z=53$; $x=10$, $y=24$, $z=66$; $x=15$, $y=6$, $z=79$.)

Digitized by Google

5e Problème. — *Trouver trois nombres entiers* x, y, z, *tels, qu'en multipliant le premier par* 3, *le deuxième par* 5 *et le troisième par* 7, *la somme des produits soit* 560; *et tels aussi, qu'en multipliant le premier par* 9, *le deuxième par* 25 *et le troisième par* 49, *la somme des produits soit* 2920. (Solutions : $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$; $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.)

Résolution en nombres entiers d'une équation du second degré à deux inconnues qui ne contient que la première puissance d'une des inconnues.

273. Les questions d'analyse indéterminée qui dépendent des équations d'un degré supérieur au premier, ne doivent pas trouver place dans ce Traité; mais, lorsqu'une équation du second degré à deux inconnues ne renferme pas la seconde puissance d'une de ces inconnues, la recherche des solutions entières de cette équation peut être regardée comme une question d'analyse indéterminée du premier degré.

Considérons l'équation générale

$$(1) \qquad mxy + nx^2 + px + qy + r = 0.$$

En la résolvant par rapport à y, on a

$$(2) \qquad y = -\frac{nx^2 + px + r}{mx + q},$$

et, en effectuant la division de $nx^2 + px + r$ par $mx + q$,

$$y = -\frac{n}{m}x + \frac{nq - mp}{m^2} + \frac{mpq - nq^2 - m^2 r}{m^2(mx + q)};$$

d'où, en posant, pour abréger, $mpq - nq^2 - m^2 r = \mathrm{N}$,

$$(3) \qquad m^2 y = -mnx + nq - mp + \frac{\mathrm{N}}{mx + q}.$$

x et y devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{N}{mx+q}$ soit un nombre entier. D'après cette condition, on calcule tous les diviseurs du nombre N, et l'on égale successivement $mx+q$ à chacun de ces diviseurs pris avec le signe + et avec le signe —. Si les équations qu'on obtient ainsi donnent des valeurs entières de x, on substitue successivement ces valeurs dans l'équation (3); il faut, pour que l'équation (1) ait des solutions entières, qu'il résulte de ces substitutions des valeurs entières de y.

Il est évident que le nombre des solutions entières est toujours limité, et qu'il peut n'en exister aucune.

EXEMPLES.

(On a indiqué seulement les solutions entières positives.)

$$2xy - 3x^2 + y = 1 \quad \begin{cases} x = 0, & y = 1; \\ x = 3, & y = 4. \end{cases}$$

$$5xy = 2x + 3y + 18 \quad \begin{cases} x = 1, & y = 10; \\ x = 3, & y = 2; \\ x = 7, & y = 1. \end{cases}$$

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29 \quad \begin{cases} x = 4, & y = 21; \\ x = 5, & y = 7. \end{cases}$$

Quand le reste de la division de $nx^2 + px + r$ par $mx + q$ est zéro, l'équation (1) est de la forme $(mx+q)(ax+by+c) = 0$; on obtient toutes les solutions de cette équation en résolvant séparément les deux équations $mx + q = 0$, $ax + by + c = 0$.

274. Lorsque l'équation ne contient pas le terme dépendant de xy, on ne peut plus faire usage de la méthode qui vient d'être exposée. On a, dans ce cas, $m = 0$, et l'équation est

$$(4) \qquad y = -\frac{nx^2 + px + r}{q}.$$

Supposons qu'une valeur entière $x = \alpha$ donne une valeur entière pour y. Si l'on pose $x = \alpha + qt$, t étant un nombre entier quelconque, on trouvera

$$y = -\frac{n\alpha^2 + p\alpha + r}{q} - (nqt^2 + 2n\alpha t + pt);$$

par hypothèse, $n\alpha^2 + p\alpha + r$ est divisible par q; la valeur de y correspondante à $x = \alpha + qt$ sera donc un nombre entier. Comme cette conclusion a lieu quel que soit le signe de t, il en résulte que, si l'équation admet des solutions entières, il en existera pour lesquelles la valeur de x sera comprise entre zéro et q. Par conséquent, pour obtenir toutes les solutions entières, il suffira de substituer pour x, dans l'équation, les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$; et chaque solution entière correspondante à un de ces nombres en fournira une infinité d'autres.

L'équation (4), dans laquelle il s'agit de trouver des valeurs de x qui rendent le polynôme $nx^2 + px + r$ multiple du nombre donné q, est ce que M. *Gauss* a nommé *congruence* du second degré; de même que l'équation $ax + by = c$, dans laquelle on cherche à rendre $ax - c$ multiple de b, est une congruence du premier degré.

CHAPITRE DIXIÈME.

PUISSANCES ET RACINES DES MONOMES. RADICAUX. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES. ÉQUATIONS EXPONENTIELLES. LOGARITHMES.

Puissances et racines des monômes. — Calcul des radicaux arithmétiques.

275. La puissance du degré m d'une quantité étant le produit de m facteurs égaux à cette quantité, on conclut de la règle de la multiplication des monômes que, *pour former la puissance* m^{ième} *d'un monôme, il faut élever le coefficient numérique à la* m^{ième} *puissance, et multiplier l'exposant de chaque lettre par* m.

Il résulte de cette règle que, *pour extraire la racine* m^{ième} *d'un monôme, on doit extraire la racine* m^{ième} *du coefficient, et diviser l'exposant de chaque lettre par* m. Ainsi, pour avoir la racine cubique de $64a^3b^6$, on prend la racine cubique de 64, qui est 4, et l'on divise les exposants des lettres a et b par 3; la racine demandée est donc $4ab^2$. Pareillement, pour extraire la racine 5e de $32a^5b^{15}c^{10}$, on prend la racine 5e de 32, qui est 2, et l'on divise les exposants des lettres a, b, c par 5; on trouve ainsi que la racine demandée est $2ab^3c^2$.

Pour que l'on puisse obtenir, au moyen de cette règle, la *racine* $m^{\text{ième}}$ d'un monôme, il faut que le coefficient numérique soit une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, et que les exposants de toutes les lettres soient divisibles par m. Quand ces conditions ne sont pas remplies, l'expression de la racine se forme au moyen du signe radical.

Puisque l'on fait le produit de plusieurs fractions en multipliant les numérateurs entre eux, et les dénomina-

teurs entre eux, *la puissance* $m^{ième}$ *d'une fraction se forme en élevant chacun des deux termes à la puissance* $m^{ième}$; *et l'on extrait la racine* $m^{ième}$ *d'une fraction en extrayant la racine* $m^{ième}$ *de chacun des deux termes.*

276. Nous avons dit, dans le chapitre VII, qu'en désignant par A une quantité quelconque et par m un nombre entier positif, il existe m racines $m^{ièmes}$ de A, ou, en d'autres termes, l'expression $\sqrt[m]{A}$ a m valeurs (n° 214). Quand la quantité A est positive, parmi les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$ il y en a une réelle et positive, et il n'y en a qu'une; car deux nombres différents, élevés à une même puissance, ne peuvent pas reproduire le même nombre. Cette valeur est ce qu'on nomme la *racine arithmétique* de A, ou aussi la *valeur arithmétique du radical* $\sqrt[m]{A}$.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que l'on ne considère que les valeurs arithmétiques des radicaux.

277. Les observations que nous avons faites au sujet de l'addition et de la soustraction, pour les quantités radicales du second degré (n° 159), s'appliquent aux expressions qui contiennent des radicaux de degré quelconque. Ainsi l'on a, par la réduction des quantités semblables,

$$5\sqrt[3]{3ab^2} + 3\sqrt[3]{3ab^2} = 8\sqrt[3]{3ab^2},$$

$$5\sqrt[3]{3ab^2} - 3\sqrt[3]{3ab^2} = 2\sqrt[3]{3ab^2},$$

$$3a\sqrt[5]{c} \pm 2b\sqrt[5]{c} = (3a \pm 2b)\sqrt[5]{c}.$$

Lorsque les indices des radicaux sont différents, ou lorsque, les indices étant les mêmes, les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont différentes, on dit que les radicaux sont dissemblables; et l'on ne peut qu'indiquer l'addition et la soustraction par les signes + et —.

278. *Pour multiplier ou pour diviser l'un par l'autre deux radicaux de même indice, il faut effectuer la multiplication ou la division des quantités placées sous le signe radical, et affecter le résultat du radical commun.* Ainsi,

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

En effet, si l'on formait la $m^{ième}$ puissance du produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$, on aurait, d'après les principes relatifs à la multiplication, $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$ ou $a \times b$; donc le produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$ est la racine $m^{ième}$ de $a \times b$. On démontre la seconde égalité de la même manière.

279. On conclut de la règle qui vient d'être établie

$$\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}.$$

Donc, *lorsque la quantité placée sous un radical du degré* m, *a des facteurs qui sont des puissances exactes du même degré, on peut prendre séparément les racines de ces facteurs, et multiplier leur produit par la racine indiquée du produit des autres facteurs.* C'est ce qu'on appelle *faire sortir des facteurs du radical.* Et, *lorsqu'un radical est multiplié par des facteurs rationnels, on peut mettre ces facteurs sous le radical, en les élevant à la puissance du même degré que le radical.* C'est ce qu'on appelle *faire entrer des facteurs sous le radical.*

Quand on doit ajouter ou soustraire des quantités radicales dissemblables, il faut d'abord examiner si ces quantités ne peuvent pas être rendues semblables en simplifiant les radicaux. Soient, par exemple, les deux expressions

$\sqrt[3]{16a^3b}$ et $\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b^4}$; on trouvera qu'elles se réduisent à $2a\sqrt[3]{2b}$ et $\frac{5abc}{d}\sqrt[3]{2b}$; en conséquence on aura

$$\sqrt[3]{16a^3b} \pm \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b^4} = \left(2a \pm \frac{5abc}{d}\right)\sqrt[3]{2b}.$$

280. *La valeur arithmétique d'un radical n'est pas changée quand on multiplie l'indice par un nombre entier quelconque, pourvu qu'on élève en même temps la quantité placée sous le signe radical à la puissance du degré marqué par ce nombre;* c'est-à-dire que l'on a l'égalité

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

En effet, d'après la définition des racines, $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$; or, en élevant les deux membres à la $n^{ième}$ puissance, on obtient $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$; donc $\sqrt[m]{a}$ est la racine du degré mn de a^n.

Au moyen de ce principe, on peut toujours ramener des radicaux à un indice commun. Il suffit de *multiplier l'indice de chaque radical par le produit de tous les autres indices, en élevant la quantité qui est sous le radical à la puissance marquée par ce produit. On peut aussi prendre pour l'indice commun le plus petit multiple des indices de tous les radicaux.*

L'égalité $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$ prouve aussi que, *lorsque l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité qui est sous le radical ont un facteur commun, on peut les diviser l'un et l'autre par ce facteur.*

281. *Pour faire le produit de plusieurs radicaux de degrés différents, ou pour diviser l'un par l'autre deux*

radicaux de degrés différents, on réduit les radicaux au même indice, et l'on applique la règle du n° 278.

On trouve, de cette manière,

$$\sqrt[3]{a^2 b} \times \sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[6]{a^5 b} = \sqrt[12]{a^8 b^4} \times \sqrt[12]{a^3 b^9} \times \sqrt[12]{a^{10} b^2} = \sqrt[12]{a^{21} b^{15}}.$$

$$= ab\sqrt[12]{a^9 b^3} = ab\sqrt[4]{a^3 b},$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[7]{a^4 b^3}} = \frac{\sqrt[35]{a^{21} b^{14}}}{\sqrt[35]{a^{20} b^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{a}{b}}.$$

282. *On élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité soumise à ce radical.* Car

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \ldots = \sqrt[m]{a \times a \times a \ldots} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Lorsque l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever la quantité proposée, on peut effectuer l'opération en divisant le premier de ces deux nombres par le second. Car, d'après la règle ci-dessus et le principe du n° 280,

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

283. *On extrait la racine du degré* m *d'une quantité radicale en multipliant l'indice du radical par le degré* m *de la racine qu'on veut extraire; ou en extrayant, si cela est possible, la racine du degré* m *de la quantité soumise au radical.* Ainsi :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

En effet, d'après les règles du numéro précédent, la puissance du degré m de $\sqrt[mn]{a}$ est $\sqrt[n]{a}$; par conséquent $\sqrt[mn]{a}$ est la

racine du degré m de $\sqrt[n]{a}$. Pareillement, la puissance $m^{ième}$ de $\sqrt[n]{a^p}$ est $\sqrt[n]{a^{mp}}$; donc $\sqrt[n]{a^p}$ est la racine du degré m de $\sqrt[n]{a^{mp}}$.

Observations sur les radicaux considérés algébriquement.

284. Quand on considère les radicaux dans toute la généralité que l'algèbre comporte, les règles que nous avons exposées dans les numéros précédents peuvent conduire à des résultats inexacts.

Soient, par exemple, les deux radicaux $\sqrt{-a}$ et $\sqrt[3]{-a}$, en supposant a positif. Si l'on applique à ces radicaux le principe du n° 280, en élevant la quantité sous le radical au carré, et en multipliant l'indice par 2, on trouve

$$\sqrt{-a} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2}, \quad \sqrt[3]{-a} = \sqrt[6]{(-a)^2} = \sqrt[6]{a^2}.$$

Or, chacune de ces égalités est inexacte; car, dans la première égalité $\sqrt{-a} = \sqrt[4]{a^2}$, le premier membre est imaginaire, tandis que le second membre a deux valeurs réelles. Dans la seconde égalité $\sqrt[3]{-a} = \sqrt[6]{a^2}$, le premier membre n'a qu'une seule valeur réelle qui est négative, tandis que le second membre a deux valeurs réelles, dont l'une est positive.

A la vérité, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans le chapitre VII sur les racines quatrièmes et les racines sixièmes d'une quantité, on voit qu'en considérant les radicaux dans toute leur généralité, les quatre valeurs de $\sqrt[4]{a^2}$ comprennent les deux valeurs de $\sqrt{-a}$, et les six valeurs de $\sqrt[6]{a^2}$ comprennent les trois valeurs de $\sqrt[3]{-a}$. Mais les égalités ci-dessus restent toujours inexactes, puisque, dans

chacune d'elles, le second membre admet plus de valeurs que le premier.

285. En appliquant au produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$ la règle du n° 278, on trouve

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)\times(-a)}=\sqrt{a^2}.$$

Or $\sqrt{a^2}$ admet les deux déterminations $+a$ et $-a$; cependant il semble que le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ étant le carré de $\sqrt{-a}$, on ne peut admettre, sans se contredire, que ce produit soit autre chose que $-a$.

Cette contradiction tient à ce que l'on attribue au produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ une signification trop restreinte, en le confondant mal à propos avec le carré de $\sqrt{-a}$. En effet, lorsque l'on prend les radicaux dans toute leur généralité, $\sqrt{-a}$ admet deux déterminations égales et de signes contraires, et si l'on représente ces deux déterminations par $+\alpha$ et $-\alpha$, le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ admet les quatre déterminations $+\alpha\times+\alpha$, $+\alpha\times-\alpha$, $-\alpha\times+\alpha$, $-\alpha\times-\alpha$; les deux dernières déterminations ne diffèrent pas des deux premières, et celles-ci, qui sont $+\alpha^2$ et $-\alpha^2$, donnent précisément les deux valeurs de $\sqrt{a^2}$, puisque, α désignant une valeur de $\sqrt{-a}$, on a $\alpha^2=-a$ et $-\alpha^2=+a$. Mais, lorsqu'il s'agit du carré de $\sqrt{-a}$, chacune des déterminations $+\alpha$ et $-\alpha$ ne devant être multipliée que par elle-même, on n'obtient qu'un résultat unique, $+\alpha^2$.

Les observations que nous venons de faire sur le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, s'appliquent également au produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$; d'après la règle du n° 278, ce produit s'exprime par $\sqrt{a^2}$; or $\sqrt{a^2}$ admet les deux valeurs $+a$ et $-a$, et lorsque l'on envisage chacun des facteurs du produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ dans toute

sa généralité, ce produit comporte en effet les deux déterminations $+a$ et $-a$; mais si l'on doit multiplier seulement chacune des déterminations de $\sqrt{a}$ par elle-même, le produit ne peut être que $+a$.

286. Les difficultés que l'on rencontre quand on considère des radicaux imaginaires, ou lorsque, les radicaux admettant des valeurs réelles, il faut avoir égard à leurs valeurs imaginaires, tiennent à ce que les déterminations imaginaires sont toutes confondues dans l'expression radicale, sans qu'on puisse établir entre elles aucune distinction. Ces difficultés disparaissent lorsque l'on considère séparément les déterminations imaginaires des radicaux exprimées par des radicaux réels et positifs combinés avec le symbole $\sqrt{-1}$.

Supposons, par exemple, que l'on veuille connaître le produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-b}$. Si l'on représente par α et β les racines carrées positives des nombres a et b, les deux déterminations de $\sqrt{-a}$ seront $+\alpha\sqrt{-1}$ et $-\alpha\sqrt{-1}$, et celles de $\sqrt{-b}$ seront $+\beta\sqrt{-1}$ et $-\beta\sqrt{-1}$. En multipliant chacune des déterminations du premier radical par chacune de celles du second, on obtient deux produits différents, $+\alpha\beta$ et $-\alpha\beta$, qui sont précisément les deux valeurs du radical $\sqrt{ab}$. Mais, si l'on doit multiplier seulement $+\alpha\sqrt{-1}$ par $+\beta\sqrt{-1}$, ou $-\alpha\sqrt{-1}$ par $-\beta\sqrt{-1}$, en d'autres termes, s'il faut ne multiplier entre elles que les déterminations des radicaux proposés formées avec une même détermination de $\sqrt{-1}$, il n'en résulte qu'un produit unique, qui est $-\alpha\beta$.

Examinons encore le cas où l'on aurait à multiplier $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$. Désignons par $+\beta$ et $-\beta$ les deux déterminations de $\sqrt{-1}$, et par α la valeur arithmétique de $\sqrt[4]{a}$.

Les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$ seront (n° 210)

$$+\alpha, \quad -\alpha, \quad +\alpha\times\beta, \quad -\alpha\times\beta.$$

En multipliant ces quatre déterminations par les deux déterminations de $\sqrt{-1}$, $+\beta$ et $-\beta$, on obtient quatre produits différents, savoir :

$$+\alpha\times\beta, \quad -\alpha\times\beta, \quad +\alpha\times\beta^2, \quad -\alpha\times\beta^2.$$

Or, β étant une détermination de $\sqrt{-1}$, on a $\beta^2=-1$, et, par suite, $+\alpha\times\beta^2=-\alpha$, $-\alpha\times\beta^2=+\alpha$. Les quatre expressions résultantes de la multiplication de $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$ ne sont donc autre chose que les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$; de sorte que l'on a $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}$. Mais il est essentiel de remarquer que cette égalité n'est exacte qu'autant que l'on attribue aux radicaux toute leur généralité : elle offrirait un sens absurde si l'on ne considérait que la valeur arithmétique de $\sqrt[4]{a}$, puisque le premier membre serait imaginaire, tandis que le second membre serait réel.

287. Dans chacun des trois derniers exemples, l'expression du produit des deux radicaux pris dans toute leur généralité s'accorde avec les règles des n°s 278 et 281; il faut seulement observer, au sujet du produit de $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$, que, si l'on réduisait les radicaux au même indice en multipliant entre eux les deux indices 4 et 2, on obtiendrait une expression fautive; car cette expression, qui serait $\sqrt[8]{a^2}\times\sqrt[8]{1}$ ou $\sqrt[8]{a^2}$, comprendrait, outre les valeurs du produit proposé, les quatre valeurs de $\sqrt[4]{-a}$. En général, quand les radicaux doivent être considérés algébriquement, on peut toujours suivre, pour la multiplication et la divi-

sion des radicaux de même indice, la règle du n° 278; et quand les indices sont différents, on peut appliquer la règle du n° 281, en ayant soin de ramener les radicaux au *plus petit indice commun*. Pour former la $n^{ième}$ puissance d'un radical du degré m, il faut chercher le plus grand commun diviseur d des nombres n et m, diviser l'indice m du radical par d, et élever la quantité qui est sous le radical à la puissance marquée par le quotient de n par d. Enfin, pour extraire la racine $n^{ième}$ d'un radical du degré m, il faut, dans tous les cas, multiplier l'indice m par n. On peut voir la démonstration de ces différentes règles dans les *Leçons d'Algèbre* de M. Lefébure de Fourcy.

Des exposants fractionnaires.

288. On a vu que, pour extraire la racine du degré n de a^m, quand l'exposant m est divisible par n, il suffit d'effectuer la division; de sorte qu'en représentant le quotient par p, la racine est a^p. Par analogie, lorsque la division ne peut pas se faire exactement, on exprime la racine en indiquant cette division; de cette manière le radical $\sqrt[n]{a^m}$ se trouve remplacé par l'expression $a^{\frac{m}{n}}$.

289. Les règles qu'il faut appliquer aux exposants fractionnaires se déduisent de celles qui viennent d'être établies pour les radicaux. En considérant successivement la multiplication, la division, la formation des puissances et l'extraction des racines, on trouve :

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$$

$$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}};$$

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m} = a^{\frac{m}{np}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

On voit par les résultats qu'on obtient dans ces différentes opérations, que les règles relatives aux exposants fractionnaires ne diffèrent point de celles qu'il faut suivre pour les exposants entiers.

290. Quand p est fractionnaire, l'expression a^{-p} doit toujours être regardée comme équivalente à $\frac{1}{a^p}$; la raison en est la même que celle qu'on a donnée dans le n° 80 au sujet des exposants négatifs entiers. Cela se voit aussi en remarquant que l'expression $a^{-\frac{m}{n}}$ peut être regardée comme provenant de $\sqrt[n]{a^{-m}}$, et que $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Quant aux règles qu'il faut suivre par rapport aux exposants fractionnaires négatifs, on reconnaît, de la même manière que dans le n° 81, qu'elles sont encore les mêmes que pour les exposants positifs (*).

(*) **277.** « Le calcul des exposants fractionnaires, dit Lacroix, est un » des exemples les plus remarquables de l'utilité des signes lorsqu'ils sont

291. Les observations que nous avons présentées sur les différentes significations des radicaux s'étendent aussi aux exposants fractionnaires : ainsi, puisque l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ est équivalente à $\sqrt[n]{a^m}$, elle admet, comme cette dernière expression, n valeurs. Mais on ne considère habituellement que celle de ces valeurs que nous avons désignée sous le nom de *valeur arithmétique*, ce qui exige que la quantité a soit positive; et ce que nous venons de dire au sujet des règles relatives aux exposants fractionnaires ne doit être entendu que dans ce sens. On a ainsi $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$, puisque les radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[np]{a^{mp}}$ ont la même valeur arithmétique; mais, lorsqu'on doit avoir égard à toutes les déterminations des expressions irrationnelles, l'égalité ci-dessus cesse d'être exacte.

Des équations exponentielles.

292. Au moyen des exposants fractionnaires positifs et négatifs, on peut considérer tous les nombres comme étant des puissances d'un même nombre donné, positif et différent de l'unité. Pour justifier cette proposition, désignons par a un nombre positif que nous supposerons d'abord plus grand que 1.

Si l'on forme les puissances successives a^0 ou 1, a^1, a^2, a^3, etc., on obtiendra une suite de nombres qui croîtront

---

» bien choisis. L'analogie qui règne entre les exposants fractionnaires et » ceux qui sont entiers, rend les règles qu'il faut suivre dans le calcul de » ceux-ci applicables à celui des autres, tandis qu'il faut des règles parti- » culières pour le calcul des radicaux, parce que le signe $\sqrt{}$ qui les exprime » n'a aucune liaison avec l'opération qui les engendre. Plus on avance dans » l'algèbre, plus on reconnaît les nombreux avantages qu'a produits dans » cette science la notation des exposants imaginée par Descartes. »

de manière à pouvoir s'élever au delà de toute limite (n° 227).

Représentons par $\frac{m}{n}$ une fraction quelconque, m et n désignant des nombres entiers positifs. La valeur de l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ sera plus grande que 1; car cette expression est équivalente à $\sqrt[n]{a^m}$: or, a étant un nombre plus grand que 1, a^m sera aussi un nombre plus grand que 1, par conséquent $\sqrt[n]{a^m}$ ne pourra être qu'un nombre plus grand que 1. De plus, la valeur de l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ sera d'autant plus grande que l'exposant sera plus grand; car, en désignant par α et β deux exposants positifs quelconques, on aura $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \times a^\beta$: or, a^β étant plus grand que 1, le produit $a^\alpha \times a^\beta$ sera plus grand que a^α.

Posons maintenant $\beta = \frac{1}{n}$, n étant un nombre entier, il viendra $a^{\alpha+\beta} - a^\alpha = a^\alpha\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = a^\alpha\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$; or on a vu que l'on peut toujours donner au nombre n une valeur assez grande pour que $\sqrt[n]{a}$ diffère aussi peu qu'on le veut de 1 (n° 229); on pourra donc faire prendre au nombre β une valeur assez petite pour que la différence $a^{\alpha+\beta} - a^\alpha$ soit aussi petite que l'on voudra.

Il suit de ces explications que, si l'on désigne par x et y deux quantités variables, et si l'on pose l'équation

$$y = a^x,$$

en donnant à x une suite de valeurs très-rapprochées les unes des autres, depuis 0 jusqu'à $+\infty$, on obtiendra pour y une suite de valeurs très-rapprochées les unes des autres; de sorte que, si x croissait d'une manière continue depuis 0

jusqu'à $+\infty$, y passerait par tous les états de grandeur depuis 1 jusqu'à $+\infty$.

Concevons que l'on donne à x des valeurs négatives; à cet effet, posons $x = -x'$. L'équation ci-dessus deviendra

$$y = a^{-x'}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{a^{x'}};$$

et puisqu'en faisant passer x' par tous les états de grandeur depuis zéro jusqu'à $+\infty$, on pourra obtenir pour $a^{x'}$ tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini, on trouvera pour $\frac{1}{a^{x'}}$, ou y, tous les nombres depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{\infty}$ ou zéro.

Supposons actuellement que a soit un nombre plus petit que 1. Représentons ce nombre par $\frac{1}{b}$, b sera un nombre plus grand que 1, et l'équation $y = a^x$ se changera dans la suivante :

$$y = \left(\frac{1}{b}\right)^x, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{b^x}.$$

En faisant passer x par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à $+\infty$, on obtiendra pour b^x tous les nombres depuis 1 jusqu'à $+\infty$; par conséquent on aura pour y tous les nombres depuis 1 jusqu'à zéro. Si l'on fait ensuite passer x par tous les états de grandeur depuis zéro jusqu'à $-\infty$, il en résultera pour b^x toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à zéro, par conséquent on trouvera pour y tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini.

On conclut de tout ce qui précède, qu'*en formant toutes les puissances d'un nombre quelconque positif, plus grand ou plus petit que* 1, *on peut reproduire tous les nombres.*

293. Supposons que dans l'équation $a^x = y$, la valeur de y soit donnée, et désignons-la par b; de sorte que l'on devra avoir $a^x = b$.

Pour montrer comment on pourra calculer la valeur de x, considérons d'abord le cas où l'on a $a > 1$ et $b > 1$. Si l'on met à la place de x les nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc., on parviendra à deux nombres consécutifs n, $n+1$ (n pouvant être zéro) qui seront tels, que l'on aura $a^n < b$ et $a^{n+1} > b$. On devra en conclure que la valeur de x est comprise entre n et $n+1$; de sorte que, si l'on pose $x = n + \frac{1}{y}$, y sera un nombre plus grand que 1.

L'équation proposée se changera alors dans celle-ci :

$$a^{n+\frac{1}{y}} = b, \text{ ou } a^n \times a^{\frac{1}{y}} = b; \text{ d'où } a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^n}, \; a = \left(\frac{b}{a^n}\right)^y.$$

Le quotient de b par a^n étant compris entre 1 et a, on pourra déterminer la valeur entière approchée de y en remplaçant successivement y par les nombres 2, 3, etc. En continuant de la même manière, on obtiendra la valeur de x exprimée en fraction continue.

Soit, par exemple, l'équation

$$10^x = 2.$$

Comme on voit immédiatement que la valeur de x est comprise entre 0 et 1, on pose $x = \frac{1}{y}$; l'équation ci-dessus devient alors $10^{\frac{1}{y}} = 2$, d'où $10 = 2^y$. Les puissances successives de 2 étant 2, 4, 8, 16, la valeur de y est comprise entre 3 et 4; on a donc $y = 3 + \frac{1}{z}$. En substituant cette valeur de y dans l'équation $10 = 2^y$, on trouve

$$2^{3+\frac{1}{z}} = 10, \quad \text{ou} \quad 2^3 \times 2^{\frac{1}{z}} = 10;$$

d'où l'on conclut

$$2^{\frac{1}{z}} = \frac{10}{8} = 1{,}25, \quad \text{et} \quad (1{,}25)^z = 2.$$

En formant les puissances successives de 1,25, on voit que le nombre 2 est compris entre $(1,25)^3$ et $(1,25)^4$, de sorte que l'on a $z = 3 + \frac{1}{u}$; et en substituant cette valeur de z dans la dernière équation ci-dessus, on trouve

$$(1,25)^{3+\frac{1}{u}} = 2,$$

d'où l'où conclut

$$(1,25)^{\frac{1}{u}} = \frac{2}{(1,25)^3} = 1,024, \quad \text{et} \quad (1,024)^u = 1,25.$$

On reconnaît par la dernière équation, que la valeur de u est comprise entre 9 et 10, de sorte que $u = 9 + \frac{1}{v}$; etc.

Il résulte de ces calculs, que l'on a

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}$$

En calculant la quatrième réduite de cette fraction continue, on obtient pour la valeur approchée de x la fraction $\frac{28}{93}$. Cette valeur est trop forte; mais l'erreur est moindre que $\frac{1}{93 \times 103}$ ou $\frac{1}{9579}$ (n° 250).

Supposons maintenant que, dans l'équation $a^x = b$, on ait $a > 1$ et $b < 1$. La valeur de x devra être négative (n° 292), et si l'on pose $x = -y$, l'équation deviendra

$$a^{-y} = b, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^y} = b, \quad \text{d'où} \quad a^y = \frac{1}{b}.$$

b étant moindre que l'unité, $\frac{1}{b}$ sera un nombre plus grand que 1; ainsi l'on sera ramené au cas précédent.

Si l'on a $a < 1$ et $b > 1$, la valeur de x devra encore

être négative; et en posant $x = -y$, on aura l'équation

$$a^{-y} = b, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^y} = b, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^y = b.$$

Comme $\frac{1}{a}$ sera plus grand que 1, on sera encore ramené au premier cas.

Enfin, si l'on a $a < 1$ et $b < 1$, on pourra écrire l'équation de cette manière :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b}.$$

Comme $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ seront des nombres plus grands que 1, on sera encore ramené au premier cas.

On donne aux équations que nous venons de considérer, et en général à toutes celles où les inconnues entrent dans les exposants, le nom d'équations *exponentielles*.

294. Cherchons quelles sont les conditions nécessaires pour que la valeur de x qui vérifie l'équation $a^x = b$ soit commensurable.

Supposons que a soit un nombre entier, et b une quantité commensurable plus grande que 1. La valeur de x devra être positive, et si elle est commensurable, elle pourra être exprimée par $\frac{m}{n}$, m et n étant des nombres entiers. En remplaçant x dans l'équation par $\frac{m}{n}$, on a

$$a^{\frac{m}{n}} = b, \quad \text{d'où} \quad a^m = b^n.$$

On voit, par la seconde égalité, que b doit être un nombre entier; car, s'il était fractionnaire, b^n serait aussi fractionnaire, et l'égalité n'aurait pas lieu, puisque a^m est un nombre entier. On voit, de plus, que a et b doivent être composés des mêmes facteurs premiers; car tout facteur

premier qui divise a divise aussi a^m, par conséquent il doit diviser b^n, ce qui exige qu'il divise b (n° 216) : par la même raison, tout facteur premier de b doit diviser a.

Supposons $a = \alpha^p \beta^q$, et $b = \alpha^r \beta^s$, α et β désignant les facteurs premiers de a et de b ; l'égalité $a^m = b^n$ deviendra

$$\alpha^{mp} \beta^{mq} = \alpha^{nr} \beta^{ns};$$

or, pour que cette dernière égalité existe, il faut que l'on ait $mp = nr$, $mq = ns$, d'où $\frac{m}{n} = \frac{r}{p} = \frac{s}{q}$.

Ainsi, *pour que la valeur de* x *soit commensurable, il faut que* b *soit un nombre entier, que les facteurs premiers de* b *soient les mêmes que ceux de* a, *et que les exposants de ces facteurs dans* b *soient proportionnels aux exposants des mêmes facteurs dans* a.

Ces conditions sont suffisantes; car, en supposant $a = \alpha^p \beta^q$, $b = \alpha^r \beta^s$, $\frac{r}{p} = \frac{s}{q}$, on trouve

$$a^{\frac{r}{p}} = \alpha^r \times \beta^{\frac{qr}{p}} = \alpha^r \beta^s = b.$$

Si b était une quantité plus petite que 1, la valeur de x serait négative; en la supposant commensurable, on pourrait la représenter par $-\frac{m}{n}$, et l'on aurait

$$a^{-\frac{m}{n}} = b, \quad \text{d'où} \quad b^n = \frac{1}{a^m}.$$

D'après la dernière égalité, il faut que b soit une fraction telle que, si on la réduit à ses moindres termes, elle ait pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre dont la puissance $n^{ième}$ soit égale à a^m. Par conséquent, si l'on suppose, comme précédemment, $a = \alpha^p \beta^q$, il faut que l'on ait $b = \frac{1}{\alpha^r \beta^s}$ et $\frac{r}{p} = \frac{s}{q}$.

Lorsque l'on a $a = 10$, et $b > 1$, les conditions précé-

dentes deviennent $b = 2^r 5^s$, et $r = s$, d'où $b = 10^r$; quand b est plus petit que l'unité, on doit avoir $b = \frac{1}{2^r . 5^s}$ et $r = s$, d'où $b = \frac{1}{10^r}$.

Il suit de là que, dans le cas de $a = 10$, la valeur de x n'est commensurable qu'autant qu'elle est un nombre entier.

On pourrait aussi chercher les conditions nécessaires pour que la valeur de x fût commensurable, en supposant a un nombre fractionnaire, et b étant toujours une quantité commensurable; mais cette recherche est sans intérêt, et elle n'offre d'ailleurs aucune difficulté.

Propriétés générales des logarithmes.

295. Lorsque l'on considère tous les nombres comme étant produits par les diverses puissances d'un nombre constant, les exposants de ces puissances prennent le nom de *logarithmes*. Ainsi, dans l'équation $y = a^x$ (a étant un nombre positif quelconque), chaque valeur de x est le logarithme de la valeur correspondante de y, ce qu'on exprime ainsi : $x = \log y$.

Le nombre constant au moyen duquel on calcule un *système de logarithmes*, est la *base* de ce système.

296. Soient y, y', y'', etc., des nombres quelconques, et x, x', x'', etc., les logarithmes de ces nombres dans le système dont la base est a; on aura

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'}, \quad y'' = a^{x''}, \text{ etc.}$$

On conclut de là, d'après les règles relatives aux exposants,

$$yy'y'' = a^{x+x'+x''}, \quad \frac{y}{y'} = a^{x-x'}, \quad y^m = a^{mx}, \quad \sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}};$$

donc

$$\log yy'y'' = x + x' + x'', \quad \log \frac{y}{y'} = x - x';$$

$$\log y^m = mx, \qquad \log \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m}:$$

par conséquent

$$\log yy'y'' = \log y + \log y' + \log y'',$$

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y',$$

$$\log y^m = m \times \log y, \quad \log \sqrt[m]{y} = \frac{\log y}{m}.$$

Les quatre dernières égalités fournissent les règles ci-après :

1°. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs;*

2°. *Le logarithme du quotient de deux nombres est égal au logarithme du dividende, diminué de celui du diviseur;*

3°. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par le degré de la puissance;*

4°. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, divisé par le degré de la racine.*

Il résulte, de la seconde règle, que *le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur, diminué du logarithme du dénominateur.*

Et, d'après les deux premières règles, *le logarithme du quatrième terme d'une proportion est égal à la somme des logarithmes des deux moyens, diminuée du logarithme du premier terme.*

297. Quand on a formé un système de logarithmes, il

est facile de passer de ce système à un autre. En effet, désignons par a la base du premier système, par b celle du second système, et par x le logarithme d'un nombre n dans le système dont la base est b; on devra avoir

$$b^x = n.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, dans le système dont la base est a, on trouve

$$x \times \log b = \log n, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\log n}{\log b} = \log n \times \frac{1}{\log b}.$$

Donc, *pour obtenir les logarithmes de tous les nombres par rapport à la nouvelle base* b, *il suffit de multiplier les logarithmes des mêmes nombres, dans le système dont la base est* a, *par la quantité constante* $\frac{1}{\log b}$, *le logarithme désigné par* log b *étant pris dans la base* a.

298. On déduit de la définition des logarithmes, et de ce qui a été dit dans le n° 292, que, 1° *dans tout système, le logarithme de la base est l'unité, et le logarithme de l'unité est zéro;* 2° *lorsque la base est un nombre plus grand que l'unité, les logarithmes des nombres plus grands que l'unité sont positifs, les logarithmes des nombres plus petits que l'unité sont négatifs, et le logarithme de zéro est* $-\infty$; 3° *lorsque la base est moindre que l'unité, les logarithmes des nombres plus grands que l'unité sont négatifs, ceux des nombres plus petits que l'unité sont positifs, et le logarithme de zéro est* $+\infty$.

299. Comme les logarithmes ne sont ordinairement employés que pour abréger les calculs numériques, on ne considère que les logarithmes des nombres positifs, et l'on

suppose toujours que la base est un nombre positif. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes (*).

300. On peut faire usage des logarithmes toutes les fois qu'il s'agit de résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est en exposant. Ainsi, de l'équation $a^x = b$ on tire, comme on l'a vu dans le n° 297, $x = \frac{\log b}{\log a}$.

Si l'on a à résoudre l'équation $a^{b^x} = c$, on posera $b^x = y$; il viendra $a^y = c$, d'où $y = \frac{\log c}{\log a}$; et en mettant la valeur de y dans l'équation $b^x = y$, on en conclura

$$x = \frac{\log(\log c) - \log(\log a)}{\log b}.$$

Soit encore l'équation

$$a^{x+2} - \frac{b}{a^{x-1}} = c.$$

En posant $a^x = z$, il vient

$$a^2 z - \frac{ab}{z} = c, \quad \text{ou} \quad a^2 z^2 - cz = ab.$$

La dernière équation fait connaître la valeur de z; et si cette inconnue admet une valeur positive, on obtient la valeur correspondante de x en appliquant à l'équation $a^x = z$ ce qui a été dit ci-dessus.

301. Dans les Traités d'arithmétique, on déduit la théorie des logarithmes de celle des progressions. A cet effet, on conçoit une progression par quotient dont le premier terme est 1, et dont la raison est une quantité très-peu différente de l'unité, afin que les termes croissent par des

(*) Plusieurs géomètres ont pensé qu'en raison des valeurs algébriques des radicaux, on devrait admettre que les nombres négatifs peuvent avoir des logarithmes; mais l'examen de ces difficultés serait tout à fait déplacé dans un Traité élémentaire.

degrés presque insensibles ; de sorte que la progression peut être regardée comme renfermant tous les nombres. On prend en même temps une progression par différence ayant pour premier terme zéro, et dont la raison est une quantité très-petite. En supposant ces deux progressions écrites de manière que les termes de la seconde soient placés respectivement au-dessous de ceux de la première, le terme 0 de la progression par différence correspondant au terme 1 de la progression par quotient, chaque terme de la progression par différence est ce qu'on appelle le *logarithme du terme correspondant de l'autre progression*.

Les logarithmes formés de cette manière sont toujours les exposants des puissances auxquelles il faut élever un nombre constant, pour reproduire les nombres auxquels les logarithmes appartiennent.

Pour le démontrer, désignons par q une quantité qui pourra être supposée aussi voisine de l'unité qu'on le voudra, par d une quantité très-petite, et considérons les deux progressions

$$\begin{array}{l} \div \ldots \quad q^{-3} : \quad q^{-2} \quad : \quad q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 \ldots, \\ \div \ldots -3d \,.\, -2d \,.\, -d \quad 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \ldots \end{array}$$

Si l'on pose $md = 1$ et $q^m = a$, d'où $q = a^{\frac{1}{m}} = a^d$, la progression par quotient pourra s'écrire comme il suit :

$$\div \ldots a^{-3d} : a^{-2d} : a^{-d} : 1 : a^d : a^{2d} : a^{3d} \ldots$$

On voit donc que les termes de cette progression sont les valeurs qu'on obtiendra pour y, en posant l'équation $y = a^x$, et remplaçant successivement x par les différents termes de la progression par différence.

302. Les logarithmes ont été inventés par Néper, savant Écossais ; et c'est par les propriétés des progressions qu'il y fut conduit. Il avait été amené à considérer un sys-

tème particulier de logarithmes qui a reçu le nom de *système népérien*, et dont la base est le nombre que nous avons désigné par e (n° 238). Les logarithmes népériens sont aussi appelés *logarithmes hyperboliques*, parce qu'ils mesurent les parties de l'aire comprise entre une hyperbole équilatère et ses asymptotes. Les logarithmes dont on fait habituellement usage dans les calculs ont pour base 10; on les nomme *logarithmes vulgaires*, et aussi logarithmes de Briggs, parce que ce fut Briggs qui publia les premières Tables de logarithmes calculées pour cette base.

Dans les parties élevées des mathématiques, on emploie fréquemment les logarithmes népériens, et on rapporte tous les systèmes de logarithmes au système népérien. On appelle alors *module* d'un système de logarithmes, la quantité constante par laquelle il faut multiplier les logarithmes népériens, pour obtenir ceux du système désigné. D'après ce qu'on a vu dans le n° 297, en indiquant par la le logarithme népérien du nombre a, le module des logarithmes dont la base a est $\frac{1}{la}$. Ce module est aussi le logarithme du nombre e par rapport à la base a; car, en exprimant par l'abréviation log les logarithmes calculés pour cette base, on a $\log e = le \times \frac{1}{la}$ ou $\log e = \frac{1}{la}$, puisque $le = 1$ (*).

(*) Le module $\frac{1}{la}$, ou $\log e$, est la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{\log(1+h)}{h}$, quand h converge vers zéro. En effet,

$$\frac{\log(1+h)}{h} = \log(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Si l'on pose $h = \frac{1}{m}$, l'expression $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ devient $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Or, en supposant que m soit un nombre entier, et en développant $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ par la

Des logarithmes dont la base est 10. — *Usage des Tables.*

303. Lorsque l'on prend 10 pour base des logarithmes, les logarithmes des nombres 10, 100, 1000, 10000, etc., sont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc.

Les logarithmes des nombres qui ne sont pas des puissances exactes de 10 ne peuvent être obtenus que par approximation (n° 294). On exprime les valeurs approchées de ces logarithmes en décimales.

La partie entière du logarithme d'un nombre plus grand que l'unité contient autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans la partie entière de ce nombre. Car un nombre dont la partie entière a n chiffres, est compris entre 10^{n-1} et 10^n; par conséquent son logarithme est compris entre $n-1$ et n; il est donc composé de $n-1$ unités et d'une partie décimale moindre que l'unité.

---

formule du binôme, qui sera démontrée dans le chapitre suivant, on trouve

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n} + \text{etc.}$$

On peut écrire ainsi cette formule :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right) + \text{etc.}$$

Lorsque m devient infini, le second membre de la dernière égalité se réduit à la série que nous avons considérée dans le n° 238, et dont la somme est le nombre e. On a donc, pour des valeurs de m qui croissent indéfiniment, *limite de* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$; et par conséquent, pour des valeurs de h qui décroissent jusqu'à zéro, *limite de* $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$; *limite de* $\log(1+h)^{\frac{1}{h}} = \log e$.

Cette propriété a fait donner à la partie entière d'un logarithme le nom de *caractéristique*.

304. On ne trouve dans les Tables que les logarithmes des nombres entiers : pour obtenir celui d'une fraction, il faut appliquer la règle qui a été énoncée dans le n° 296. Lorsque la fraction proposée est plus petite que l'unité, on peut exprimer son logarithme, qui est négatif, de manière que la partie décimale reste positive. Pour cela, on ajoute, par la pensée, au logarithme du numérateur, assez d'unités pour qu'on puisse en retrancher le logarithme du dénominateur, et l'on diminue la partie entière du reste du même nombre d'unités. Par exemple, si le logarithme du numérateur est 1,349 586 2, et celui du dénominateur 3,584 276 1, on retranche le second logarithme du premier, comme si celui-ci avait pour caractéristique 4, ce qui donne 0,765 310 1; et comme ce reste doit être diminué de 3, on écrit

$$\bar{3},765\,310\,1.$$

Le signe — se place au-dessus de la caractéristique, pour montrer qu'il n'affecte que cette caractéristique.

Si l'on voulait changer l'expression $\bar{3},765\,310\,1$ en une autre équivalente entièrement négative, on remarquerait que

$$\begin{aligned}\bar{3},765\,310\,1 &= -3 + 0,765\,310\,1 = -2 - (1 - 0,765\,310\,1)\\ &= -2,234\,689\,9.\end{aligned}$$

Cette transformation se réduit à diminuer de 1 la valeur absolue de la caractéristique, et à retrancher le premier chiffre significatif à droite de la partie décimale de 10 et les autres chiffres décimaux de 9.

Pour ramener un logarithme qui est entièrement négatif à une expression dont la partie décimale soit positive, il faut opérer sur la partie décimale du logarithme négatif

comme dans le cas précédent, et augmenter la caractéristique de 1; car

$$-2{,}2346899 = -2 - 0{,}2346899 = -3 + (1 - 0{,}2346899)$$
$$= \bar{3}{,}7653101.$$

Si le logarithme $\bar{3}{,}7653101$ doit être multiplié par un nombre entier, par exemple par 4, le produit sera

$$-3 \times 4 + 0{,}7653101 \times 4 \quad \text{ou} \quad \bar{9}{,}0612404.$$

Lorsqu'un logarithme, formé d'une caractéristique négative et d'une partie décimale positive, doit être divisé par un nombre entier, il faut prendre le quotient de la division de la caractéristique de manière que le reste soit positif. Par exemple, soit $\bar{7}{,}8295642$ à diviser par 3 : le quotient de -7 par 3 est -2 avec le reste -1, ou -3 avec le reste $+2$; on prend -3, et, en continuant l'opération, on trouve pour résultat $\bar{3}{,}7765214$.

305. D'après les principes qui ont été établis dans le n° 296, on a

$$\log(A \times 10^n) = \log A + \log 10^n = \log A + n,$$
$$\log\left(\frac{A}{10^n}\right) = \log A - \log 10^n = \log A - n.$$

Ainsi, *le logarithme du produit ou du quotient d'un nombre par une puissance entière de* 10, *est égal au logarithme de ce nombre, augmenté ou diminué d'autant d'unités qu'il y en a dans l'exposant de la puissance de* 10.

Il suit de là que *le logarithme d'un nombre décimal plus grand que l'unité, et le logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité, quand la caractéristique seule est négative, ont la même partie décimale que le logarithme du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule.*

On peut facilement connaître, à l'inspection d'un nombre décimal plus petit que l'unité, quelle est la caractéristique de son logarithme. En effet, si l'on désigne par p le nombre des zéros qui se trouvent entre la virgule et le premier chiffre significatif, le nombre proposé sera plus petit que $\frac{1}{10^p}$ et plus grand que $\frac{1}{10^{p+1}}$; par conséquent, son logarithme sera compris entre $-p$ et $-(p+1)$: ce logarithme sera donc égal à $-(p+1)$ avec une partie décimale positive, ou à $-p$ avec une partie décimale négative. Ainsi :

1°. *Quand la partie décimale du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité est positive, la caractéristique est égale au nombre qui marque le rang du premier chiffre significatif à droite de la virgule dans le nombre proposé;*

2°. *Quand le logarithme est entièrement négatif, la caractéristique est inférieure d'une unité au rang du premier chiffre significatif à droite de la virgule.*

La caractéristique, positive ou négative, d'un logarithme, fait donc toujours connaître l'ordre des plus hautes unités du nombre auquel appartient ce logarithme.

306. Pour appliquer les logarithmes aux calculs numériques, il faut savoir résoudre, au moyen des Tables, ces deux questions : 1° *Un nombre quelconque étant donné, trouver son logarithme;* 2° *un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

1re Question. — *Trouver le logarithme d'un nombre.*

Les Tables de *Lalande*, et celles qui ont été publiées par MM. *Reynaud* et *Marie*, contiennent les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10 000; celles de *Callet* s'étendent jusqu'à 108 000. Dans les Tables de *Callet*, les caractéristiques sont omises; mais il est facile de les réta-

blir, puisqu'elles sont immédiatement connues par la règle du n° 303.

Pour trouver le logarithme d'un nombre entier qui surpasse les plus grands nombres contenus dans les Tables, on sépare à la gauche du nombre donné, par une virgule, autant de chiffres qu'il en faut pour former un nombre renfermé dans les limites des Tables, et qui soit le plus grand possible. Le nombre proposé prend ainsi la forme d'un nombre décimal. Soient n la partie entière, d la partie décimale; soient l la partie décimale du logarithme de n, et δ la différence des logarithmes des nombres n et $n+1$, différence qui se trouve toute calculée dans les Tables. On pose la proportion $1 : d :: \delta : x$, d'où $x = d \times \delta$. La valeur de x est ce qu'il faut ajouter à l pour avoir la partie décimale du logarithme de $n+d$, qui est aussi celle du logarithme du nombre entier donné. Quant à la caractéristique, on la détermine comme nous l'avons dit plus haut.

Quand le nombre proposé est un nombre décimal plus grand ou plus petit que l'unité, la caractéristique du logarithme est toujours connue (n° 305), et la partie décimale ne changeant pas par la suppression de la virgule dans le nombre proposé, on la détermine de la même manière que dans le cas précédent.

Quand le nombre donné contient des entiers et des fractions, on le réduit à une seule fraction, et le logarithme de cette fraction s'obtient par la règle qui a été établie dans le n° 296.

2e Question. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

La caractéristique du logarithme faisant toujours connaître l'ordre des plus hautes unités du nombre cherché (n° 303), on peut considérer la partie décimale du logarithme indépendamment de la caractéristique; quand on a trouvé un nombre qui correspond à cette partie décimale,

il reste seulement à multiplier ou à diviser ce nombre par une puissance convenable de 10.

Lorsque la partie décimale du logarithme donné se trouve dans les Tables, on connaît immédiatement le nombre correspondant.

Lorsque cette partie décimale ne se trouve pas exactement dans les Tables, on cherche celle qui en approche le plus sans la surpasser. Représentons par l cette partie décimale la plus approchée, par n le nombre entier correspondant, par l' la partie décimale du logarithme donné, par δ la différence des logarithmes de n et de $n+1$, enfin par δ' la différence $l'-l$. On pose la proportion $\delta : \delta' :: 1 : x$, d'où $x = \frac{\delta'}{\delta}$. La valeur de x réduite en décimales est ce qu'il faut ajouter au nombre n pour obtenir un nombre dont le logarithme ait la même partie décimale que le logarithme donné.

Si le logarithme donné était entièrement négatif, il faudrait rendre la partie décimale positive; on opérerait ensuite comme nous venons de l'expliquer.

307. Dans les Tables de *Callet*, on trouve d'abord, sous le titre de Chiliade I, une partie qui donne les logarithmes des nombres entiers, depuis 1 jusqu'à 1200, exprimés avec huit décimales, et placés respectivement en regard des nombres auxquels ils correspondent.

La partie des Tables qui suit immédiatement renferme les logarithmes de tous les nombres entiers depuis 1020 jusqu'à 108 000. La colonne intitulée N contient les nombres depuis 1020 jusqu'à 10 800, et la colonne suivante, marquée 0, renferme les logarithmes de ces nombres. Les nombres isolés qu'on remarque sur la gauche de cette colonne sont censés écrits au-dessous d'eux-mêmes, de manière que chaque ligne soit remplie.

Les parties décimales des logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 10 800 sont aussi celles des logarithmes

des nombres de 10 en 10, depuis 10 200 jusqu'à 108 000. On obtient les logarithmes des nombres intermédiaires, au moyen des colonnes suivantes, qui sont marquées 1, 2, 3, ..., 9. Ainsi, pour avoir le logarithme de 27 796, on cherche dans la colonne N le nombre 2779; on s'avance dans la ligne horizontale qui contient ce nombre, jusqu'à la colonne marquée 6; on y trouve les derniers chiffres du logarithme cherché, et l'on prend pour les premiers chiffres le nombre isolé le plus voisin, en remontant dans la colonne marquée 0. On obtient ainsi, en rétablissant la caractéristique,

$$\log 27\,796 = 4{,}443\,982\,3.$$

En agissant de la même manière pour le nombre 27 798, on ne trouve rien à la colonne marquée 8, dans la ligne qui répond à 2779; on descend alors à la ligne inférieure qui donne les derniers chiffres du logarithme, et l'on prend pour les premiers chiffres ceux qui se trouvent sur la même ligne horizontale, dans la colonne marquée 0; on trouve ainsi

$$\log 27\,798 = 4{,}444\,013\,6.$$

La différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs se trouve dans la dernière colonne à droite, intitulée *dif.*, en tête de la petite Table la plus voisine de ces nombres. Il faut observer que cette différence exprime des unités décimales du dernier ordre. De plus, la Table proportionnelle qui se trouve au-dessous donne les produits de cette différence par les nombres 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9; on en déduit aisément le produit de la même différence par une fraction décimale quelconque; de sorte qu'on peut, au moyen de cette Table, se dispenser de faire les opérations qui résultent des proportions dont nous avons parlé ci-dessus.

Soit le nombre 14518469 dont on demande le logarithme. On sépare les cinq premiers chiffres à gauche, ce qui donne 14518,469. On trouve que la partie décimale du logarithme

de 14518 est 0,1619068. La Table des différences la plus voisine est celle qui répond à 299; et, dans cette Table, les nombres qui correspondent à 4, 6, 9, considérés comme des dixièmes, sont 120, 179, 269. On en conclut que $299 \times 0,4 = 120$; $299 \times 0,06 = 17,9$; $299 \times 0,009 = 2,69$. On obtient le logarithme cherché en ajoutant aux dernières unités du logarithme de 14518 les nombres 120, 17,9, 2,69.

Voici le type du calcul:

	log 14518.	0,1619068
Pour	0,4.	120
Pour	0,06.	179
Pour	0,009.	269
	log 14518469.	0,1619209.

Supposons maintenant qu'on veuille trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné. Soit, par exemple, 1619209 la partie décimale de ce logarithme. On cherche parmi les logarithmes des nombres de quatre chiffres, contenus dans la colonne marquée 0, celui qui approche le plus du logarithme donné, sans le surpasser, et l'on prend le nombre correspondant qui est 1451. On avance dans la même ligne horizontale, jusqu'à ce qu'on rencontre le nombre qui approche le plus du nombre 9209, formé par les quatre dernières figures du logarithme. Ce nombre le plus approché est 9068, qui se trouve dans la colonne 8. La différence entre 9209 et 9068 est 141. On cherche dans la Table de différences la plus voisine le nombre qui approche le plus de 141 sans le surpasser. Ce nombre est 120; il répond à 4, c'est-à-dire 0,4. La différence entre 141 et 120 est 21. On multiplie 21 par 10; on cherche le nombre le plus approché du produit 210; ce nombre est 209, qui répond à 0,7. On conclut de ces opérations que le nombre demandé est 14158,47, sauf l'ordre des plus hautes unités.

On dispose le calcul comme on le voit ci-dessous :

$\log x = 0,1619209$		
Pour	1619068.	14518
1er reste	141.	0,4
2e reste	21.	0,07
		$x = 14518,47$

308. La proportion dont on fait usage pour résoudre les deux questions dont nous venons de nous occuper, ne donne qu'une approximation ; mais celle qu'on obtient est presque toujours suffisante. Pour évaluer les limites de cette approximation, il faut recourir à l'emploi des séries (*voyez* au chapitre XVIII) ; cependant on peut parvenir à s'en rendre compte par des considérations déduites uniquement de l'inspection des Tables. Il est clair, en effet, que, si à des différences égales entre les nombres répondaient des différences égales entre les logarithmes, la proportion dont il s'agit serait rigoureuse. Or, en examinant les différences des logarithmes des nombres entiers qui se trouvent écrites dans les Tables, savoir, dans les Tables de *Lalande* et dans celles de MM. *Reynaud* et *Marie*, les différences des logarithmes des nombres entiers consécutifs au-dessus de 1000, et dans les Tables de *Callet*, les différences des logarithmes des nombres entiers consécutifs au-dessus de 10000, on voit que ces différences ne varient que d'une manière peu sensible, et qu'elles approchent d'autant plus d'être égales que les nombres sont plus grands. Il suit de là que la proportion entre les différences des nombres et celles des logarithmes s'écarte peu de l'exactitude, quand les nombres sont suffisamment grands, et qu'elle s'en écarte d'autant moins que les nombres sont plus grands.

Mais indépendamment de l'inexactitude de cette proportion, il y a une autre cause d'erreur qui consiste en ce que les Tables ne donnent, pour les logarithmes et leurs diffé-

rences, que des valeurs approchées qui peuvent être fautives en plus ou en moins d'une demi-unité décimale du 7e ordre.

Dans la seconde question du n° 306, pour laquelle on calcule le quotient de deux différences de logarithmes, que nous avons désignées par δ et δ', une unité d'erreur sur le logarithme donné suffit pour altérer ce quotient d'une quantité exprimée par $\frac{1}{\delta}$. Or, quand on fait usage des Tables de Callet, la différence δ varie depuis 425 jusqu'à 44. Il en résulte que, dans le cas où l'on veut trouver le nombre auquel appartient un logarithme qui n'est connu qu'à moins d'une unité du dernier chiffre à droite, la proportion à laquelle on a recours, lors même qu'elle serait rigoureuse, ne donnerait la valeur du nombre demandé qu'à moins d'une quantité qui pourrait varier entre $\frac{1}{425}$ et $\frac{1}{44}$ de l'unité du cinquième chiffre à partir de la gauche. Par conséquent on ne doit pas espérer que cette proportion fournisse jamais plus de deux chiffres exacts, et elle peut même n'en donner qu'un seul.

Quand il faut ajouter plusieurs logarithmes afin d'obtenir le logarithme du nombre cherché, ou quand il faut multiplier un logarithme donné par un nombre entier, le logarithme que l'on obtient peut être fautif de plusieurs unités du dernier chiffre à droite, et l'erreur que l'on commet dans l'évaluation du nombre demandé devient plus considérable.

309. On appelle *complément arithmétique* d'un logarithme ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour obtenir une somme égale à 10. Il suit de cette définition que le complément arithmétique d'un logarithme s'obtient en retranchant de 10 le premier chiffre significatif à partir de la droite, et en retranchant les autres chiffres de 9.

On se sert des compléments arithmétiques afin d'éviter

les logarithmes négatifs, ou pour effectuer, au moyen d'une seule addition, un calcul qui exige que l'on ajoute plusieurs logarithmes, et que de la somme on retranche d'autres logarithmes. A cet effet, on prend les compléments des logarithmes qui doivent être soustraits, et l'on fait la somme de ces compléments et de tous les autres logarithmes. Il est facile de voir que le résultat de cette addition surpasse celui qu'on devait obtenir d'autant de dizaines que l'on a pris de compléments; de sorte que, pour avoir le véritable résultat, il faut diminuer la somme qu'on a trouvée de ce nombre de dizaines. On peut exécuter cette correction sur la partie entière seulement de la somme; de cette manière, la partie décimale reste toujours positive.

Si l'on avait à soustraire un logarithme plus grand que 10, il faudrait former le complément de ce logarithme en le retranchant du nombre de dizaines immédiatement supérieur à la caractéristique; mais ce cas se rencontre rarement, et c'est par cette raison qu'on définit les compléments arithmétiques comme nous l'avons fait ci-dessus.

Exemples de calculs effectués par les logarithmes.

1er Exemple. — Soit $x = \frac{239 \times 827 \times 543}{76 \times 17}$; on demande la valeur de x.

$$\begin{array}{rl}
\log 239 = & 2{,}378\,397\,9 \\
\log 827 = & 2{,}917\,505\,5 \\
\log 543 = & 2{,}734\,799\,8 \\
\text{Compl. log } 76 = & 8{,}119\,186\,4 \\
\text{Compl. log } 17 = & 8{,}769\,551\,1 \\
\hline
\log x = & 4{,}919\,440\,7 \\
\text{Pour} & 919\,439\,0\ldots\ 83069 \\
1^{er}\text{ reste} & 17\ldots\ 03 \\
2^{e}\text{ reste} & 1\ldots\ 002 \\
\hline
 & x = 83\,069{,}32
\end{array}$$

En faisant le calcul directement, on trouve $x = 83069,333$; de sorte que l'emploi des logarithmes ne donne exactement que les six premiers chiffres.

Si l'on ne faisait pas usage des compléments, il faudrait faire deux additions et une soustraction, au lieu d'une seule addition.

2e Exemple. — Calculer la 64e puissance de 2.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ 64 \times \log 2 &= 19,2659200 \\ 2^{64} &= 18\,446\,750\,000\,000\,000\,000. \end{aligned}$$

Le produit du logarithme de 2 par 64 pouvant être fautif de près de 32 unités du septième ordre, et la différence entre les logarithmes de 18 446 et de 18 447 étant 236 unités du même ordre, l'erreur que l'on commet dans l'évaluation du nombre demandé peut s'élever à près de $\frac{32}{236}$ de l'unité du cinquième chiffre en partant de la gauche (n° 308); on n'est donc certain que de l'exactitude des cinq premiers chiffres. Mais on peut prendre le logarithme de 2 avec deux ou trois décimales de plus; car les Tables de Callet contiennent, à la suite des deux parties dont nous avons parlé dans le n° 307, les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200, calculés avec 20 décimales. On aura ainsi le logarithme de $(2)^{64}$ à moins d'une unité du 7e ordre, et l'on en déduira une valeur plus exacte du nombre demandé. On trouve de cette manière

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,301\,029\,995 \\ 64 \log 2 &= 19,2659197 \\ 2^{64} &= 18\,446\,740\,000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

Ce résultat est exact dans les sept premiers chiffres.

3e Exemple. Calculer $\sqrt[5]{\left(\frac{23}{417}\right)^3}$.

$$\log 23 = 1,3617278$$
$$\text{Comp. } \log 417 = 7,3798639$$
$$\log \frac{23}{417} = \bar{2},7415917$$
$$3 \text{ fois } \log \frac{23}{417} = \bar{4},2247751$$
$$\frac{3}{5} \times \log \frac{23}{417} = \bar{1},2449550, \quad \text{d'où} \quad \sqrt[5]{\left(\frac{23}{417}\right)^3} = 0,17577.$$

La caractéristique -1 du logarithme de $\sqrt[5]{\left(\frac{23}{417}\right)^3}$ indique que les plus hautes unités du nombre cherché sont des dixièmes; par conséquent, si l'on veut seulement avoir ce nombre à moins de 0,00001, il suffit d'obtenir les cinq premières figures, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de faire usage des parties proportionnelles.

On peut éviter l'emploi des caractéristiques négatives; car, en ajoutant au logarithme de 23 le complément arithmétique de celui de 417, on obtient une somme 8,7415917, qui est le logarithme de $\frac{23}{417}$ augmenté de 10 unités; le produit de cette somme par 3, savoir: 26,2247751, est le logarithme du cube de la même fraction, augmenté de 30 unités; et la division de ce produit par 5 donne le quotient 5,2449550, qui est le logarithme du nombre cherché, augmenté de 6 unités. On obtiendra donc ce nombre en cherchant le nombre qui a pour logarithme 5,2449550, et le divisant par 10^6.

Si l'on veut calculer la racine septième de $\left(\frac{23}{417}\right)^3$, la division de 26,2247751 par 7 donnera un quotient qui surpassera le logarithme de la racine demandée d'un nombre

fractionnaire; de sorte que, si l'on cherche le nombre qui correspond à ce logarithme trop fort, il faudra le diviser par une puissance de 10 marquée par un exposant fractionnaire, et ce diviseur sera un nombre incommensurable. Mais on évite cet inconvénient en augmentant ou en diminuant le logarithme 26,2247751 d'un nombre d'unités tel, que l'excès de ce logarithme sur celui de $\left(\frac{23}{417}\right)^3$ soit un multiple de 7. Si l'on diminue, par exemple, ce logarithme de 2, la division par 7 donne un quotient qui est le logarithme de la racine demandée, augmenté de 4. On en déduit la valeur approchée de cette racine, comme dans l'exemple précédent.

4e Exemple. Résoudre l'équation $(1,00125)^x = 0,89625$.

$$x = \frac{\log(0,89625)}{\log(1,00125)},$$

$$\log(0,89625) = \bar{1},9524292, \quad \log(1,00125) = 0,0005425,$$

$$x = -\frac{475708}{5425}.$$

Si l'on veut avoir la valeur de x exprimée en décimales, on pourra calculer par logarithmes le quotient de 475708 par 5425; on trouve ainsi $x = -87,6881$.

Des intérêts composés.

310. On dit qu'un capital est placé à intérêt composé, lorsque le prêteur, au lieu de retirer chaque année l'intérêt de ce capital, le laisse entre les mains de l'emprunteur, pour le faire valoir conjointement avec la somme primitive, pendant l'année suivante.

Soit r l'intérêt de 1 franc pour un an, qu'on nomme le *denier de l'intérêt*. L'intérêt de 100 francs, pour le même

temps, ou le taux de l'intérêt, sera $100r$. L'intérêt d'une somme a, pour un an, sera ar, et le capital a sera devenu, après un an, $a + ar$; de sorte qu'en représentant par a' la valeur du capital a, après un an, on a

$$a' = a(1 + r).$$

Si le capital a' est placé pendant une deuxième année, il devient pareillement, à la fin de cette année,

$$a'' = a'(1 + r) = a(1 + r)^2.$$

Si le capital a'' reste placé pendant une troisième année, il devient, à la fin de cette année,

$$a''' = a''(1 + r) = a(1 + r)^3,$$

ainsi de suite. Donc, après n années, le capital primitif a devient

$$(1) \qquad A = a(1 + r)^n.$$

En appliquant les logarithmes à cette formule, on trouve

$$\log A = \log a + n \log(1 + r).$$

Au moyen de cette relation, on obtient aisément la valeur de l'une des quatre quantités A, a, r, n, lorsque les trois autres quantités sont connues.

311. Supposons que le prêteur joigne chaque année au capital une nouvelle somme qui doit aussi produire des intérêts composés jusqu'au moment du remboursement. Désignons par $a, b, c, d, \ldots, l$ les sommes qu'il place au commencement de la première année, de la deuxième, de la troisième, de la quatrième, etc., et par A la somme qu'il doit recevoir au bout de n années.

La somme a, demeurant entre les mains de l'emprunteur pendant n années, deviendra $a(1 + r)^n$.

La somme b, qui sera placée pendant $n-1$ années, deviendra $b(1+r)^{n-1}$.

La somme c, qui sera placée pendant $n-2$ années, deviendra $c(1+r)^{n-2}$; ainsi de suite.

Enfin, la dernière somme ne sera placée que pendant une année, et donnera $l(1+r)$.

On aura donc

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \ldots + l(1+r).$$

Dans le cas particulier où l'on a $a = b = c = d \ldots = l$, le second membre de l'équation précédente devient une progression par quotient dont le premier terme est $a(1+r)$, et la raison $(1+r)$. On a donc (n° 233)

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

On calculera par les logarithmes la valeur du terme $(1+r)^n$, et l'on achèvera ensuite aisément les calculs.

312. Une *annuité* est un payement qu'un débiteur effectue chaque année, pour rembourser, en un certain temps, un capital avec ses intérêts. Nommons A le capital qu'il s'agit de rembourser, et a la somme qu'on doit payer annuellement pendant n années. Les payements effectués par le débiteur avant la fin du remboursement, peuvent être considérés comme des avances faites au prêteur sur ce remboursement, et dont la valeur dépend du temps qui s'écoule entre l'une de ces époques et l'autre. Ainsi, le premier payement qui a lieu $n-1$ années avant l'époque du dernier remboursement, étant rapporté à cette époque, vaut $a(1+r)^{n-1}$; le second payement, rapporté à la même époque, vaut $a(1+r)^{n-2}$; et ainsi des autres jusqu'au dernier, qui vaut seulement a; mais la somme prêtée A vaut, entre les mains de l'emprunteur, après n années, $A(1+r)^n$. On doit

donc avoir

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a;$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Dans cette équation, A est le *prix* de l'annuité, parce que c'est la somme qu'elle représente; a est la *quotité* de l'annuité; r est le *denier* de l'intérêt; enfin n exprime la *durée* de l'annuité. On peut déterminer l'une de ces quatre quantités quand on connaît les trois autres. La détermination de r dépendrait d'une équation du degré n. Pour trouver la valeur de n, on tire de l'équation ci-dessus

$$(a - Ar)(1+r)^n = a, \quad \text{d'où} \quad (1+r)^n = \frac{a}{a - Ar},$$

et l'on en déduit

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

313. Lorsqu'on veut comparer les valeurs de plusieurs sommes payables à différentes époques, il faut rapporter toutes ces sommes à une même époque, comme on l'a fait dans la question précédente. Ainsi, supposons qu'un banquier qui doit une somme a payable dans n années, donne, pour s'acquitter, un effet dont la valeur est représentée par b, et qui est payable dans p années. En rapportant les deux sommes a et b au moment où s'effectue cette transaction, elles ne valent que $\frac{a}{(1+r)^n}$ et $\frac{b}{(1+r)^p}$; car la première somme, par exemple, doit être considérée comme la valeur primitive d'un capital qui devient a, après n années. Il suit de là que, si l'on prend la différence des deux fractions ci-dessus, cette différence marquera, suivant qu'elle sera positive ou négative, ce que le banquier devra donner ou

recevoir en retour de son échange; et, si ce retour ne peut se payer que dans un nombre q d'années, en désignant par c sa valeur au moment de l'opération, il deviendra $c(1+r)^q$, en sorte qu'il sera équivalent à

$$\left[\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right](1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

314. Les explications par lesquelles nous avons établi les formules (1) et (2) supposent que n soit un nombre entier; mais on pourrait convenir d'étendre la formule (1) aux valeurs fractionnaires de n. De cette manière, on obtiendrait, dans le calcul des intérêts, des résultats plus réguliers qu'en prenant, suivant l'usage ordinaire, l'intérêt proportionnel au temps pour lequel le capital a été placé, qu'on nomme *intérêt simple*. Supposons, par exemple, qu'un capital a ait été prêté, à intérêt simple, pour un intervalle de temps t. L'intérêt de 1 franc pour un an étant r, l'intérêt de la somme a, pour le temps t, est art, et le prêteur, à l'expiration de ce temps, reçoit $a(1+rt)$. S'il place cette somme pendant un autre intervalle de temps t', celle qu'il reçoit à l'expiration de ce temps est égale à cette somme multipliée par $1+rt'$; de sorte qu'elle est $a(1+rt)(1+rt')$. Si la somme a eût été placée, à intérêt simple, pour le temps $t+t'$, elle n'eût produit que $a[1+r(t+t')]$, ce qui est moindre que le résultat précédent, puisque

$$(1+rt)(1+rt') = 1 + r(t+t') + r^2tt'.$$

Mais, en calculant les intérêts par la formule (1) (n° 310), le capital a, placé pendant le temps t, produit $a(1+r)^t$; cette somme $a(1+r)^t$, placée pendant le temps t', produit $a(1+r)^t \times (1+r)^{t'}$ ou $a(1+r)^{t+t'}$. La somme a, placée pendant le temps $t+t'$, et remboursée seulement à la fin de ce temps, produit également $a(1+r)^{t+t'}$.

Si, dans la formule (1), on prend pour inconnue a qui est

la valeur actuelle de la somme A payable après le temps n, ou la valeur de la somme A à une époque antérieure de n, on obtient $a = \frac{A}{(1+r)^n}$ ou $a = A(1+r)^{-n}$, ce qui est encore la formule (1), dans laquelle l'exposant n a été remplacé par $-n$.

Considérons actuellement la formule (2), et supposons qu'en prenant n pour inconnue on obtienne une valeur fractionnaire. Représentons cette valeur par $m+k$, m étant un nombre entier, et k un nombre plus petit que 1. On aura, dans ce cas,

$$a\frac{(1+r)^{m+k}-1}{r} = A(1+r)^{m+k}.$$

Soit $1+r=z$, d'où $r=1-z$; en effectuant la division de $z^{m+k}-1$ par $z-1$, on trouve que le quotient est

$$z^{m+k-1} + z^{m+k-2} + z^{m+k-3} + \ldots + z^k + \frac{z^k-1}{z-1}.$$

En remplaçant $\frac{(1+r)^{m+k}-1}{r}$ par ce quotient, et remettant $1+r$ au lieu de z, on obtient l'égalité

$$A(1+r)^{m+k} = a\left[(1+r)^{m+k-1} + (1+r)^{m+k-2} \ldots + (1+r)^k + \frac{(1+r)^k-1}{r}\right].$$

Le premier membre de cette égalité exprime la valeur du capital A, après le temps $m+k$. Les termes

$$a(1+r)^{m+k-1}, \quad a(1+r)^{m+k-2} \ldots, \quad a(1+r)^k$$

expriment les valeurs acquises après le même temps par m sommes égales à a remboursées au prêteur, la première à la fin de la première année depuis le moment de l'emprunt; la deuxième à la fin de la deuxième année; ainsi de suite; et la $m^{ième}$ à la fin de la $m^{ième}$ année. Donc, après ces m rem-

boursements égaux, d'année en année, le débiteur, pour s'acquitter, devra payer, à la fin du temps k compté du commencement de la $m+1^{ième}$ année, une somme égale à $a\frac{(1+r)^k-1}{r}$. Cette somme est moindre que a, puisque, k étant un nombre plus petit que l'unité, $(1+r)^k < 1+r$.

Si le dernier remboursement ne doit être effectué qu'à la fin de la $m+1^{ième}$ année, la somme $a\frac{(1+r)^k-1}{r}$ devra porter intérêt pendant le temps $1-k$; par conséquent, elle deviendra

$$\frac{a(1+r)^k-1}{r}(1+r)^{1-k} \quad \text{ou} \quad a\frac{(1+r)-(1+r)^{1-k}}{r}.$$

Cette dernière somme est encore moindre que a, car, $1-k$ étant positif, on a $(1+r)^{1-k} > 1$.

CHAPITRE ONZIÈME.

COMBINAISONS, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS. BINOME DE NEWTON. PUISSANCES ET RACINES DES POLYNOMES. NOMBRES FIGURÉS ET SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Des combinaisons, des arrangements et des permutations.

315. On nomme *combinaisons* ou *produits différents* de m lettres n à n, les résultats qu'on peut obtenir en réunissant n des m lettres, avec la condition que deux de ces résultats diffèrent l'un de l'autre, au moins par une lettre. Ainsi, les combinaisons ou les produits 2 à 2 des quatre lettres a, b, c, d, sont ab, ac, ad, bc, bd, cd. Les combinaisons ou les produits 3 à 3 de ces quatre lettres sont abc, abd, acd, bcd.

Les *permutations* de n lettres sont les résultats que l'on obtient en écrivant ces n lettres les unes à la suite des autres, de toutes les manières possibles. Par exemple, les permutations des deux lettres a et b sont ab, ba; les permutations des trois lettres a, b, c sont abc, acb, cab, bac, bca, cba.

Les *arrangements* de m lettres n à n sont les résultats que l'on peut obtenir en réunissant n des m lettres, et les disposant entre elles de toutes les manières possibles. Ainsi, les arrangements 2 à 2 des trois lettres a, b, c, sont ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Nous allons chercher le nombre des arrangements de m lettres n à n, celui des permutations de n lettres, et celui des produits de m lettres n à n.

316. Si l'on avait à former les *arrangements* de m lettres

2 à 2, il suffirait évidemment d'écrire successivement, à la suite de chaque lettre, chacune des $m-1$ autres lettres. On obtiendrait ainsi $m(m-1)$ arrangements.

Pour former les arrangements de m lettres 3 à 3, il faudrait écrire successivement, à la suite de chacun des arrangements 2 à 2, chacune des $m-2$ autres lettres; et le nombre d'arrangements qu'on formerait ainsi serait $m(m-1)(m-2)$.

On voit de la même manière que le nombre des arrangements de m lettres 4 à 4 est $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

On doit conclure de là, par analogie, que le nombre des arrangements de m lettres n à n est

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

On peut aussi parvenir à cette formule sans induction, en présentant le raisonnement comme il suit :

Si l'on avait formé tous les arrangements de m lettres $n-1$ à $n-1$, on obtiendrait les arrangements de ces lettres n à n en écrivant successivement, à la suite de chaque arrangement de $n-1$ lettres, les $m-(n-1)$ autres lettres. Par conséquent, *le nombre des arrangements de* m *lettres* n *à* n *est égal à celui des arrangements de* m *lettres* n — 1 *à* $n-1$, *multiplié par* $m-(n-1)$ *ou* $m-n+1$. Mais le nombre des arrangements de m lettres 1 à 1 est évidemment m; le nombre des arrangements de m lettres 2 à 2 est donc $m(m-1)$; celui des arrangements 3 à 3 est $m(m-1)(m-2)$; ainsi de suite; et le nombre des arrangements n à n est $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$.

317. Pour obtenir le nombre des *permutations* de n lettres, il suffit de faire dans la formule précédente $m=n$, ce qui donne $n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1$, ou, en renversant l'ordre des facteurs,

$$1.2.3\ldots(n-1)n.$$

On peut aussi parvenir à cette dernière formule sans la faire dépendre de celle qui exprime le nombre des arrangements. En effet, deux lettres a, b ne donnent que deux permutations ab, ba. Pour former les permutations de trois lettres, il suffit d'écrire successivement, à la suite de chacune de ces trois lettres, les deux permutations des deux autres; on obtiendra donc 2×3 permutations. Pour former les permutations de quatre lettres, il suffit d'écrire successivement à la suite de chacune de ces lettres les 2×3 permutations des trois autres lettres; on obtiendra ainsi $2 \times 3 \times 4$ permutations. Ce raisonnement pouvant être continué indéfiniment, il en résulte que le nombre des permutations de n lettres est, comme on l'a trouvé ci-dessus, $1.2.3\ldots n$.

318. Soit C le nombre des *combinaisons* ou des *produits différents* de m lettres n à n. Représentons par A le nombre des arrangements de m lettres n à n, et par P le nombre des permutations de n lettres. Il est clair que, si l'on avait formé les combinaisons ou les produits différents de m lettres n à n, on obtiendrait les arrangements de ces m lettres n à n en faisant, dans chacun des produits différents, toutes les permutations des n lettres. Il suit de là que le nombre des arrangements est égal au produit du nombre des combinaisons par celui des permutations, de sorte qu'on a $C \times P = A$, d'où $C = \frac{A}{P}$; et en remplaçant A et P par les valeurs qu'on a obtenues précédemment,

$$C = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

319. On peut aussi parvenir à la dernière formule sans la faire dépendre de celles qui donnent le nombre des arrangements et le nombre des permutations. A cet effet, désignons, avec M. *Cauchy*, par $(m)_n$ le nombre des combi-

naisons de m lettres a, b, c, d, etc., prises n à n. Parmi ces combinaisons, celles qui renferment la lettre a sont évidemment en nombre égal au nombre des combinaisons des $m-1$ autres lettres prises $n-1$ à $n-1$, ou $(m-1)_{n-1}$. Le nombre des combinaisons qui renferment la lettre b est pareillement $(m-1)_{n-1}$; et de même pour chacune des autres lettres. Mais en formant toutes les combinaisons qui renferment la lettre a, puis celles qui renferment la lettre b, etc., on obtient n fois chaque combinaison; car, si $n=3$ par exemple, la combinaison abc se trouve parmi celles qui renferment a, parmi celles qui renferment b, et parmi celles qui renferment c. On conclut de là l'égalité

$$(m)_n = \frac{m}{n}(m-1)_{n-1}.$$

En remplaçant successivement dans cette égalité m et n par $m-1$ et $n-1$, puis par $m-2$ et $n-2$, etc., on trouve

$$(m-1)_{n-1} = \frac{m-1}{n-1}(m-2)_{n-2},$$

$$(m-2)_{n-2} = \frac{m-2}{n-2}(m-3)_{n-3},$$

. . . . . .

$$(m-n+2)_2 = \frac{m-n+2}{2}(m-n+1)_1.$$

La valeur de $(m)_n$ se déduit de ces diverses relations, en les multipliant membre à membre, et remarquant que $(m-n+1)_1$ n'est autre que $m-n+1$.

320. Le nombre des combinaisons de m lettres n à n ne pouvant être qu'un nombre entier, il résulte de la formule du n° 318 que le produit de m nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers. Cette proposition est d'ailleurs une conséquence de celle qui a été démontrée dans le n° 220; car, si l'on

multiplie les deux termes de l'expression qui représente le nombre des combinaisons de m lettres n à n par $1.2.3\ldots(m-n)$, cette expression devient

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots(m-n)}.$$

Celle-ci est comprise dans celle que l'on a considérée dans le n° 220.

321. *Le nombre des combinaisons de* m *lettres* m — n *à* m — n *est égal au nombre des combinaisons de* m *lettres* n *à* n. Car, si l'on divisait successivement le produit des m lettres par chacun de leurs produits n à n, on obtiendrait évidemment tous les produits $m-n$ à $m-n$ de ces lettres. On peut aussi démontrer cette proposition par l'expression générale du nombre des combinaisons de m lettres n à n; car, en la mettant sous la même forme que dans le numéro précédent, on voit qu'elle ne change pas quand on y remplace n par $m-n$.

322. Si l'on veut former toutes les combinaisons n à n des m lettres a, b, c, etc., on pourra opérer comme il suit :

Les combinaisons 1 à 1 sont les lettres elles-mêmes. On obtiendra toutes les combinaisons 2 à 2 en écrivant successivement, à la droite de chaque lettre, chacune des lettres suivantes. Au moyen des combinaisons 2 à 2, on formera les combinaisons 3 à 3, en mettant successivement, à la droite de chacune des combinaisons 2 à 2, chacune des lettres qui suivront la dernière lettre de cette combinaison. On passera de la même manière des combinaisons 3 à 3 aux combinaisons 4 à 4; ainsi de suite. Il est clair que l'on trouvera de cette manière toutes les combinaisons demandées; car, si l'on considère une de ces combinaisons, $bef\ldots k$, les lettres étant disposées suivant l'ordre alphabétique, on

aura formé la combinaison *be*, au moyen de celle-ci, on aura obtenu la combinaison *bef*, ainsi de suite. De plus, aucune combinaison ne se trouvera répétée; puisque, les lettres se succédant toujours dans l'ordre alphabétique, chaque combinaison contenant p lettres n'aura pu résulter que d'une seule des combinaisons $p-1$ à $p-1$.

323. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que chaque combinaison ne devait pas contenir deux fois la même lettre. Supposons actuellement que chaque lettre puisse être combinée avec elle-même et avec toutes les autres, et désignons par $(M)_n$ le nombre des combinaisons n à n que l'on pourra former ainsi avec m lettres. Puisque chaque combinaison contient n lettres, le nombre total des lettres, dans l'ensemble des combinaisons, est $n \times (M)_n$; et puisque le nombre des lettres différentes est m, chaque lettre est répétée un nombre de fois égal à $\frac{n}{m} \times (M)_n$. Mais si, dans chacune des combinaisons qui contiennent la lettre a, on supprimait une fois cette lettre, on devrait obtenir toutes les combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$. Dans ces combinaisons $n-1$ à $n-1$, la lettre a est répétée, d'après la formule précédente, un nombre de fois égal à $\frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1}$; et puisqu'on a supprimé une fois la lettre a dans chaque combinaison, cette lettre était d'abord écrite un nombre de fois égal à $\frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1} + (M)_{n-1}$. On a donc l'équation

$$\frac{n}{m} \times (M)_n = \frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1} + (M)_{n-1},$$

ou bien

$$(M)_n = \frac{m+n-1}{n} (M)_{n-1}.$$

En remplaçant successivement n par $n-1$, puis par

$n-2$, etc., on obtient

$$(M)_{n-1} = \frac{m+n-2}{n-1}(M)_{n-2},$$

$$(M)_{n-2} = \frac{m+n-3}{n-2}(M)_{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(M)_2 = \frac{m+1}{2}(M)_1.$$

On conclut de ces équations, en multipliant membre à membre, et en observant que $(M)_1 = m$,

$$(M)_n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Il résulte de cette formule que le nombre des combinaisons de m lettres n à n, quand chaque lettre peut entrer plusieurs fois dans la même combinaison, est égal au nombre des combinaisons, sans répétition, de $m+n-1$ lettres n à n (*).

324. Si l'on avait à former les combinaisons de m lettres n à n en admettant la répétition des lettres, on suivrait une marche semblable à celle qui a été indiquée dans le n° 322. Mais alors, pour obtenir les combinaisons 2 à 2, il faudrait mettre successivement, à la suite de chaque lettre, cette lettre elle-même et chacune des lettres suivantes; pour obtenir les combinaisons 3 à 3, on écrirait successivement, à la suite de chacune des combinaisons 2 à 2, la dernière lettre de cette combinaison et chacune des lettres suivantes; ainsi de suite.

325. Si l'on permutait les lettres de toutes les manières

(*) On aurait pu remplacer l'explication du n° 319 par une autre semblable à celle du n° 323. Mais, malgré l'avantage de plus d'uniformité, on a préféré conserver, à l'égard des combinaisons sans répétition, l'explication la plus simple et la plus directe.

possibles, dans chacune des combinaisons dont nous venons de nous occuper en dernier lieu, on n'aurait pas le même nombre de permutations pour une combinaison formée de n lettres différentes et pour une combinaison dans laquelle une ou plusieurs lettres se trouveraient répétées, en sorte que le nombre total des permutations et le nombre des combinaisons ne peuvent plus se déduire l'un de l'autre; mais il est facile d'obtenir directement le nombre des permutations de toutes les combinaisons, ou le nombre des arrangements n à n de m lettres dans lesquels chaque lettre peut être répétée

Le nombre des arrangements 1 à 1 est évidemment le nombre même des lettres. Si l'on voulait former les arrangements des m lettres 2 à 2, il suffirait d'écrire successivement, à la suite de chaque lettre, cette lettre et chacune des autres; car, en faisant suivre la lettre a de cette lettre elle-même et de chacune des autres, on a tous les arrangements dans lesquels la lettre a occupe le premier rang. De même, en écrivant, après la lettre b, cette lettre et chacune des autres, on a tous les arrangements dans lesquels la lettre b occupe le premier rang; on obtiendra ainsi m^2 arrangements 2 à 2. Si l'on veut former les arrangements des m lettres 3 à 3, il faudra écrire successivement, à la suite de chacun des arrangements 2 à 2, chacune des m lettres; par là, on aura m^3 arrangements. On verra de même que le nombre des arrangements 4 à 4 sera m^4; etc. Le nombre des arrangements n à n sera donc m^n.

Développement des puissances entières et positives d'un binôme, ou binôme de Newton.

326. On a nommé *formule du binôme* de Newton, ou simplement *binôme de Newton*, une formule découverte par Newton, au moyen de laquelle on obtient une puis-

sance quelconque d'un binôme $x + a$, sans passer par les puissances précédentes.

En formant par la multiplication les puissances successives de $x + a$, on trouve

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La loi des exposants de x et de a, dans ces résultats, est évidente. A l'égard des coefficients, on voit que ceux du premier terme et du dernier terme sont l'unité, que celui du second terme est l'exposant de la puissance, et que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux; mais, à partir de la quatrième puissance, on n'aperçoit pas la loi d'après laquelle se forment les coefficients des termes qui suivent les deux premiers.

Pour rendre la composition des produits plus manifeste, en évitant les réductions qui donnent naissance aux coefficients, il suffit de multiplier entre eux des binômes dont les seconds termes soient différents, comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{rr|l|l|l}
(x+a)(x+b) = x^2 & +a & x+ab & & \\
 & +b & & & \\
(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 & +a & x^2+ab & x+abc & \\
 & +b & +ac & & \\
 & +c & +bc & & \\
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 & +a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd \\
 & +b & +ac & +abd & \\
 & +c & +bc & +acd & \\
 & +d & +ad & +bcd & \\
 & & +bd & & \\
 & & +cd & &
\end{array}$$

Dans chacun de ces produits, l'exposant de x va en dimi-

nuant d'une unité depuis le premier terme, où il est égal au nombre des facteurs binômes, jusqu'au dernier terme, où il est nul. Le coefficient du premier terme est l'unité; le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binômes; celui du troisième terme est la somme des produits de ces mêmes seconds termes pris deux à deux; ainsi de suite. Le dernier terme est le produit des seconds termes des binômes.

On démontre que cette loi est générale, en faisant voir que, si elle est vraie pour le produit de m binômes, elle sera vraie aussi pour le produit de $m+1$ binômes.

Supposons donc qu'on ait formé le produit de m binômes $x+a$, $x+b, \ldots,$ $x+k$. Désignons par P_1 la somme des seconds termes des binômes, par P_2 la somme des produits différents de ces seconds termes pris deux à deux, par P_3 la somme de leurs produits trois à trois, ainsi de suite, enfin par P_m le produit de tous ces seconds termes, et admettons que le produit des binômes proposés soit

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + P_3 x^{m-3} + \ldots + P_m.$$

En multipliant ce polynôme par un nouveau binôme $x+l$, on obtient le produit ci-dessous:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^{m+1} + P_1 & x^m + P_2 & x^{m-1} + P_3 & x^{m-2} \ldots + P_m & x \\
\quad + l & \quad + l P_1 & \quad + l P_2 & \quad + l P_{m-1} & \quad + l P_m.
\end{array}$$

La loi des exposants de x n'a pas changé. Quant aux coefficients, celui du premier terme est toujours égal à l'unité, et celui du second terme est évidemment formé de la somme des seconds termes des $m+1$ binômes. Le coefficient du troisième terme se compose de la somme des produits deux à deux des seconds termes des m facteurs binômes du premier produit, augmentée de la somme de ces mêmes seconds termes multipliée par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds

termes des $m+1$ binômes pris deux à deux. Le coefficient du quatrième terme se compose de la somme des produits trois à trois des seconds termes des m facteurs du premier produit, augmentée de la somme des produits deux à deux de ces seconds termes multipliés par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds termes des $m+1$ binômes pris trois à trois; ainsi de suite. Enfin, le dernier terme est égal au produit des seconds termes des m premiers facteurs binômes multiplié par l; il est donc le produit des seconds termes des $m+1$ binômes.

De ce que la loi, supposée vraie pour m facteurs, est vraie aussi pour $m+1$ facteurs, on conclut, puisqu'elle est vérifiée pour deux facteurs, qu'elle est vraie pour trois; étant vraie pour trois facteurs, elle est vraie pour quatre; ainsi de suite; donc elle est générale (*).

327. Supposons actuellement que les seconds termes des m binômes $x+a$, $x+b$,..., $x+k$, soient tous égaux à a. Le produit de ces binômes deviendra la $m^{ième}$ puissance de $x+a$. Le coefficient P_1 du second terme de ce produit développé sera égal à a multiplié par le nombre m des facteurs, c'est-à-dire à ma. Le coefficient P_2 du troisième terme sera égal à a^2 répété autant de fois qu'on peut former de produits différents avec m lettres prises deux à deux,

(*) On peut reconnaître la loi des coefficients des puissances de x, dans le produit $(x+a)(x+b)\ldots(x+k)$, d'un nombre quelconque de binômes, sans procéder par induction. En effet, ce produit est la somme de tous ceux que l'on peut former en prenant un terme dans chacun des binômes et multipliant entre eux tous ces termes. Le produit des premiers termes des binômes est x^m; celui de leurs derniers termes est $ab\ldots k$; et pour obtenir un terme dans lequel x ait l'exposant $m-n$, il faudra prendre les premiers termes de $m-n$ binômes avec les seconds termes des n autres binômes. Le coefficient de x^{m-n} dans le produit total sera donc la somme de tous les produits différents n à n des seconds termes des binômes.

c'est-à-dire à $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. Le coefficient P_3 du quatrième terme sera égal à a^3 répété autant de fois qu'on peut former de produits différents avec m lettres prises trois à trois, c'est-à-dire à $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$; ainsi de suite. Enfin le dernier terme sera a^m. Donc

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}\ldots + a^m.$$

328. Si l'on désigne par T_{n+1} le terme qui occupe le rang $n+1$ dans le second membre de la formule qu'on vient d'écrire, c'est-à-dire le terme qui en a n avant lui, on aura

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\,n}a^n x^{m-n}.$$

Cette expression de T_{n+1} est appelée le *terme général* du développement de $(x+a)^m$, parce qu'on peut en déduire tous les termes de ce développement à partir du second, en faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc.

Supposons, par exemple, qu'on demande le 5e terme de la 12e puissance de $x+a$, on aura $m=12$, $n=4$, d'où $m-n+1=9$, et la formule précédente donnera pour le terme cherché $\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}a^4x^8$, ou $495\,a^4x^8$.

329. On voit, à l'inspection du développement de $(x+a)^m$, qu'*on obtient le coefficient d'un terme quelconque en multipliant celui du terme précédent par l'exposant de* x *dans ce terme précédent, et divisant le produit par l'exposant de* a *dans le même terme, augmenté d'une unité, ou par le nombre des termes qui précèdent celui qu'on veut former. Quant aux exposants, celui de* x *diminue d'une unité d'un terme au suivant, et celui de* a *augmente d'une unité.*

Si l'on veut démontrer cette règle d'une manière géné-

rale, on formera le terme qui en a $n+1$ avant lui, en changeant n en $n+1$ dans l'expression de T_{n+1}; il viendra

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3.\ \ .n(n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1}.$$

Le terme T_{n+2} se déduit donc de T_{n+1} suivant la règle énoncée.

Au moyen de cette règle, on peut former successivement tous les termes du développement de $(x+a)^m$, en partant du premier terme x^m; et on est averti que le développement est terminé quand on a obtenu le terme a^m, car l'exposant de x par lequel il faudrait multiplier a^m, pour avoir le terme suivant, est zéro.

En formant ainsi la septième puissance de $x+a$, par exemple, on trouve qu'elle est

$$x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

330. *Les termes du développement de* $(x+a)^m$ *également éloignés des extrêmes ont des coefficients égaux.*

Cette propriété, que l'on reconnaît par l'inspection des puissances successives, est une conséquence de la proposition du n° 321. Le coefficient du terme qui en a n avant lui est le nombre des produits différents de m lettres n à n. Le développement contenant $m+1$ termes, le terme qui en a n après lui, en a $m-n$ avant lui, et son coefficient est le nombre des produits de m lettres $m-n$ à $m-n$. Or, ces deux nombres sont égaux (n° 321).

La démonstration suivante conduit plus directement à la même conclusion. Le binôme $x+a$ ne changeant pas quand on échange entre elles les lettres x et a, il doit en être de même du développement de $(x+a)^m$; or, si l'on désigne par K le coefficient du terme qui en a n avant lui, ce terme sera Ka^nx^{m-n}; et par le changement de x en a et de a en x, il deviendra Kx^na^{m-n}. Le terme Kx^na^{m-n} devra

donc se trouver aussi dans le développement. Mais ce terme en aura n après lui. Le coefficient du terme qui en a n après lui est donc le même que celui du terme qui en a n avant lui.

331. Pour obtenir le développement de $(x-a)^m$, il suffit de changer a en $-a$, dans le développement de $(x+a)^m$; par ce changement, les termes de rang pair, qui contiennent des puissances impaires de a, prennent le signe $-$, et les termes de rang impair ne changent pas de signe; on a donc

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots.$$

332. En supposant $x=1$ et $a=1$, dans la formule qui donne le développement de $(x+a)^m$, on voit que *la somme des coefficients, en y comprenant les coefficients des deux termes extrêmes, est égale à* 2^m.

En faisant les mêmes suppositions dans la formule qui donne le développement de $(x-a)^m$, on reconnaît que *la somme des coefficients des termes de rangs impairs est égale à la somme des coefficients des termes de rangs pairs.*

333. Pour développer une puissance d'un binôme quelconque, on peut développer d'abord la puissance de même degré de $x+a$ ou de $x-a$; on remplace ensuite les lettres x et a par les termes du binôme proposé. Ainsi, pour obtenir le développement de $(2x^3-3a^2y)^5$, on fera d'abord celui de $(x-a)^5$, qui est

$$x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5;$$

on remplacera ensuite x par $2x^3$, et a par $3a^2y$, ce qui donnera

$$(2x^3-3a^2y)^5 = 32x^{15} - 240a^2yx^{12} + 720a^4y^2x^9 - 1080a^6y^3x^6 + 810a^8y^4x^3 - 243a^{10}y^5.$$

On peut disposer le calcul comme on le voit ci-dessous :

	$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$
1	5	10	10	5	1
$32x^{15}$	$16x^{12}$	$8x^{9}$	$4x^{6}$	$2x^{3}$	1
1	$3a^2y$	$9a^4y^2$	$27a^6y^3$	$81a^8y^4$	$243a^{10}y^5$

$$32x^{15} - 240a^2yx^{12} + 720a^4y^2x^9 - 1080a^6y^3x^6 + 810a^8y^4x^3 - 243a^{10}y^5.$$

La première ligne se forme en écrivant une suite de fractions dont les numérateurs sont les nombres naturels décroissants, depuis l'exposant 5 de la puissance que l'on veut former, jusqu'à l'unité, et dont les dénominateurs sont les nombres naturels croissants à partir de 1.

La deuxième ligne comprend les coefficients numériques du développement de $(x + a)^5$. Pour former ces coefficients, on écrit d'abord le premier d'entre eux qui est 1 ; on multiplie ensuite 1 par la première fraction $\frac{5}{1}$ de la première ligne; puis on multiplie 5 par la seconde fraction $\frac{4}{2}$ de la première ligne; ainsi de suite.

La troisième ligne se forme en écrivant, de droite à gauche, les diverses puissances de $2x^3$, depuis la puissance dont l'exposant est zéro et qui est égale à 1, jusqu'à la cinquième puissance.

La quatrième ligne se forme en écrivant, de gauche à droite, les puissances de $3a^2y$, depuis la puissance dont l'exposant est zéro, jusqu'à la cinquième.

Enfin, on obtient la cinquième ligne, qui est le développement de $(2x^3 - 3a^2y)^5$, en multipliant entre eux les termes placés les uns au-dessous des autres dans les trois lignes précédentes. On donne alternativement aux produits les signes + et —, parce que le second terme du binôme proposé a le signe —.

334. En appliquant la formule du binôme au développement de la puissance $m^{ième}$ de chacune des expressions ima-

ginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et en ayant égard à ce qui a été dit sur les puissances de $\sqrt{-1}$ (n° 206), on trouve les deux formules ci-après :

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m = \left\{\begin{array}{l} \alpha^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4 + \ldots \\ \quad + \left[m\alpha^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^2 + \ldots\right]\beta\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

$$(\alpha - \beta\sqrt{-1})^m = \left\{\begin{array}{l} \alpha^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4 - \ldots \\ \quad - \left[m\alpha^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^2 + \ldots\right]\beta\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

Puissances des polynômes.

335. Soit le polynôme $a+b+c+d+$ etc., qu'on doit élever à la $m^{ième}$ puissance, si l'on fait $b+c+d+\ldots=x$, on aura à développer $(a+x)^m$. Si l'on fait ensuite $c+d+\ldots=y$, les puissances de x seront celles du binôme $b+y$; ainsi de suite. On parviendrait ainsi au développement de $(a+b+c+d+\ldots)^m$; et on pourrait trouver, par ce moyen, l'expression d'un terme quelconque, ou le terme général du développement. Mais on parvient aussi à reconnaître la composition des puissances d'un polynôme par une autre considération fort simple, et sans passer par les puissances d'un binôme.

Si l'on formait, par la multiplication, le produit de m polynômes égaux à $a+b+c+d+$ etc., sans faire aucune réduction de termes semblables, les termes du produit seraient tous les produits formés avec un terme quelconque du premier facteur, un terme quelconque du second facteur; ainsi de suite jusqu'au $m^{ième}$ facteur; c'est-à-dire, tous les arrangements m à m des lettres a, b, c, d, etc., avec répétition des lettres (n° 325). Après la réduction des termes semblables, les termes du produit, abstraction faite des coefficients, seront les combinaisons m à m des lettres a, b,

c, d, etc., prises chacune une ou plusieurs fois; et le coefficient de chaque combinaison sera le nombre des permutations qui pourront être effectuées entre toutes les lettres qui s'y trouveront contenues. Il ne s'agit donc que de trouver l'expression de ce nombre de permutations.

Considérons à cet effet un produit quelconque $a^n b^p c^q \ldots$ de m facteurs. Si les facteurs étaient tous différents, le nombre des permutations serait $P = 1.2.3\ldots m$. Quand n facteurs deviennent égaux, les permutations qui ne différaient entre elles que par la disposition de ces facteurs sont rendues identiques. Or, le nombre des permutations différentes seulement les unes des autres par la disposition de n facteurs, est celui des permutations de ces n facteurs; donc il est $1.2.3\ldots n$. Donc, en nommant P' le nombre des permutations dans le cas de l'égalité de n facteurs, tous les autres étant différents, $P' = \frac{P}{1.2\ldots n}$. Si d'autres facteurs, en nombre p, deviennent égaux entre eux, sans être égaux aux premiers, le nombre des permutations se réduira de la même manière, de sorte qu'il deviendra $\frac{P'}{1.2\ldots p}$, ou $\frac{P}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p}$; ainsi de suite. Le nombre des permutations qui pourront être effectuées dans le produit proposé $a^n b^p c^q \ldots$ est donc

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p \times 1.2\ldots q\ldots} \text{ (*)}.$$

(*) Si l'on prend pour exemple le produit $a^3 b^2$, ou $aaabb$, le nombre des permutations différentes de ce produit sera $\frac{2.3.4.5}{2.3 \times 2}$ ou 10 On peut le vérifier, en formant ces permutations. A cet effet, on écrira d'abord la lettre b à toutes les places, dans le produit aaa; on mettra ensuite, dans tous les résultats, la seconde lettre b à la gauche de la première, et on la fera successivement avancer jusqu'à la première place.

Il suit de là que le terme général de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ est

$$(1)\qquad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\ldots}\,a^n b^p c^q\ldots,$$

avec la condition

$$(2)\qquad n+p+q+\ldots=m.$$

Pour obtenir tous les termes de $(a+b+c+d+\ldots)^m$, on devra donner aux exposants n, p, q, etc., dans la formule (1), toutes les valeurs entières positives, y compris zéro, qui vérifieront l'équation (2); et si $n=0$, par exemple, il faudra ne pas tenir compte de la suite $1.2.3\ldots n$; car les nombres par lesquels on doit diviser $1.2.3\ldots m$ sont seulement les nombres de permutations correspondants aux différents groupes de facteurs égaux contenus dans le produit $a^n b^p c^q\ldots$. On pourra aussi former toutes les combinaisons différentes m à m des lettres a, b, c, etc., prises chacune une ou plusieurs fois, comme cela a été expliqué dans le n° 324, et donner ensuite à chacune de ces combinaisons le coefficient déterminé par la formule (1).

Si N est le nombre des termes différents du polynôme $a+b+c+d+$ etc., le nombre des termes de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ sera donné par la formule du n° 323, dans laquelle il faudra remplacer m par N et n par m. La somme de tous les coefficients sera N^m.

336. Si l'on avait à former une puissance d'un polynôme ordonné suivant les puissances de x

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$

le terme général deviendrait

$$\frac{1.2.3\ldots m\times a^n b^p c^q\ldots}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\times\ldots}\,x^{p+2q+3r+\ldots}.$$

Pour obtenir tous les termes dans lesquels x aurait un

même exposant k, il faudrait déterminer les exposants n, p, q, r, etc., au moyen des deux équations

$$n+p+q+r+\ldots=m, \quad p+2q+3r+\ldots=k.$$

Mais, si l'on voulait avoir tous les termes de la puissance, ou même seulement tous ceux dans lesquels l'exposant de x ne surpasserait pas une limite donnée, il y aurait peu d'avantage à se servir des formules générales que nous venons d'établir; et il serait plus commode d'opérer par la multiplication.

Extraction des racines des polynômes.

337. On a vu, dans l'Arithmétique, comment la composition du carré et du cube de la somme de deux nombres conduit aux règles relatives à l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique des nombres. On déduit pareillement, de la connaissance des deux premiers termes $x^m + max^{m-1}$ du développement de $(x+a)^m$, les procédés qu'il faut suivre pour extraire les racines de degrés quelconques des nombres; et l'on parvient à des règles analogues à celles qui concernent les racines carrée et cubique; mais comme ces règles trouvent peu d'applications, nous passerons immédiatement à l'extraction des racines des polynômes.

338. Supposons qu'on ait à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme P.

Le polynôme P étant le produit de m facteurs égaux à la racine cherchée, si l'on conçoit que ce polynôme et la racine soient ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une lettre x, le premier terme du polynôme P sera le produit de m facteurs égaux au premier terme de la racine; par conséquent, le premier terme de la racine sera la racine $m^{\text{ième}}$ du premier terme de P.

Afin de ne pas avoir à faire plusieurs explications sem-

blables, supposons que l'on ait obtenu un nombre quelconque de termes de la racine, et cherchons comment on pourra obtenir le terme suivant.

Soient A la somme des termes connus de la racine, et B la somme des autres termes; on aura $P = (A + B)^m$, d'où, en nommant R le reste $P - A^m$,

$$R = mA^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B^2 + \ldots.$$

Désignons par α le premier terme de la racine, et par λ le terme de B qui contient le plus fort exposant de x, et qui est celui que l'on veut trouver. Le terme qui contient le plus haut exposant de x, dans le produit $mA^{m-1}B$, sera $m\alpha^{m-1}\lambda$. Les termes de plus fort exposant, dans les produits $A^{m-2}B^2$, $A^{m-3}B^3$, etc., seront $\alpha^{m-2}\lambda^2$, $\alpha^{m-3}\lambda^3$, etc. Or, l'exposant de x dans $\alpha^{m-1}\lambda$ surpasse celui de cette lettre dans $\alpha^{m-2}\lambda^2$, puisque l'un des facteurs α du premier produit est remplacé dans le second par λ qui contient x à une moindre puissance que α. Par une raison semblable, l'exposant de x dans $\alpha^{m-3}\lambda^3$ est moindre que dans $\alpha^{m-2}\lambda^2$; ainsi de suite.

Il suit de là que le terme de R qui contient le plus fort exposant de x est égal à $m\alpha^{m-1}\lambda$. Par conséquent, pour obtenir le terme λ, il faut diviser le premier terme de R par $m\alpha^{m-1}$.

D'après ces explications, qui ne changeraient pas si le polynôme P et sa racine étaient ordonnés suivant les puissances croissantes de x, on est conduit à la règle suivante:

Pour extraire la racine m^ième^ *d'un polynôme* P, *ordonnez-le suivant les puissances décroissantes ou croissantes d'une lettre. Prenez la racine* m^ième^ *du premier terme, vous aurez le premier terme de la racine. Divisez le* 2e *terme de* P *par* m *fois la* (m — 1)^ième^ *puissance du premier terme de la racine, vous aurez le* 2e *terme de cette*

racine. Retranchez de P *la* m^{ième} *puissance de la somme des deux termes trouvés, et divisez le premier terme du reste par* m *fois la* (m — 1)^{ième} *puissance du premier terme de la racine, vous aurez le* 3e *terme. Ainsi de suite.*

Lorsque le polynôme proposé est une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, ces opérations conduisent à un reste nul. Réciproquement, quand on parvient à un reste nul, le polynôme proposé est une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte; et la quantité qu'on a trouvée est la racine $m^{\text{ième}}$ de ce polynôme.

339. Quand le polynôme proposé n'est pas une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, on doit continuer l'opération jusqu'à ce qu'il en résulte un caractère qui fasse reconnaître qu'elle ne se terminera pas. Or, si l'on a ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre, les degrés des restes successifs iront constamment en diminuant. En effet, en considérant seulement l'opération pour les polynômes qui ne contiennent que des puissances entières de la lettre principale, supposons le polynôme P du degré mp. L'extraction de la racine $m^{\text{ième}}$ du premier terme donnera un terme α du degré p. Le reste $P - \alpha^m$ sera au plus du degré $mp - 1$; et la division du premier terme de ce reste par $m\alpha^{m-1}$ donnera un terme dont le degré sera au plus $mp - 1 - (m - 1)p$, ou $p - 1$. Désignons, comme ci-dessus, par A la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs résultant de l'opération, par R le reste $P - A^m$, et par λ le terme qui proviendra de la division du premier terme de R par $m\alpha^{m-1}$. La quantité qu'on devra soustraire de R sera $(A + \lambda)^m - A^m$, ou $mA^{m-1}\lambda +$ etc. Cette quantité contiendra le terme $m\alpha^{m-1}\lambda$, qui sera égal au premier terme de R; et ses autres termes, d'après les explications précédentes, auront des degrés moindres. Donc, après la soustraction, le degré du reste sera inférieur à celui de R. Il suit de là que, si l'on ne peut obtenir un reste nul, on

parviendra à un reste après lequel on aura un terme dont l'exposant, multiplié par m, donnera un produit moindre que l'exposant du dernier terme du polynôme; on sera alors assuré que le polynôme n'est pas une puissance $m^{ième}$ exacte, et que l'opération ne peut pas être terminée; car lorsqu'elle se termine, le dernier terme du polynôme est la puissance $m^{ième}$ du dernier terme de la racine; par conséquent l'exposant d'aucun terme de la racine n'est inférieur à celui de la racine $m^{ième}$ du dernier terme du polynôme.

Quand le polynôme P est ordonné suivant les puissances croissantes de la lettre principale, on est averti que l'opération ne se terminera pas, lorsqu'on est conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de cette lettre, multiplié par m, donne un produit plus grand que l'exposant de la même lettre dans le dernier terme du polynôme.

Dans le cas où le polynôme proposé ne contient aucun dénominateur littéral ou numérique, s'il est une puissance $m^{ième}$, sa racine ne peut pas être fractionnaire; par conséquent on est assuré que l'opération ne se terminera pas lorsqu'on parvient à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par m fois la $(m-1)^{ième}$ puissance du premier terme de la racine.

340. Quand le premier terme du polynôme proposé n'est pas une puissance exacte du degré m, la racine $m^{ième}$ de ce polynôme n'est pas une quantité rationnelle; mais on peut encore appliquer la règle ci-dessus en exprimant la racine $m^{ième}$ du premier terme, au moyen du signe $\sqrt{}$, ou avec des exposants fractionnaires. On peut aussi multiplier le polynôme par un facteur a tel, que le premier terme devienne une puissance $m^{ième}$; si le polynôme qui en résulte a une racine $m^{ième}$ exacte Q, la racine $m^{ième}$ du polynôme donné est $\frac{Q}{\sqrt[m]{a}}$.

Lorsque le premier terme du polynôme est une puissance $m^{ième}$ exacte, les termes qu'on obtient à la racine sont tous rationnels; par conséquent, pour que l'opération puisse se terminer, il faut que le dernier terme du polynôme soit une puissance $m^{ième}$ exacte.

341. Le polynôme P étant $Ax^{mp} + Bx^{mp-1} +$ etc., l'opération fait trouver des termes entiers par rapport à x, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un reste R du degré $mp - p - 1$, ou d'un degré moindre. Ainsi, on peut décomposer un polynôme du degré mp en deux parties, dont l'une est la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme entier par rapport à x, et l'autre est du degré $mp - p - 1$, ou de degré moindre. On ne peut obtenir qu'une seule décomposition semblable d'un polynôme donné; car les termes qui résultent de l'opération, jusqu'à ce que l'on soit parvenu au reste R, ne dépendent pas des termes du polynôme P dont le degré est moindre que $mp - p$; par conséquent, si Q est l'ensemble des termes qu'on a trouvés, et si Z est un polynôme d'un degré moindre que $mp - p$, et tel, que $P - Z$ soit une puissance $m^{ième}$, la racine $m^{ième}$ de $P - Z$ sera Q; et, par suite, on aura $Z = R$.

342. On n'a pas eu égard, pour l'extraction de la racine $m^{ième}$ des polynômes, à ce qui a été dit des diverses racines d'un même degré d'une quantité quelconque (n° 214); mais on verra dans la suite que ces racines se déduisent de l'une d'entre elles; et on les trouverait toutes par la règle ci-dessus, si l'on considérait successivement toutes les racines $m^{ièmes}$ du premier terme du polynôme.

Triangle arithmétique et nombres figurés.

343. D'après la loi des exposants de x et de a dans le développement de $(x + a)^m$, et sans connaître celle des

coefficients, on peut poser

$$(x+a)^m = x^m + \mathrm{A}ax^{m-1} + \mathrm{B}a^2x^{m-2} + \mathrm{C}a^3x^{m-3} + \ldots.$$

En multipliant par $x+a$, il vient

$$\begin{aligned}(x+a)^{m+1} = x^{m+1} &+ \mathrm{A}ax^m + \mathrm{B}a^2x^{m-1} + \mathrm{C}a^3x^{m-2} + \ldots \\ &+ \quad ax^m + \mathrm{A}a^2x^{m-1} + \mathrm{B}a^3x^{m-2} + \ldots.\end{aligned}$$

On conclut de là que *le coefficient d'un terme de la* $(\mathrm{m}+1)^{\text{ième}}$ *puissance de* $\mathrm{x}+\mathrm{a}$, *est la somme du coefficient du terme de même rang et de celui du terme précédent dans la puissance* $\mathrm{m}^{\text{ième}}$.

344. En se fondant sur cette proposition, on peut former les coefficients des puissances successives de $x+a$, comme on le voit dans le tableau suivant :

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,...
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,...
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,...
			1,	4,	10,	20,	35,	56,...
				1,	5,	15,	35,	70,...
					1,	6,	21,	56,...
						1,	7,	28,...
							1,	8,...
								1,....

La première colonne est formée d'un seul terme qui est 1. La deuxième colonne est formée du nombre 1 écrit deux fois. On forme la troisième colonne en plaçant, à côté de chaque terme de la deuxième colonne, le nombre qu'on obtient en ajoutant à ce terme celui qui est au-dessus : on trouve ainsi, pour le premier terme de la troisième colonne, $1+0$ ou 1 ; le deuxième terme est $1+1$ ou 2 ; et le troisième terme est $0+1$ ou 1. La quatrième colonne se déduit de la troisième, comme celle-ci de la deuxième. Ainsi de

suite. Les deux termes de la deuxième colonne pouvant être considérés comme les coefficients de la première puissance de $x + a$, il résulte de la règle ci-dessus que les termes de la troisième colonne sont les coefficients du développement de $(x + a)^2$; que ceux de la quatrième colonne sont les coefficients du développement de $(x + a)^3$, etc.

Ce tableau, inventé par Pascal, a reçu le nom de *triangle arithmétique;* il peut être prolongé indéfiniment.

345. Il suit de la composition du triangle arithmétique, que le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale quelconque est la somme des p premiers termes de la ligne horizontale précédente. Car, si l'on considère, par exemple, le sixième terme de la quatrième ligne, qui est 56; il a été formé en ajoutant les deux nombres 21 et 35, qui sont placés à sa gauche dans la troisième ligne et dans la quatrième; mais 35 est la somme des termes 15 et 20 de ces deux lignes; 20 est la somme des termes 10 et 10 des mêmes lignes; le terme 10 de la quatrième ligne est la somme des termes 6 et 4; enfin, 4 est la somme des termes 3 et 1; on a donc $56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$.

346. Le principe sur lequel est fondée la construction du triangle arithmétique, et la propriété que nous venons de faire remarquer, peuvent se déduire de la théorie des combinaisons. En effet, le coefficient du $(n + 1)^{ième}$ terme de la $(m + 1)^{ième}$ puissance de $x + a$ est égal au nombre des combinaisons de $m + 1$ lettres prises n à n. Or, ces combinaisons peuvent être considérées comme composées de deux parties, savoir: des combinaisons qui ne renferment pas une des lettres, a par exemple, et dont le nombre est celui des combinaisons de m lettres n à n; et des combinaisons qui renferment la lettre a, et dont le nombre est celui des combinaisons de m lettres $n - 1$ à $n - 1$. D'après cela, en

faisant usage de la même notation que dans le n° 319, on a

$$(1) \qquad (m+1)_n = (m)_n + (m)_{n-1};$$

cette égalité démontre la proposition qui a été établie dans le n° 343.

Pour démontrer, par la théorie des combinaisons, que le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale du triangle arithmétique est la somme des p premiers termes de la ligne horizontale précédente, il faut remarquer que le premier terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne horizontale du triangle arithmétique appartenant à la $(n+1)^{ième}$ colonne verticale, il s'ensuit que le $p^{ième}$ terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne horizontale est dans la $(n+p)^{ième}$ colonne verticale, de sorte qu'il est l'un des coefficients du développement de $(x+a)^{n+p-1}$; et il est le coefficient du $(n+1)^{ième}$ terme de ce développement, puisqu'il occupe dans la colonne verticale le $(n+1)^{ième}$ rang. Ce terme est donc le nombre des combinaisons de $n+p-1$ lettres prises n à n, ou $(n+p-1)_n$.

Cela posé, si, dans la formule (1), on remplace m par $n+p-2$, on obtient la suivante;

$$(n+p-1)_n = (n+p-2)_n + (n+p-2)_{n-1};$$

et en remplaçant successivement dans celle-ci p par $p-1$, par $p-2, \ldots$, par $p-(p-2)$ ou 2, on forme une suite d'égalités desquelles on conclut, en observant que $(n)_n = 1$,

$$(n+p-1)_n = (n+p-2)_{n-1} + (n+p-3)_{n-1} + \ldots + (n)_{n-1} + 1.$$

Cette égalité démontre le principe qu'il s'agissait d'établir; car le $p^{ième}$ terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne étant $(n+p-1)_n$, les p premiers termes de la $n^{ième}$ ligne sont, dans l'ordre décroissant, $(n+p-2)_{n-1}$, $(n+p-3)_{n-1}, \ldots, 1$.

347. Les nombres qui composent les différentes lignes du triangle arithmétique, à partir de la 2e ligne, ont reçu

le nom de nombres *figurés*. Les nombres de la 2e ligne, ou les nombres naturels, sont les nombres figurés du 1er ordre; les nombres de la 3e ligne sont les nombres figurés du 2e ordre; les nombres de la 4e ligne sont les nombres figurés du 3e ordre; ainsi de suite. Les nombres figurés du 2e ordre sont aussi appelés nombres *triangulaires*; et les nombres figurés du 3e ordre sont appelés nombres *pyramidaux triangulaires*. On appréciera bientôt la raison de ces dénominations (*).

D'après ce qui a été dit dans les nos 345 et 346, la somme des p premiers nombres figurés de l'ordre n est égale au $p^{ième}$ nombre figuré de l'ordre $n+1$; celui-ci est le nombre des combinaisons de $n+p$ lettres $n+1$ à $n+1$, et son expression est, d'après la formule du no 318,

$$(2) \qquad \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Pour obtenir la somme des p premiers nombres naturels, on fera $n=1$ dans la formule (2): elle deviendra $\frac{p(p+1)}{2}$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu en nous occupant des progressions par différence.

Sommation des piles de boulets.

348. Les piles de boulets sont composées d'une suite de tranches horizontales disposées de telle sorte, que les boulets de chaque tranche se trouvent placés au-dessus des vides des

(*) La dénomination de nombres figurés ne s'applique pas seulement aux nombres qui composent le triangle arithmétique de Pascal; elle a été étendue à beaucoup d'autres suites de nombres, parmi lesquelles sont comprises la suite des carrés des nombres naturels, qu'on nomme *les nombres carrés*, et la suite des nombres qui se forment par l'addition de plusieurs termes consécutifs de la suite des carrés des nombres naturels à partir de 1. Mais la théorie de ces diverses suites de nombres figurés n'est qu'un simple objet de curiosité.

boulets de la tranche immédiatement inférieure; tous les boulets se touchent et sont de même calibre.

La *pile triangulaire* a la forme d'une pyramide triangulaire dont la base est un triangle équilatéral; chaque tranche est formée d'une suite de files de boulets telles, que, à partir de l'un des sommets de la tranche, la première file, qui est le sommet lui-même, ne contient qu'un seul boulet; la deuxième file en contient 2; la troisième file en contient 3, etc. Il résulte de cette disposition des files et de la disposition des tranches horizontales les unes à l'égard des autres, que les nombres de boulets des différentes tranches, à partir du sommet, sont

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad 1+2+3+4, \ldots .$$

Ces nombres sont ceux qui composent la 3e ligne du triangle arithmétique, ou les nombres *triangulaires*. Par conséquent, si le nombre des boulets d'un des côtés de la base est représenté par p, on obtiendra le nombre des boules de la pile en faisant dans la formule (2) $n = 2$, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

La *pile quadrangulaire* a la forme d'une pyramide quadrangulaire dont la base est un carré. Cette pile est composée, à partir du sommet, d'une suite de tranches dont la première contient un seul boulet, la deuxième en contient 2^2, la troisième en contient 3^2; ainsi de suite; de sorte que, si le nombre des boulets d'un des côtés de la base est p, le nombre des boulets de la pile est

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + p^2.$$

Pour obtenir la formule qui donne la valeur de cette somme, nous remarquerons que, d'après la disposition des boulets dans les tranches carrées et triangulaires, on voit

immédiatement qu'une tranche carrée dont le côté contient n boulets se compose d'autant de boulets qu'il s'en trouve dans deux tranches triangulaires dont l'une contient n boulets sur chaque côté, et l'autre en contient $n-1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier par les expressions de ces deux nombres; le nombre des boulets d'une tranche triangulaire dont le côté contient n boulets, ou le $n^{ième}$ nombre triangulaire, est $\frac{n(n+1)}{2}$; en changeant n en $n-1$, on obtient $\frac{(n-1)n}{2}$, et la somme de ces deux quantités est n^2.

On conclut de cette observation que la somme ci-dessus, $1+2^2+3^2+\ldots+p^2$, est égale à la somme des p premiers termes de la suite des nombres triangulaires, augmentée de la somme des $p-1$ premiers termes de la même suite. Or, on vient de voir que la somme des p premiers nombres triangulaires est $\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}$; et en changeant dans cette expression p en $p-1$, on trouve celle-ci: $\frac{(p-1)p(p+1)}{1.2.3}$. On obtiendra donc le nombre des boulets de la pile quadrangulaire en ajoutant ces deux quantités, ce qui donne

$$(4) \qquad \frac{p(p+1)(2p+1)}{1.2.3}.$$

La pile qu'on nomme *rectangulaire* a pour base un rectangle et se termine par une file de boulets. Soit $p+1$ le nombre des boulets de la file supérieure. La tranche située immédiatement au-dessous sera formée de deux files contenant chacune $p+2$ boulets, de sorte que le nombre des boulets de cette tranche sera $2(p+2)$; le nombre des boulets de la tranche suivante sera $3(p+3)$; ainsi de suite. Enfin, si le nombre des boulets du petit côté de la base est n, le nombre des boulets de la base sera $n(p+n)$. Le nombre

des boulets de la pile sera donc

$$p + 1 + 2(p + 2) + 3(p + 3) + \ldots + n(p + n).$$

Cette somme se compose de deux parties, dont l'une est $p(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$, et l'autre est $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. La première partie a pour expression $\frac{p \times n \times (n+1)}{2}$; et d'après la formule (4), la seconde partie est exprimée par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \,.\, 3}$. On obtiendra donc le nombre des boulets de la pile rectangulaire en faisant la somme de ces deux quantités, ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{n(n+1)(3p + 2n + 1)}{1 \,.\, 2 \quad 3}.$$

Pour évaluer le nombre des boulets contenus dans une pile tronquée, il faut prendre la différence de deux piles complètes.

Sommation des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression par différence.

349. Soit la progression par différence

$$a.b.c.d\ldots l,$$

et désignons par r la raison de cette progression, par n le nombre des termes. On a

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r, \ldots;$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $m + 1$,

$$b^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)\,ra^m + \frac{(m+1)\,m}{1 \,.\, 2}\,r^2 a^{m-1} + \ldots + r^{m+1},$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)\,rb^m + \frac{(m+1)\,m}{1 \,.\, 2}\,r^2 b^{m+1} + \ldots + r^{m+1},$$

. . . . . .

On a pareillement

$$(l+r)^{m+1} = l^{m+1} + (m+1)\,rl^m + \frac{(m+1)\,m}{1\,.\,2}\,r^2 l^{m-1} + \ldots + r^{m+1}.$$

Posons généralement $S_p = a^p + b^p + c^p + \ldots + l^p$. En ajoutant toutes les égalités précédentes, on obtient

$$(1)\quad (l+r)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)\,rS_m + \frac{(m+1)\,m}{1\,.\,2}\,r^2 S_{m-1} + \ldots + nr^{m+1}.$$

L'équation (1) fait connaître S_m quand on connaît les sommes des puissances des degrés moindres, S_{m-1}, S_{m-2}, etc.; et on obtiendra ces différentes sommes en faisant successivement $m = 1$, $= 2$, $= 3$, etc.

Si l'on résout l'équation (1) par rapport à S_m, elle sera

$$(2)\quad S_m = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\,r} - \frac{m}{2}\,rS_{m-1} - \frac{m\,(m-1)}{2\;\;3}\,r^2 S_{m-2} \ldots - \frac{nr^m}{m+1}.$$

On peut écrire S_0 au lieu de n; car $a^0 + b^0 + c^0 \ldots + l^0 = n$. De cette manière tous les termes du second membre de la formule (2) sont compris dans la même loi.

Comme application, considérons la suite naturelle des nombres; on a $r = 1$, $a = 1$, $l = n$; et en faisant d'abord $m = 1$, on trouve

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{n}{2}, \quad \text{ou} \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En faisant ensuite $m = 2$, et remplaçant S_1 par $\frac{n(n+1)}{2}$, il vient

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3},$$

d'où l'on conclut aisément

$$(3)\qquad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

350. On peut déduire de la formule (3) la sommation

des piles de boulets. Le second membre de cette formule exprime le nombre de boulets de la pile quadrangulaire, dont le nombre des boulets du côté de la base est n.

Pour la pile triangulaire, le nombre des boulets de la tranche inférieure est $\frac{n(n+1)}{2}$, ou $\frac{n^2+n}{2}$. En faisant successivement $n = 1$, $= 2 = 3$, etc., on obtient les nombres de boulets des différentes tranches à partir du sommet

$$\frac{1+1^2}{2}, \quad \frac{2+2^2}{2}, \quad \frac{3+3^2}{2}, \quad \frac{n+n^2}{2}.$$

La somme de tous ces nombres se compose de la moitié de la somme des nombres naturels de 1 à n, et de la moitié de la somme de leurs carrés. On retrouve ainsi la formule (3) (n° 348).

Le calcul du nombre de boulets de la pile rectangulaire s'effectue de la même manière que dans le n° 348.

CHAPITRE DOUZIÈME.

DIVISIBILITÉ DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES. THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

De la décomposition des quantités algébriques en facteurs premiers.

351. On nomme *quantités entières* les quantités algébriques rationnelles qui ne contiennent aucun dénominateur numérique ou littéral, et l'on dit qu'une quantité entière est ou n'est pas divisible par une autre, suivant que le quotient de la première quantité par la seconde est ou n'est pas une quantité entière.

Lorsqu'une quantité entière n'est divisible par aucune quantité entière autre qu'elle-même et l'unité, on dit qu'elle est *première*. Ainsi, $a - b^2$ est une quantité première; il en est de même du trinôme $x^2 - x + 1$, car ce trinôme est équivalent à $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, et il n'admet pour diviseur aucune quantité entière autre que lui-même. On dit que deux quantités entières sont *premières entre elles*, lorsqu'il n'existe aucune quantité entière autre que l'unité qui les divise exactement l'une et l'autre. Ainsi les quantités $a^2 - b^2$ et $4a^2 - 9b^2$ sont premières entre elles, car $a^2 - b^2$ n'admet pour diviseurs que $a - b$ et $a + b$, et $4a^2 - 9b^2$ n'admet que les deux diviseurs $2a + 3b$ et $2a - 3b$.

Les quantités premières algébriques donnent lieu à des théorèmes analogues à ceux que nous avons fait connaître dans le chapitre VIII, au sujet des nombres premiers (nos 216 et 217). Pendant longtemps on s'est contenté d'admettre ces théorèmes sans les démontrer; mais M. Lefébure de Fourcy en a donné les démonstrations en 1827,

dans un ouvrage intitulé : *Traité sur le plus grand commun diviseur et la théorie de l'élimination*. Ce sont ces démonstrations que nous allons exposer.

352. Théorème 1er. — *Toute quantité première* P *qui divise le produit de deux quantités entières* A *et* B, *doit diviser l'une d'elles.*

Nous avons déjà démontré ce théorème pour le cas où A, B, P sont des nombres (n° 216). Supposons que ces quantités ne contiennent pas plus d'une lettre; il y aura quatre cas à examiner.

Premier cas. A *contient la lettre* x, B *et* P *sont numériques.*

Soit

$$A = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \ldots,$$

a, b, etc., étant des nombres entiers, ainsi que α, β, etc. En multipliant A par B, on a

$$AB = Bax^{\alpha} + Bbx^{\beta} + \ldots.$$

Puisque le produit AB est divisible par le nombre P, il faut que P divise chacun des coefficients Ba, Bb, etc.; par conséquent, si P, qui est un nombre premier, ne divise pas B, il devra diviser chacun des nombres a, b, etc. Or, s'il divise tous ces nombres, il divise le polynôme A. Donc P doit diviser A ou B.

Deuxième cas. A *et* B *contiennent* x, P *est numérique.*

Supposons que P ne divise ni A ni B. Nommons A′ l'ensemble de tous les termes de A, dont les coefficients sont des multiples de P, et A″ l'ensemble de tous les autres termes; on aura $A = A' + A''$. Décomposons B de la même manière; et soit $B = B' + B''$; on aura

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B''.$$

Les trois premières parties de ce produit sont divisibles

par P; et puisque, suivant l'énoncé du théorème, P divise AB, il faut que P divise A″B″, ce qui exige qu'il divise tous les termes de A″B″. Soient ax^{α} et bx^{β} les termes de A″ et de B″, dans lesquels la lettre x a le plus haut exposant; le terme $abx^{\alpha+\beta}$ fera partie du produit A″B″, et il ne pourra se réduire avec aucun autre terme de ce produit; or, le terme $abx^{\alpha+\beta}$ n'est pas divisible par P, puisque, d'après les suppositions, P ne divise ni a ni b. Il est donc impossible d'admettre que P divise AB et ne divise ni A ni B.

Troisième cas. A *contient* x, B *est numérique, et* P *contient* x.

Représentons par Q le quotient de AB par P, qui, par hypothèse, est une quantité entière, et nommons F, F′, F″, etc., les facteurs premiers du nombre B; on aura

$$AFF'F''\ldots = PQ.$$

Le premier membre de cette égalité étant divisible par F, le produit PQ doit l'être aussi; mais P est une quantité première qui contient x; donc elle n'est divisible par aucun nombre; donc Q est divisible par F, sans quoi le produit PQ ne pourrait pas être divisible par F (2e cas). Soit Q′ le quotient de Q par F, on aura

$$AF'F''\ldots = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que Q′ doit être divisible par F′; et, en nommant Q″ le quotient, on aura

$$AF''\ldots = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1;$$

et, comme Q_1 sera encore une quantité entière, on conclut de cette dernière égalité que P divise A.

QUATRIÈME CAS. A, B *et* P *contiennent* x.

Supposons que P ne divise pas A. Si le degré de P ne surpasse pas celui de A, effectuons la division de A par P, afin de parvenir à un reste de degré moindre que P. Le quotient pourra contenir des coefficients fractionnaires, mais il sera entier par rapport à x. Représentons par M le nombre par lequel il faudra multiplier ce quotient pour que tous les dénominateurs disparaissent, par Q le polynôme entier qui résultera de cette multiplication, et par A′ le polynôme qu'on obtiendra en multipliant aussi par M le reste de la division; il est clair que Q et A′ seront le quotient et le reste qu'on trouverait si l'on divisait MA par P, de sorte que l'on aura

$$MA = PQ + A'.$$

A′ ne sera pas nul; autrement le produit MA serait divisible par le polynôme premier P, ce qui est impossible (3e CAS); de plus A′ sera une quantité entière, puisque MA et PQ sont des quantités entières.

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par B, et les divisant ensuite par P, il vient

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P}.$$

On conclut de cette dernière égalité que P, qui divise AB, doit diviser aussi A′B.

Supposons que A′ soit algébrique; en divisant P par A′, on parviendra à un reste de degré moindre que A′, et en représentant par M′ le nombre par lequel il faudra multiplier le quotient pour que les dénominateurs disparaissent, par Q′ le polynôme entier qui résultera de cette multiplication, et par A″ le produit qu'on obtiendra en multipliant aussi par M′ le reste de la division, on aura

$$M'P = A'Q' + A''.$$

A'' ne sera pas nul; car, si cela était, il faudrait que $M'P$ fût divisible par chaque facteur premier algébrique de A', ce qui est impossible; de plus, A'' sera une quantité entière, puisque $M'P$ et $A'Q'$ seront des quantités entières.

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par B, et les divisant ensuite par P, on aura

$$M'B = \frac{A'B}{P}Q' + \frac{A''B}{P}.$$

On conclut de celle-ci que P, qui divise $A'B$, doit diviser aussi $A''B$.

Si A'' est encore algébrique, on divisera P par A''; il en résultera une nouvelle égalité semblable aux précédentes, savoir :

$$M''P = A''Q'' + A'''; \quad \text{d'où} \quad M''B = \frac{A''B}{P}Q'' + \frac{A'''B}{P}.$$

La dernière égalité montre que P, qui divise $A''B$, doit diviser aussi $A'''B$.

En continuant ainsi, on parviendra nécessairement à un reste numérique A_1, puisque l'on ne saurait avoir un reste nul immédiatement après un reste fonction de x; et comme on voit par les raisonnements ci-dessus que le produit A_1B devra encore être divisible par P, il s'ensuit que P doit diviser B (3e cas).

Si le degré de P surpassait celui de A, la démonstration se ferait de la même manière; seulement on diviserait d'abord P par A, au lieu de diviser A par P.

Si, au lieu de supposer que les quantités A, B et P ne contiennent pas plus d'une lettre, on suppose qu'il peut y avoir, dans ces quantités, deux lettres x et y, on aura encore quatre cas à examiner, savoir :

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *ne la contient point;*

Lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *ne la contient point;*

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *la contient aussi;*

Enfin, lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées; la seule différence consiste en ce que les quantités qui précédemment étaient supposées numériques, peuvent être ici des quantités algébriques dépendantes de la lettre y.

De même que les cas où les quantités A, B, P ne renferment pas plus d'une seule lettre servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres, de même ceux-ci serviront à passer aux cas où ces quantités pourraient contenir trois lettres; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

353. Théorème II. — *Une quantité littérale ne peut pas être décomposée en facteurs premiers de plusieurs manières.*

Soit ABCD... un produit de facteurs premiers, et supposons qu'il soit égal à un autre produit $abcd$..., les facteurs a, b, c, d, etc., étant aussi premiers. Le facteur a divisant $abcd$..., il faudra qu'il divise aussi ABCD.... Or, si la quantité première a est différente de chacune des quantités premières A, B, C, D, etc., elle ne pourra diviser aucune d'elles; ne divisant ni A ni B, d'après le théorème précédent, elle ne divisera pas le produit AB; ne divisant ni AB ni C, elle ne divisera pas ABC; ainsi de suite. Il faut donc que le facteur a soit égal à l'un des facteurs A, B, C, D, etc. Supposons $a = A$. En divisant les deux produits par A, les produits restants BCD..... et bcd..... sont

encore égaux, et, en leur appliquant le raisonnement précédent, on conclura que b doit être égal à l'un des facteurs du produit BCD...; ainsi de suite. Il faut donc que les deux produits ABCD..... et *abcd*..... soient composés des mêmes facteurs premiers; ce qui demontre le théorème énoncé.

On doit remarquer que cette démonstration ne diffère pas de celle que nous avons donnée pour les nombres (n° 217).

Corollaire. — Au moyen du théorème ci-dessus, il est facile de prouver la proposition que nous avons admise dans les n°s 169 et 339 : que *la racine d'un degré quelconque d'une quantité entière ne peut être une quantité fractionnaire*. La démonstration est tout à fait semblable à celle qui a été donnée pour les nombres (n° 225).

Du plus grand commun diviseur des quantités algébriques entières.

354. On nomme *plus grand commun diviseur* de plusieurs quantités algébriques entières, le produit de tous les facteurs premiers, numériques ou littéraux, communs à ces quantités.

355. Il résulte de cette définition que l'on obtiendra le plus grand commun diviseur de plusieurs monômes, en cherchant le plus grand commun diviseur des coefficients numériques, et en écrivant à la suite de ce nombre chaque lettre commune à tous les monômes avec le plus petit exposant dont elle est affectée. Ainsi, pour trouver le plus grand commun diviseur des monômes $432a^4b^2x^2$, $270a^2b^3x^2$, $90a^3bx^3$, on cherche d'abord celui des nombres 432, 270 et 90; comme ce plus grand commun diviseur est 18, celui des monômes proposés est $18a^2bx^2$.

356. Pour obtenir le plus grand commun diviseur de

deux polynômes entiers M et N, on détermine d'abord les facteurs monômes de chaque polynôme, en cherchant, comme il vient d'être dit, le plus grand commun diviseur des termes de chacun d'eux. Soit a le plus grand commun diviseur des termes de M, et b le plus grand commun diviseur des termes de N. En divisant M par a et N par b, on aura des quotients A et B. Les facteurs monômes communs à M et N devront être communs à a et b, et les facteurs polynômes communs à M et N devront être communs à A et B; par conséquent le plus grand commun diviseur des polynômes M et N sera le produit du plus grand commun diviseur des monômes a et b, par celui des polynômes A et B.

Soient, par exemple,

$$M = -4a^3yx^6 + 14a^3yx^5 - 12ayx^4 - 7a^2y^2x^3 + 14ay^2x^2,$$
$$N = -a^4x^6 + a^3x^5 + 2a^2x^4 + a^5x^3 - 2a^4x^2.$$

Le plus grand commun diviseur des termes de M est ayx^2; le plus grand commun diviseur des termes de N est a^2x^2; et le plus grand commun diviseur de ces deux quantités est ax^2. En divisant M par ayx^2, et N par a^2x^2, on trouve les quotients

$$A = -4a^2x^4 + 14ax^3 - 12x^2 - 7ayx + 14y,$$
$$B = -a^2x^4 + ax^3 + 2x^2 + a^3x - 2a^2.$$

Le plus grand commun diviseur des polynômes M et N sera donc égal à celui des polynômes A et B multiplié par ax^2.

357. Cherchons actuellement comment il faut opérer pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers A et B qui ne contiennent plus de facteurs monômes.

Supposons que l'on ait ordonné ces polynômes par rapport à une lettre x, et que le degré de B ne surpasse pas

celui de A. Si B divisait exactement A, le polynôme B serait lui-même le plus grand commun diviseur; on est donc conduit à diviser A par B. Supposons que la division ne se fasse pas exactement; si l'on obtient un quotient entier Q, et un reste R d'un degré moindre que B par rapport à x, on aura l'égalité

$$A = BQ + R.$$

D'après cette égalité, tous les facteurs communs à A et B doivent se trouver dans R, et tous les facteurs communs à B et R doivent se trouver dans A; le plus grand commun diviseur de A et B est donc le même que celui de B et R.

Cette conclusion n'aurait plus lieu si le quotient Q contenait des dénominateurs. Or, dans le plus grand nombre de cas, on ne pourra pas effectuer la division de A par B jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste de degré moindre que A, sans que les multiplicateurs des puissances de x dans le quotient soient fractionnaires; et l'on se trouvera arrêté dès la première division partielle, quand le multiplicateur de la plus haute puissance de x dans A ne sera pas exactement divisible par celui de la plus haute puissance de x dans B.

On évitera les fractions si, avant de faire la division, on multiplie le dividende A par le multiplicateur de la plus haute puissance de x dans B, ou par les facteurs premiers de ce multiplicateur qui ne se trouvent pas dans celui de la plus haute puissance de x dans A; mais, pour que cette préparation n'altère pas le plus grand commun diviseur, il faudra que la quantité par laquelle on multipliera le dividende A ne soit point un des facteurs de B.

Quand les polynômes A et B ne contiennent qu'une seule lettre x, les coefficients des puissances de cette lettre dans chaque polynôme sont premiers entre eux, puisque, par hypothèse, on a supprimé, dans chacun des polynômes,

tous les facteurs monômes. Il en résulte que le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, qui est le produit des facteurs premiers communs à ces polynômes, ne changera pas, si l'on multiplie le dividende A par le coefficient du premier terme de B ou par un facteur quelconque de ce coefficient. De cette manière, la première division partielle s'effectuera sans fraction; et en recourant à une préparation semblable, chaque fois que, dans le cours de la division de A par B, on parviendra à un dividende partiel dans lequel le coefficient du premier terme ne sera pas exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur, on pourra pousser les calculs jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste R de degré moindre que B. Il ne s'agira plus alors que de trouver le plus grand commun diviseur des polynômes B et R. A cet effet, on divisera B par R, en observant d'abord que, s'il y a dans R des facteurs monômes, on pourra les supprimer, puisqu'il n'en existe plus de tels dans B. En continuant ces opérations, comme les degrés des restes iront toujours en diminuant, on parviendra nécessairement à un reste indépendant de x. Quand ce reste sera zéro, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur des polynômes A et B. Quand le dernier reste ne sera pas nul, les polynômes A et B n'auront aucun diviseur commun; car tout diviseur commun à ces polynômes devrait diviser le dernier reste, par conséquent il ne pourrait être qu'une quantité indépendante de x, c'est-à-dire un nombre, et par hypothèse A et B n'ont plus de facteurs numériques.

Voici un exemple de ces opérations :

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$
$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5 \quad -10x^3 \quad +15x+8 & x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6 \\
-3x^5+6x^4+18x^3-12x^2-39x-18 & \overline{3} \\
\hline
\quad +6x^5+8x^3-12x^3-24x-10 & \\
\quad 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5. &
\end{array}$$

Avant de passer à la seconde division, on supprime, dans le reste de la première, le facteur 2, et l'on multiplie le polynôme B par 3.

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5-6x^4-18x^3+12x^2+39x+18 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\
-3x^5-4x^4+6x^3+12x^2+5x & x, -5 \\
\hline
\quad -10x^4-12x^3+24x^2+44x+18 & \\
\quad -5x^4-6x^3+12x^2+22x+9 & \\
\quad -15x^4-18x^3+36x^2+66x+27 & \\
\quad +15x^4+20x^3-30x^2-60x-25 & \\
\hline
\quad +2x^3+6x^2+6x+2 & \\
\quad x^3+3x^2+3x+1. &
\end{array}$$

On a divisé le premier reste de cette deuxième division par 2; on a multiplié le résultat par 3, afin d'obtenir un quotient entier, et on a supprimé, dans le second reste, le facteur 2.

Troisième division.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 & x^3+3x^2+3x+1 \\
-3x^4-9x^3-9x^2-3x & 3x-5 \\
\hline
\quad -5x^3-15x^2-15x-5 & \\
\quad +5x^3+15x^2+15x+5 & \\
\hline
\quad 0. &
\end{array}$$

Le plus grand commun diviseur est x^3+3x^2+3x+1.

358. Avant de passer aux cas où les polynômes contiennent plusieurs lettres, il faut montrer comment on peut trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités, quand on sait trouver celui de deux quantités.

Supposons que l'on demande le plus grand commun diviseur de quatre quantités A, B, C, D. Soient d le plus grand commun diviseur de A et B, d' celui de d et C, et d'' celui de d' et D. Le plus grand commun diviseur des quatre quantités A, B, C, D sera d''; car d contenant tous les facteurs premiers communs à A et B, et d' contenant tous les facteurs communs à d et C, d' est le produit des facteurs premiers communs à A, B et C; et puisque d'' contient tous les facteurs premiers communs à d' et D, il est le produit de tous les facteurs premiers communs aux quatre quantités A, B, C, D.

359. Considérons actuellement deux polynômes M et N qui contiennent deux lettres x et y; et supposons, conformément à ce qui a été dit dans le n° 356, que ces polynômes aient été d'abord débarrassés de leurs facteurs monômes. Si l'on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une des deux lettres, x par exemple, les coefficients de cette lettre pourront être des polynômes, mais ils ne contiendront que la seule lettre y; et tout diviseur indépendant de x de l'un des polynômes M et N devra nécessairement diviser les coefficients de toutes les puissances de x dans ce polynôme (n° 70).

Nommons a le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de x dans M, et b celui des coefficients des puissances de x dans N. En divisant M par a, et N par b, on obtiendra des quotients entiers A et B, et le plus grand commun diviseur demandé sera égal au plus grand commun diviseur des quantités a et b multiplié par celui des polynômes A et B. Or, on pourra appliquer aux

polynômes A et B tout ce que nous avons dit relativement à deux polynômes qui ne contiennent qu'une seule lettre; seulement les observations qui se rapportaient aux coefficients numériques et aux facteurs numériques que l'on devait introduire dans les dividendes, ou supprimer dans les restes successifs, s'appliqueront à des facteurs algébriques qui pourront être des polynômes en y.

EXEMPLE.

$$M = 2(y^3 - 2y^2 - y + 2)x^3 + 3(y^2 - 1)x^2 - (2y^3 - y^2 - 2y + 1),$$
$$N = 3(y^3 - 4y^2 + 5y - 2)x^2 + 7(y^2 - 2y + 1)x - (3y^3 - 5y^2 + y + 1).$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients des puissances de x dans M est $a = y^2 - 1$; le plus grand commun diviseur des coefficients des puissances de x dans N est $b = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$; et le plus grand commun diviseur de a et de b est $y - 1$.

On divise M par $y^2 - 1$, et N par $y^2 - 2y + 1$, ce qui donne les quotients

$$A = 2(y - 2)x^3 + 3x^2 - (2y - 1),$$
$$B = 3(y - 2)x^2 + 7x - (3y + 1).$$

On divise A par B; et, afin de n'avoir que des quantités entières au quotient, on multiplie d'abord A par 3. On obtient un premier reste qui est

$$-5x^2 + 2(3y + 1)x - 3(2y - 1).$$

Pour continuer la division, on multiplie ce polynôme par $3(y - 2)$. Le reste du premier degré par rapport à x est

$$(18y^2 - 30y + 23)x - (18y^2 - 30y + 23).$$

On supprime, dans ce reste, le facteur $18y^2 - 30y + 23$; par là on obtient

$$R = x - 1.$$

La division de B par R donnant le reste zéro, le plus grand commun diviseur des polynômes A et B est $x - 1$; par conséquent, celui des polynômes proposés M et N est

$$(y - 1)(x - 1) = yx - x - y + 1.$$

360. De même qu'on passe du cas où les polynômes ne contiennent qu'une lettre, à celui où ils en contiennent deux, de même on s'élèvera, de ce second cas, à celui des polynômes qui renferment trois lettres; et ainsi de suite. Par conséquent, on pourra toujours déterminer le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes renfermant un nombre quelconque de lettres.

361. Prenons pour dernier exemple les polynômes A et B que nous avons obtenus dans le n° 356,

$$A = -4a^2x^4 + 14ax^3 - 12x^2 - 7ayx + 14y,$$
$$B = -a^2x^4 + ax^3 + 2x^2 + a^3x - 2a^2.$$

Comme B ne contient pas y, le plus grand commun diviseur des deux polynômes doit être indépendant de cette lettre; par conséquent, il doit diviser les coefficients de A ordonné par rapport à y, savoir,

$$-4a^2x^4 + 14ax^3 - 12x^2, \quad \text{et} \quad -7ax + 14.$$

On cherche donc le plus grand commun diviseur de ces deux derniers polynômes. Après avoir divisé le premier par 2, le second par 7, on a ceux-ci :

$$-2a^2x^2 + 7ax - 6, \quad \text{et} \quad -ax + 2.$$

Leur plus grand commun diviseur est $-ax + 2$; et, comme il divise exactement B, il est le plus grand commun diviseur des polynômes A et B.

Nous indiquerons comme exercices les deux exemples

suivants :

1°. $A = 6x^3 - 6yx^2 + 2y^2x - 2y^3,$

$B = 12x^2 - 15yx + 3y^2.$

Le plus grand commun diviseur est $x - y$.

2°. $A = (b - c)x^2 + (2ab - 2ac)x + a^2b - a^2c,$

$B = (ab - ac + b^2 - bc)x + a^2c + ab^2 - a^2b - abc.$

Le plus grand commun diviseur est $b - c$

De la décomposition des fonctions entières d'une quantité x *en facteurs du premier degré.*

362. On dit qu'une quantité algébrique est une fonction entière d'une ou de plusieurs lettres, lorsqu'elle ne contient que des puissances entières et positives de ces lettres, les coefficients de ces puissances étant des quantités quelconques. Ainsi, le trinôme $x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$ est une fonction entière de x; de même $x^3 - \frac{3xy^2}{a} - \frac{2b}{\sqrt{a^2+1}}$ est une fonction entière des deux quantités x et y. On dit aussi qu'une fonction entière d'une ou de plusieurs quantités est divisible par une autre fonction entière des mêmes quantités, quand le quotient est entier par rapport à ces quantités.

La résolution des équations du second degré a fait voir que le premier membre d'une semblable équation est le produit de deux facteurs du premier degré en x; ainsi, le trinôme $x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, par exemple, est le produit des deux facteurs $x - \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{-1}}{6}$, $x - \frac{\sqrt{2} - 4\sqrt{-1}}{6}$.

On verra, dans le chapitre suivant, que la proposition que nous venons de rappeler est comprise dans une autre

plus générale, qui consiste en ce que, une fonction entière de x, telle que $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ etc. (m désignant un nombre entier qui est le degré de la fonction, et le coefficient du premier terme étant l'unité), est le produit de m facteurs du premier degré $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc.; a, b, c, etc., désignant des quantités quelconques indépendantes de x, qui peuvent être des expressions imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

Quand le coefficient du premier terme de la fonction n'est pas l'unité, en la divisant par ce coefficient, on a un quotient du même degré qui se décompose comme nous venons de le dire; et, en représentant par A le coefficient du premier terme, la fonction proposée est égale à un produit de la forme $A(x - a)(x - b)\ldots$.

363. Les propositions qui ont été établies dans les n°s 352 et 353 s'appliquent aux facteurs du premier degré des fonctions entières, en apportant quelques modifications aux énoncés et aux démonstrations.

Théorème 1er. — *Un facteur du premier degré* $x - a$, *qui divise le produit de deux fonctions entières* A *et* B, *divise nécessairement l'une d'elles.*

En effet, si A n'est pas divisible par $x - a$, la division donnera un quotient Q entier par rapport à x, avec un reste R indépendant de x, et l'on aura l'égalité

$$A = (x - a) \times Q + R;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{AB}{x - a} = B \times Q + \frac{BR}{x - a}.$$

Par hypothèse, $\frac{AB}{x - a}$ doit être une fonction entière de x; donc, puisque R est une quantité indépendante de x, il

faut que $\frac{B}{x-a}$ soit une fonction entière de x. Donc, si $x-a$ ne divise pas A, il faut qu'il divise B.

THÉORÈME II. — *Une fonction entière de* x *n'admet qu'un seul système de facteurs du premier degré.*

Pour le démontrer, considérons le produit

$$A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

A désignant un facteur indépendant de x. Supposons que ce produit puisse être égal à un autre produit de la même forme

$$A'(x-a')(x-b')(x-c')\ldots(x-k').$$

Le facteur $x-a'$ qui divise le second produit devra diviser aussi le premier; donc, d'après la proposition précédente, il faudra qu'il divise un des facteurs $x-a$, $x-b$, etc., ce qui exige qu'il soit égal à l'un de ces facteurs. Soit $a'=a$; en supprimant les facteurs égaux $x-a$ et $x-a'$, les quotients devront être égaux; et de là on conclura que le facteur $x-b'$ doit être égal à l'un des facteurs $x-b$, $x-c$, etc. En continuant ainsi, on reconnaîtra que les facteurs en x des deux produits doivent être égaux chacun à chacun. Par suite, on devra avoir aussi $A'=A$.

364. Soient A et B deux fonctions entières de x; si, parmi les facteurs du premier degré de A, il s'en trouve qui divisent B, le produit de tous ces facteurs communs sera ce que l'on appellera le plus grand commun diviseur en x des fonctions A et B.

Supposons que le degré de B ne surpasse pas celui de A. Si B divisait A, B serait le plus grand commun diviseur cherché. Supposons que la division ne se fasse pas exactement; soient Q le quotient et R le reste, le degré de R étant moindre que celui de B; on aura $A=BQ+R$. D'après cette égalité, les facteurs communs à A et B seront les mêmes

que les facteurs communs à B et R; on devra donc opérer sur B et R de la même manière que sur A et B. En continuant ainsi, on parviendra enfin à un reste indépendant de x. Si ce reste est nul, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur cherché; s'il n'est pas nul, les polynômes A et B n'auront aucun facteur commun en x.

Dans cette recherche, on pourrait se dispenser d'employer les préparations dont il a été parlé dans le n° 357, afin d'éviter les quotients fractionnaires; mais, pour la simplicité des calculs, il sera préférable d'y avoir recours, après avoir préalablement fait disparaître les dénominateurs dans A et B. De cette manière, les calculs ne différeront pas de ceux dont nous avons donné un exemple dans le n° 357. D'ailleurs, ces préparations ne pourront influer que sur les facteurs indépendants de x, de la quantité à laquelle on parviendra; et, pour l'objet dont il s'agit ici, on peut n'attacher aucune importance à ces sortes de facteurs.

CHAPITRE TREIZIÈME.

PROPOSITIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE A UNE SEULE INCONNUE.

Explications préliminaires.

365. Les équations à une seule inconnue, dans lesquelles cette inconnue ne se trouve point sous des radicaux, peuvent être ramenées, par les simplifications ordinaires, à la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + K = 0;$$

m désignant un nombre entier qui est le degré de l'équation, et les lettres A, B, C, ..., K représentant des quantités connues.

On ne donne pas de coefficient au premier terme, parce que, s'il avait un coefficient différent de l'unité, on n'altérerait pas l'équation en la divisant par ce coefficient.

366. On désigne abriévativement les fonctions d'une quantité x par des notations telles que celles-ci : $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, etc. On représente de même les fonctions de deux quantités x et y par $f(x, y)$, $F(x, y)$, etc. La lettre que l'on place devant les parenthèses, comme signe de fonction, doit être différente pour des fonctions différentes; mais lorsque la même lettre, employée de cette manière, se reproduit plusieurs fois dans le cours d'un calcul ou d'une explication, elle indique des fonctions composées absolument de la même manière : ainsi, quand une fonction a été représentée par $f(x)$, la notation $f(a)$ représente ce que devient cette fonction lorsqu'on y remplace x par a; $f(y-2)$ exprime ce que devient la même fonction quand on remplace x par $y-2$; $f(3)$, ce qu'elle devient quand on fait

$x = 3$. Pareillement, $f(x, 3)$ représente ce que devient la fonction $f(x, y)$ quand on fait $y = 3$, sans attribuer aucune valeur à x.

367. Pour calculer la valeur que prend une fonction entière de x, lorsque l'on donne à x une valeur numérique, on opère comme on le voit dans l'exemple suivant.

Soit le polynôme

$$4x^5 - 13x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 8,$$

et supposons qu'on veuille obtenir la valeur de ce polynôme, quand on fait $x = 3$.

On exécutera le calcul ainsi :

$$4 \times 3 - 13 = -1, \quad -1 \times 3 + 5 = +2, \quad +2 \times 3 - 4 = +2,$$
$$+2 \times 3 = +6, \quad +6 \times 3 - 8 = +10.$$

Le nombre 10 est le résultat cherché; car, d'après les opérations qui y ont conduit, ce nombre est égal à

$$4 \times 3^5 - 13 \times 3^4 + 5 \times 3^3 - 4 \times 3^2 - 8.$$

368. On appelle *racine* d'une équation toute quantité positive ou négative, ou toute expression imaginaire qui, mise à la place de l'inconnue, réduit l'équation à une égalité.

La résolution générale des équations consisterait à trouver, pour toutes les équations d'un même degré, les expressions des racines en fonction des coefficients. Les analystes ont longtemps dirigé leurs efforts vers ce but; nous avons montré, dans le chapitre VII, comment ils y sont parvenus pour l'équation du troisième degré, et nous ferons voir, dans le chapitre XVI, comment on peut y parvenir aussi pour l'équation du quatrième degré. Mais les formules qu'on obtient ainsi se présentent sous une forme telle, qu'elles ne peuvent servir à trouver les valeurs numériques

des racines par la substitution des valeurs des coefficients, à moins que ceux-ci ne satisfassent à certaines conditions particulières, comme on l'a vu lorsqu'on a traité l'équation du troisième degré.

La même difficulté aurait lieu à plus forte raison pour les équations des degrés supérieurs, si l'on parvenait à les résoudre par des formules.

Il a donc fallu chercher des méthodes au moyen desquelles, tous les coefficients d'une équation étant des nombres connus, on pût calculer directement ses racines.

Nous allons exposer les propositions générales sur lesquelles ces méthodes sont fondées.

Développement d'une fonction entière du binôme $x + y$.

369. Soit la fonction entière de x

$$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots;$$

en écrivant $x + y$ au lieu de x, il vient

$$A(x+y)^m + B(x+y)^{m-1} + C(x+y)^{m-2} + \ldots;$$

et si l'on développe les puissances du binôme $x + y$, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de x, on trouve

$$\begin{array}{l|l|l} A x^m + m A x^{m-1} & y + m(m-1) A x^{m-2} & \\ + B x^{m-1} + (m-1) B x^{m-2} & \quad + (m-1)(m-2) B x^{m-3} & \frac{y^2}{1.2} + \ldots \\ + C x^{m-2} + (m-2) C x^{m-3} & \quad + (m-2)(m-3) C x^{m-4} & \\ + \ldots; & & \end{array}$$

Posons, pour abréger,

$$X = A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots,$$

$$X' = m A x^{m-1} + (m-1) B x^{m-2} + (m-2) C x^{m-3} + \ldots,$$

$$X'' = m(m-1) A x^{m-2} + (m-1)(m-2) B x^{m-3} + (m-2)(m-3) C x^{m-4} + \ldots$$

. . . . . .

Alors le résultat précédent sera exprimé comme il suit :

$$X + X'y + \frac{X''}{1.2}y^2 + \frac{X'''}{1.2.3}y + \ldots.$$

X est le polynôme donné lui-même; X′ se déduit du polynôme X en multipliant chaque terme par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant l'exposant d'une unité; et chacun des polynômes X″, X‴, etc., se déduit de celui qui le précède, comme X′ se déduit de X.

Le polynôme X′ est appelé la *fonction dérivée*, ou simplement la dérivée de X. Le polynôme X″ est pareillement la dérivée de X′; le polynôme X‴, celle de X″, etc.; et l'on dit, par cette raison, que X″ est la dérivée du deuxième ordre de X, que X‴ en est la dérivée du troisième ordre, etc.

Quand une fonction a été désignée par $f(x)$, on représente ses dérivées successives par $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. Au moyen de cette notation, on a, suivant ce qui vient d'être dit,

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + f''(x)\frac{y^2}{1.2} + f'''(x)\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Comme le plus haut exposant de x diminue d'une unité en passant du polynôme donné à sa première dérivée, ou d'une dérivée à la suivante, un polynôme du degré m fournit m dérivées successives, dont la dernière ne contient plus x. Il est facile de voir en outre que, si le premier terme du polynôme est représenté comme ci-dessus par Ax^m, la dernière dérivée ou la dérivée de l'ordre m est

$$1 \times 2 \times 3 \ldots m \times A.$$

Par conséquent, la loi des termes qui composent le développement de $f(x+y)$ donne, pour le dernier terme, Ay^m. C'est, en effet, ce que l'on voit à priori; car il est clair qu'après la substitution de $x+y$ au lieu de x dans le poly-

nôme $Ax^m + Bx^{m-1} +$ etc., la quantité Ax^m, qui devient $A(x+y)^m$, donne le terme Ay^m, et il n'y a aucun autre terme dans lequel l'exposant de y soit égal à m ou plus grand que m.

370. Pour appliquer à un exemple ce qui vient d'être dit sur l'emploi des dérivées, soit

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16.$$

Si l'on veut trouver ce que devient ce polynôme quand on remplace x par $y - 1$, on calculera les dérivées successives. La première dérivée est

$$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 32x - 20.$$

En formant la seconde dérivée, et la divisant par 2, on a

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 10x^3 + 30x^2 + 3x - 16.$$

La dérivée de cette dernière fonction, divisée par 3, est

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 10x^2 + 20x + 1.$$

La dérivée de celle-ci, divisée par 4, est

$$\frac{f^{\text{iv}}(x)}{1.2.3.4} = 5x + 5.$$

On a enfin

$$\frac{f^{\text{v}}(x)}{1.2.3.4.5} = 1.$$

En remplaçant dans ces diverses fonctions x par -1, on trouve

$$f(-1) = -9,\ f'(-1) = 0,\ \frac{f''(-1)}{1.2} = 1,\ \frac{f'''(-1)}{1.2.3} = -9,$$

$$\frac{f^{\text{iv}}(-1)}{1.2.3.4} = 0,\ \frac{f^{\text{v}}(-1)}{1.2.3.4.5} = 1;$$

par suite,

$$f(y-1) = y^3 - 9y^2 + y^2 - 9.$$

En employant le même procédé pour trouver ce que devient le polynôme $2x^4 - 5x^2 + 3x - 1$, quand on y remplace x par $y - 2$, on obtient

$$2y^4 - 16y^3 + 43y^2 - 41y + 5.$$

Valeurs d'une fonction entière de x *pour des valeurs très-grandes, ou très-petites, de* x. *Continuité des fonctions entières d'une variable.*

371. *Si dans le polynôme* $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc., *les exposants* m, n, p, etc., *étant des nombres entiers positifs qui forment une suite décroissante, on attribue à* x *des valeurs numériques suffisamment grandes, positives ou négatives, les valeurs du polynôme auront le même signe que celles du premier terme* Ax^m; *et l'on pourra donner à* x *une valeur assez grande pour que la valeur du polynôme soit aussi grande qu'on le voudra.*

On peut écrire le polynôme donné comme il suit :

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-n}} + \frac{C}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-p}} + \ldots\right).$$

Pour une valeur très-grande de x, les fractions $\frac{1}{x^{m-n}}$, $\frac{1}{x^{m-p}}$, etc., auront toutes des valeurs très-petites. Par suite, la somme des termes $\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-n}}$, $\frac{C}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-p}}$, etc., dont le nombre est nécessairement limité, aura aussi une valeur très-petite; de sorte que, si l'on fait croître suffisamment x, le polynôme renfermé dans les parenthèses finira par prendre des valeurs très-peu différentes de l'unité, et qui seront par conséquent positives. Le polynôme donné prendra donc des

valeurs de même signe que celles du terme Ax^m. On voit, de plus, que la valeur du polynôme pourra devenir aussi grande qu'on le voudra, puisque le facteur Ax^m croît indéfiniment avec x.

372. *Si dans le polynôme* $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc., *les exposants* m, n, p, etc., *étant des nombres entiers positifs qui forment une suite croissante, et le polynôme étant composé d'un nombre fini de termes, on attribue à* x *une très-petite valeur, positive ou négative, le polynôme aura une valeur très-petite, de même signe que celle du premier terme* Ax^m.

On peut écrire le polynôme donné comme il suit :

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}x^{n-m} + \frac{C}{A}x^{p-m} + \ldots\right).$$

Pour une valeur très-petite de x, les quantités x^{n-m}, x^{p-m}, etc., dont les exposants sont positifs, auront toutes des valeurs très-petites ; de sorte que, si l'on fait converger x vers zéro, le polynôme renfermé dans les parenthèses finira par prendre des valeurs très-peu différentes de l'unité, et qui seront par conséquent positives. Le polynôme donné prendra donc des valeurs de même signe que celles du terme Ax^m. On voit, de plus, que la valeur du polynôme pourra devenir aussi petite qu'on le voudra, puisque le facteur Ax^m décroît indéfiniment avec x.

373. *Étant données une fonction entière* f(x) *et une valeur particulière* a *de* x, *on peut trouver une quantité* h *assez petite pour que la différence* f(a + h) — f(a) *soit plus petite qu'une quantité donnée aussi petite que l'on voudra.*

En effet, d'après le n° 369,

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)\,h + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Or, si l'on donne à h une valeur très-petite, chacun des

termes $f'(a)h$, $\frac{f''(a)h^2}{1.2}$, etc., aura une valeur très-petite; et comme le nombre de ces termes est limité, on peut concevoir que h soit assez petit pour que la somme de ces termes devienne aussi petite qu'on le veut; ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. Soient α et β deux nombres donnés, β étant plus grand que α. Si l'on veut déterminer la quantité h de manière que, pour une valeur quelconque a de x, comprise entre α et β, on ait $f(a+h)-f(a)<\varepsilon$, en désignant par ε une quantité aussi petite que l'on voudra, on y parviendra comme il suit.

Soit C un nombre plus grand que tous les coefficients qui entrent dans les polynômes $f'(x)$, $\frac{f''(x)}{1.2}$, $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$, etc. Chacun des termes de ces polynômes, pour une valeur de x comprise entre α et β, sera plus petit que $C\beta^{m-1}$, si $\beta>1$; et plus petit que C, si $\beta<1$; par conséquent, la valeur de chaque polynôme sera plus petite que $mC\beta^{m-1}$, ou que mC, selon que l'on aura $\beta>1$ ou $\beta<1$.

Cela posé, désignons par K le nombre $mC\beta^{m-1}$, si $\beta>1$, et le nombre mC si $\beta<1$. D'après le développement de $f(a+h)-f(a)$, on aura, pour une valeur quelconque a de x, comprise entre α et β,

$$f(a+h)-f(a)<Kh(1+h+h^2\ldots+h^{m-1}).$$

Le second membre de cette inégalité est égal à $\frac{Kh(1-h^m)}{1-h}$; par conséquent, si l'on suppose $h<1$, ce second membre sera moindre que $\frac{Kh}{1-h}$. Donc, si l'on pose $\frac{Kh}{1-h}<\varepsilon$, on aura à fortiori $f(a+h)-f(a)<\varepsilon$. Or la première condition est satisfaite quand on a $h<\frac{\varepsilon}{K+\varepsilon}$. Ainsi, en donnant à x des valeurs croissantes depuis α jusqu'à β, et telles,

que la différence de deux valeurs consécutives soit égale à $\frac{\varepsilon}{K+\varepsilon}$, ou moindre que cette quantité, on obtiendra pour $f(x)$ une suite de valeurs telles, que la différence de deux valeurs consécutives sera plus petite que ε.

Propositions par lesquelles on reconnaît qu'une équation a une racine réelle. — Théorème qui établit que toute équation a une racine.

374. Théorème Ier. — *Lorsque deux nombres α et β, substitués dans le premier membre d'une équation* $f(x)=0$, *donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre α et β.*

En effet, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, on peut attribuer à x des valeurs croissantes depuis α jusqu'à β, telles, que la différence entre chacune des valeurs correspondantes de $f(x)$ et la suivante soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on voudra. Il y aura nécessairement deux valeurs consécutives de $f(x)$ qui seront de signes contraires, puisque, par hypothèse, les deux valeurs extrêmes $f(\alpha)$ et (β) sont de signes contraires. Ces deux valeurs consécutives de $f(x)$, qui seront de signes contraires, ayant entre elles une différence moindre que ε, chacune d'elles sera numériquement plus petite que ε. Or, cette conclusion subsistant quelque petite que soit la quantité ε, il s'ensuit qu'il existe entre α et β au moins une valeur de x pour laquelle $f(x)$ est zéro.

Scolie. — Comme il est possible que le polynôme $f(x)$ passe plusieurs fois du positif au négatif, ou du négatif au positif, pendant que x varie depuis α jusqu'à β, l'équation $f(x)=0$ peut avoir plusieurs racines réelles comprises entre α et β.

375. Théorème II. — *Une équation de degré impair a*

au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \pm K = 0,$$

et supposons que m soit un nombre impair.

Considérons d'abord le cas où le dernier terme est négatif. Si l'on fait $x = 0$ dans le premier membre de l'équation, on aura un résultat négatif, puisque ce résultat ne sera autre que le dernier terme. Si l'on donne ensuite à x une valeur positive assez grande pour que le signe du premier membre soit le même que celui de son premier terme (n° 371), on aura un résultat positif. L'équation aura donc au moins une racine positive.

Supposons actuellement que le dernier terme soit positif. En faisant $x = 0$, on aura un résultat positif, et si l'on donne ensuite à x une valeur négative suffisamment grande, on aura un résultat négatif; l'équation aura donc au moins une racine négative.

376. Théorème III. — *Une équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

Car en faisant $x = 0$, on aura un résultat négatif; et si l'on donne ensuite à x une valeur suffisamment grande, positive ou négative, le résultat sera positif, puisqu'il aura le signe du premier terme, lequel, étant de degré pair, sera toujours positif.

377. Théorème IV. — *Lorsque le premier membre d'une équation est composé d'une suite de termes positifs, après lesquels tous les autres termes sont négatifs (le second membre étant zéro), l'équation a une racine positive, et elle n'en a qu'une.*

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Nx^{m-n} - Px^{m-n-1} - \ldots - R = 0,$$

dans laquelle les termes sont tous positifs jusqu'au terme Nx^{m-n}, et les termes suivants sont tous négatifs.

Le dernier terme de cette équation étant négatif, elle aura une racine positive; il s'agit de prouver qu'elle n'en aura qu'une. Or on peut mettre le premier membre sous cette forme :

$$x^{m-n}\left(x^n + Ax^{n-1} \ldots + N - \frac{P}{x} \ldots - \frac{R}{x^{m-n}}\right).$$

Si l'on fait croître x à partir de zéro, la quantité $x^n + Ax^{n-1} \ldots + N$ ira en augmentant, sauf le cas où elle serait constante, ce qui aurait lieu si le premier terme de l'équation était seul positif. La quantité $\frac{P}{x} + \ldots + \frac{R}{x^{m-n}}$ ira, au contraire, en diminuant. Donc, si x croît jusqu'à l'infini, le premier membre de l'équation ne changera de signe qu'une seule fois. L'équation n'aura donc qu'une seule racine positive.

On voit en outre que, si x croît à partir d'une valeur qui rende le premier membre de l'équation positif, la valeur de ce polynôme croîtra avec celle de x.

378. Théorème v.—*Une équation a toujours une racine de la forme* $a + b\sqrt{-1}$, a *et* b *étant des quantités réelles* (*).

Considérons d'abord les quatre équations

$$x^m = +1, \quad x^m = -1, \quad x^m = +\sqrt{-1}, \quad x^m = -\sqrt{-1}.$$

L'équation $x^m = +1$ admet toujours une racine; car on

(*) Le lecteur pourra admettre ce théorème sans s'arrêter à la démonstration.

la vérifie, quel que soit m, en posant $x = 1$. A l'égard des trois autres équations, on sait, par ce qui a été dit dans le chapitre VII, que l'équation $x^m = -1$ a toujours au moins une racine réelle ou imaginaire, et que chacune des deux dernières, $x^m = +\sqrt{-1}$, $x^m = -\sqrt{-1}$, a des racines imaginaires toutes les fois que m est un nombre de la forme 2^k. Il reste à examiner le cas où, dans les deux dernières équations, m est un nombre impair, ou le produit d'un nombre impair quelconque par une puissance de 2. A cet effet, soit $m = 2^k \times n$, n étant un nombre impair; en posant $x^{2^k} = y$, on aura les deux équations

$$y^n = +\sqrt{-1}, \quad y^n = -\sqrt{-1}.$$

Or, on a (n° 206)

$$(+\sqrt{-1})^{4p+1} = +\sqrt{-1}, \quad (+\sqrt{-1})^{4p+3} = -\sqrt{-1};$$

par suite,

$$(-\sqrt{-1})^{4p+1} = -\sqrt{-1}, \quad (-\sqrt{-1})^{4p+3} = +\sqrt{-1};$$

Ces égalités montrent que chacune des deux équations ci-dessus, dans lesquelles n est un nombre impair, admet toujours une racine égale à $+\sqrt{-1}$ ou à $-\sqrt{-1}$. D'ailleurs, si dans l'équation $x^{2^k} = y$, on fait $y = +\sqrt{-1}$ ou $y = -\sqrt{-1}$, cette équation donnera toujours pour x des valeurs de la forme $p + q\sqrt{-1}$. Il existe donc des valeurs imaginaires de x qui vérifient les équations $x^m = +\sqrt{-1}$ et $x^m = -\sqrt{-1}$.

Considérons actuellement l'équation

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0;$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$, pouvant être des quantités réelles ou des expressions imaginaires.

Si l'on fait dans le premier membre de cette équation

$x = p + q\sqrt{-1}$, p et q représentant des quantités réelles, le résultat sera une expression imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles et entières de p et q. Pour que l'équation soit satisfaite, il faudra que l'on ait $P = 0$ et $Q = 0$, ou, ce qui revient au même, $P^2 + Q^2 = 0$. Nous allons démontrer qu'il existe toujours un couple de valeurs réelles de p et q qui satisfait à cette condition $P^2 + Q^2 = 0$. Pour cela, nous prouverons d'abord que la plus petite valeur que peut recevoir la quantité $P^2 + Q^2$, lorsqu'on fait varier p et q, correspond à des valeurs finies de p et q; nous ferons voir ensuite que cette plus petite valeur est zéro.

Rappelons, avant tout, que la quantité $\sqrt{P^2 + Q^2}$ est ce qu'on nomme le module de l'expression imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ (n° 204).

Pour démontrer que la plus petite valeur du module $\sqrt{P^2 + Q^2}$ correspond à des valeurs finies de p et q, il suffit de prouver que, lorsqu'on fait croître indéfiniment les quantités p et q ou seulement l'une d'elles, le module $\sqrt{P^2 + Q^2}$ croît indéfiniment. Or le premier membre de l'équation peut être écrit sous cette forme

$$x^m\left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_m}{x^m}\right).$$

En posant $x = p + q\sqrt{-1}$, on aura

$$P + Q\sqrt{-1}$$
$$= (p + q\sqrt{-1})^m\left[1 + \frac{A_1}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{(p + q\sqrt{-1})^2} \cdots + \frac{A_m}{(p + q\sqrt{-1})^m}\right].$$

On a vu que le module du produit de plusieurs expressions imaginaires est le produit des modules des facteurs, et le module du quotient de deux expressions imaginaires

est le quotient du module du dividende par le module du diviseur (nos 205 et 207).

Cela posé, les modules des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_m$, étant des quantités finies, si l'on fait croître indéfiniment les deux quantités p et q, ou seulement l'une d'elles, les modules des fractions $\frac{A_1}{p+q\sqrt{-1}}, \frac{A_2}{(p+q\sqrt{-1})^2}, \ldots, \frac{A_m}{(p+q\sqrt{-1})^m}$, décroîtront indéfiniment; ces fractions se réduiront donc à des expressions imaginaires $\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}$, etc., dans lesquelles les quantités α_1, β_1, α_2, β_2, etc., pourront devenir toutes aussi petites qu'on le voudra. Il suit de là que la somme

$$1+\frac{A_1}{p+q\sqrt{-1}}+\frac{A_2}{(p+q\sqrt{-1})^2}+\ldots$$

sera une expression imaginaire $1+\gamma+\delta\sqrt{-1}$, dans laquelle les quantités γ et δ pourront être rendues aussi petites qu'on le voudra ; et par conséquent le module de cette somme, ou la quantité $\sqrt{(1+\gamma)^2+\delta^2}$, aura une valeur très-peu différente de l'unité. Mais le module de $(p+q\sqrt{-1})^m$ croîtra indéfiniment. Par conséquent, le module de $P+Q\sqrt{-1}$ croîtra lui-même indéfiniment; ce qu'il fallait démontrer.

Il faut actuellement prouver que la plus petite valeur du module $\sqrt{P^2+Q^2}$ est zéro; or cette proposition sera démontrée, si l'on fait voir que, toutes les fois que le module $\sqrt{P^2+Q^2}$ aura une valeur différente de zéro, on pourra assigner une valeur imaginaire de x telle, qu'en représentant le résultat de la substitution de cette valeur dans le premier membre de l'équation par $P'+Q'\sqrt{-1}$, on ait $P'^2+Q'^2<P^2+Q^2$.

Désignons la valeur de x qu'il s'agira de trouver par

$p + q\sqrt{-1} + \varepsilon u$, ε représentant un nombre qu'on pourra supposer aussi petit qu'on le voudra, et u étant une indéterminée qui pourra recevoir des valeurs réelles ou imaginaires.

Pour obtenir le résultat de la substitution de..... $p + q\sqrt{-1} + \varepsilon u$ à la place de x dans le premier membre de l'équation (1), nous remplacerons d'abord x par $x + h$; nous ferons ensuite $x = p + q\sqrt{-1}$ et $h = \varepsilon u$.

Le résultat de la substitution de $x + h$ à la place de x dans le premier membre de l'équation peut être exprimé par

$$(2) \qquad X + X'h + \frac{X''}{1.2}h^2 + \frac{X'''}{1.2.3}h^3 \ldots + h^m;$$

X désigne alors le premier membre de l'équation, et X', X'', X''', etc., sont les dérivées successives de ce polynôme.

Quand on fait $x = p + q\sqrt{-1}$ dans le polynôme (2), le premier terme X devient $P + Q\sqrt{-1}$.

Quant aux coefficients des puissances de h dans les termes suivants, il peut arriver que quelques-uns deviennent nuls; mais ils ne peuvent pas s'évanouir tous en même temps, puisque le coefficient de la plus haute puissance de h est l'unité.

Soit h^n la plus faible puissance de h dont le coefficient ne devient pas zéro quand on suppose $x = p + q\sqrt{-1}$. Ce coefficient sera de la forme $R + S\sqrt{-1}$, et l'on n'aura pas en même temps $R = 0$, $S = 0$.

D'après cela, si l'on représente par $P' + Q'\sqrt{-1}$ la valeur que prend le polynôme (2), quand on y remplace x par $p + q\sqrt{-1}$, et h par εu, on aura

$$(3) \quad P' + Q'\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1} + (R + S\sqrt{-1})\varepsilon^n u^n$$
$$+ (\textit{des termes en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m).$$

On peut attribuer à u une valeur telle, que l'on ait $u^n = +1$, ou $u^n = -1$; alors il vient

$$P' + Q'\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1} \pm (R + S\sqrt{-1})\varepsilon^n$$
$$+ (\textit{des termes en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m).$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve

$$P' = P \pm R\varepsilon^n + (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m),$$
$$Q' = Q \pm S\varepsilon^n + (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m);$$

d'où l'on conclut

$$P'^2 + Q'^2 = P^2 + Q^2 \pm 2(PR + QS)\varepsilon^n$$
$$+ (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^{2m}).$$

Or on peut prendre le nombre ε assez petit pour que la somme des termes affectés des diverses puissances de ε dans la valeur de $P'^2 + Q'^2$ ait le même signe que le terme $\pm 2(PR+QS)\varepsilon^n$ (n° 372); de plus, on peut toujours faire en sorte que ce terme soit négatif, car il suffit de déterminer u de manière que u^n soit égal à $+1$, ou à -1, selon que la quantité $PR + QS$ est négative ou positive. Quand toutes ces conditions seront remplies, on aura

$$P'^2 + Q'^2 < P^2 + Q^2, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{P'^2 + Q'^2} < \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Nous avons supposé que la quantité $PR + QS$ n'était pas nulle; il faut donc encore examiner le cas où l'on aurait $PR + QS = 0$. Alors, au lieu de faire $u^n = \pm 1$ dans l'équation (3), on donnera à u une valeur telle, que l'on ait $u^n = \pm\sqrt{-1}$; il en résultera

$$P' + Q'\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1} \pm (R + S\sqrt{-1})\varepsilon^n\sqrt{-1} + \ldots,$$

d'où

$$P' = P \mp S\varepsilon^n + \ldots, \quad Q' = Q \pm R\varepsilon^n + \ldots;$$

et, par suite,

$$P'^2 + Q'^2 = P^2 + Q^2 \pm 2(QR - PS)\varepsilon^n + \ldots;$$

les termes qui suivent le terme en ε^n sont réels, et ne contiennent que des puissances de ε dont l'exposant est supérieur à n.

Comme on a, par hypothèse, $PR + QS = 0$, on ne pourra pas avoir $QR - PS = 0$; car, si ces deux égalités subsistaient en même temps, on en conclurait

$$(PR + QS)^2 + (QR - PS)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (P^2 + Q^2)(R^2 + S^2) = 0.$$

Par suite, on devrait avoir $P^2 + Q^2 = 0$, c'est-à-dire $P = 0$, $Q = 0$; ou bien $R^2 + S^2 = 0$, c'est-à-dire $R = 0$, $S = 0$; ce qui est contraire aux suppositions qui ont été établies.

La quantité $QR - PS$ n'étant pas nulle, on pourra prendre le nombre ε assez petit pour que la somme des termes affectés des diverses puissances de ε dans la valeur ci-dessus de $P'^2 + Q'^2$ ait le même signe que le premier terme $\pm 2(QR - PS)\varepsilon^n$. De plus, on pourra faire en sorte que ce terme soit négatif; car il suffira de déterminer u de manière que u^n soit égal à $+\sqrt{-1}$, ou à $-\sqrt{-1}$, selon que la quantité $QR - PS$ sera négative ou positive. Quand ces deux conditions seront remplies, on aura

$$\sqrt{P'^2 + Q'^2} < \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Des facteurs et des diviseurs des équations.

379. Théorème VI. — *Si* a *est une racine d'une équation* $X = 0$, *le premier membre de l'équation est divisible par le binôme* $x - a$.

Concevons que l'on divise le polynôme X par $x - a$; le diviseur ne contenant x qu'au premier degré, l'opération conduira à un reste indépendant de x, et le quotient ne renfermera point x en dénominateur. Nommons Q le quo-

tient et R le reste, on aura

$$X = (x - a) \times Q + R.$$

Si l'on fait dans cette égalité $x = a$, le premier membre deviendra nul, puisque, par hypothèse, a est racine de l'équation $X = 0$; le produit $(x - a) \times Q$ deviendra aussi nul, car le facteur $x - a$ est réduit à zéro, et le facteur Q ne peut pas devenir infini; d'ailleurs le reste R ne changera pas, puisqu'il est indépendant de x. Il suit de là que R est nul. Donc le polynôme X est divisible par $x - a$.

Scolie 1er. — Réciproquement, *lorsque le binôme* $x - a$ *divise le polynôme* X, a *est racine de l'équation* $X = 0$. Car on a, par hypothèse, $X = (x - a) \times Q$, le quotient Q étant entier par rapport à x; or, si l'on fait dans cette égalité $x = a$, le second membre devient nul; le premier membre doit donc aussi être réduit à zéro.

Scolie II. — Quelle que soit la quantité a, lorsqu'on fait $x = a$, dans les deux membres de l'égalité ci-dessus, $X = (x - a) \times Q + R$, le produit $(x - a) \times Q$ est réduit à zéro, et le reste R ne change pas. Donc *le reste* R *est égal à la valeur que prend le polynôme* X *lorsqu'on remplace* x *par* a. Cette dernière proposition renferme le théorème VI; car, lorsque a est racine de l'équation $X = 0$, le résultat de la substitution de a à la place de x dans X étant zéro, le reste de la division de X par $x - a$ est aussi zéro; le polynôme X est donc divisible par $x - a$.

380. Dans le *Traité de la résolution des équations numériques*, Lagrange démontre le théorème VI comme il suit :

Soit l'équation générale

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Si a est une racine de cette équation, on aura l'égalité

$$a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} a + A_m = 0.$$

En tirant de cette égalité la valeur de A_m, et en la reportant

dans le premier membre de l'équation (1), ce polynôme devient

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x$$
$$- a^m - A_1 a^{m-1} - A_2 a^{m-2} - \ldots - A_{m-1} a,$$

ou bien

$$x^m - a^m + A_1 (x^{m-1} - a^{m-1}) + A_2 (x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + A_{m-1} (x - a).$$

Mais $x - a$ divise exactement chacun des binômes $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc. (n° 71). Le premier membre de l'équation (1) est donc aussi divisible par $x - a$.

Pour obtenir le quotient, il suffit d'effectuer la division de chacun des binômes $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc., par $x - a$, et d'ajouter ensuite les quotients partiels, en multipliant le second quotient par A_1, le troisième par A_2, etc.; on trouve ainsi le résultat ci-dessous :

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} + a^3 & x^{m-4} \ldots + a^{m-1} \\
\quad + A_1 & \quad + A_1 a & \quad + A_1 a^2 & \quad \ldots + A_1 a^{m-2} \\
 & \quad + A_2 & \quad + A_2 a & \quad \ldots + A_2 a^{m-3} \\
 & & \quad + A_3 & \quad \ldots + A_3 a^{m-4} \\
 & & & \quad \ldots \\
 & & & \quad \ldots \\
 & & & \quad + A_{m-1}.
\end{array}$$

On obtient le coefficient de chaque terme du quotient, à partir du second, en multipliant le coefficient du terme précédent par a, *et en ajoutant au produit le coefficient du terme qui a, dans le polynôme proposé, le même rang que le terme du quotient que l'on veut former.* Le coefficient du premier terme du quotient est le même que celui du premier terme du polynôme proposé.

381. Quelle que soit la quantité a, le premier membre de l'équation (1) peut être écrit sous cette forme

$$x^m - a^m + A_1 (x^{m-1} - a^{m-1}) + A_2 (x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + A_{m-1} (x - a)$$
$$+ a^m \quad + A_1 a^{m-1} \quad + A_2 a^{m-2} \ldots + A_{m-1} a + A_m.$$

Cette expression est formée de deux parties, dont l'une est divisible par $x - a$, et l'autre est indépendante de x; celle-ci exprime donc le reste de la division du polynôme proposé par $x - a$. On est ainsi ramené à la conclusion qui a été établie dans le scolie II ci-dessus.

Au reste, on peut aussi établir les divers principes contenus dans les trois numéros précédents, en effectuant la division du polynôme $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} +$ etc. par le binôme $x - a$.

382. Théorème VII. — *Une équation du degré m a m racines réelles ou imaginaires, et elle n'en a pas un plus grand nombre.*

Représentons l'équation proposée par $X = 0$. D'après le théorème V, cette équation a une racine réelle ou imaginaire. Nommons a cette racine; le premier membre sera divisible par $x - a$, et le quotient sera un polynôme du degré $m - 1$; on aura donc

$$X = (x - a)(x^{m-1} + \ldots).$$

Si l'on égale à zéro le polynôme $x^{m-1} +$ etc., on obtiendra une équation qui aura aussi une racine. Nommons b cette racine; le polynôme $x^{m-1} +$ etc. sera divisible par $x - b$, et le quotient sera un polynôme du degré $m - 2$; de sorte que l'on aura, à cause de l'égalité ci-dessus,

$$X = (x - a)(x - b)(x^{m-2} + \ldots).$$

Si l'on égale à zéro le polynôme $x^{m-2} +$ etc., il en résultera une équation qui admettra une racine c; le polynôme $x^{m-2} +$ etc. sera divisible par $x - c$; le quotient sera du degré $m - 3$, et l'égalité précédente deviendra

$$X = (x - a)(x - b)(x - c)(x^{m-3} + \ldots).$$

On pourra continuer ainsi jusqu'à ce que le dernier quotient soit un binôme du premier degré $x - k$; et il en

résultera

$$X = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k).$$

Mais, d'après cette égalité, le polynôme X sera réduit à zéro si l'on met à la place de x une des m valeurs a, b, $c, \ldots, k$; donc l'équation $X = 0$ a m racines. Elle n'admet que les m racines a, b, $c, \ldots, k$; car, si elle en avait d'autres, le polynôme X pourrait être décomposé de plusieurs manières en facteurs du premier degré; et cela est impossible (n° 363) (*).

Il peut arriver que quelques-uns des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., soient égaux; dans ce cas on dit que l'équation $X = 0$ a des racines égales. Par exemple, si le polynôme X a trois facteurs égaux à $x - a$, on dit que l'équation a trois racines égales à a. C'est dans ce sens qu'on doit entendre qu'une équation du degré m a toujours m racines.

(*) On peut prouver, indépendamment de la proposition du n° 363, qu'une équation du degré m n'a pas plus de m racines. En effet, reprenons l'égalité

$$X = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k).$$

Si l'on donne à x une valeur α différente de chacune des quantités $a, b, c, \ldots, k$, aucun des facteurs du second membre n'étant nul, leur produit ne sera pas nul (n° 205); donc α ne sera pas racine de l'équation $X = 0$. S'il y a des racines égales, en sorte qu'on ait $X = (x-a)^n (x-b)^p$ etc., le polynôme X ne pourra être égal à aucun autre produit formé des mêmes facteurs avec des exposants différents. Car soit, s'il est possible,

$$(x - a)^n (x - b)^p \ldots = (x - a)^{n'} (x - b)^{p'} \ldots.$$

Si l'on suppose $n > n'$, on pourra diviser les deux membres par $(x - a)^{n'}$, et il viendra

$$(x - a)^{n-n'} (x - b)^p \ldots = (x - b)^{p'} \ldots.$$

Or, le premier membre de cette dernière égalité est réduit à zéro par l'hypothèse $x = a$, et il n'en est pas de même du second membre, puisque tous ses facteurs sont différents de $x - a$. L'égalité est donc impossible.

Une équation du degré m n'admet donc qu'un seul système de m racines égales ou inégales.

383. Si l'on multiplie entre eux les facteurs du premier degré du polynôme X, deux à deux, trois à trois, etc., les produits qu'on obtiendra seront des diviseurs de X. De plus, le polynôme n'admettra pas d'autres diviseurs que ceux qui résulteront de ces multiplications. Le nombre des diviseurs du deuxième degré est donc $\frac{m(m-1)}{1.2}$; celui des diviseurs du troisième degré est $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; etc.

384. Théorème VIII. — *Lorsqu'une équation, dont les coefficients sont réels, admet une racine imaginaire* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *elle a aussi la racine conjuguée* $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Concevons que l'on substitue $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x dans le premier membre de l'équation; les termes dans lesquels $\beta\sqrt{-1}$ sera élevé à une puissance paire seront délivrés du symbole $\sqrt{-1}$, tandis que ce symbole se conservera dans tous les termes où la même quantité $\beta\sqrt{-1}$ sera élevée à une puissance impaire (n° 206); de sorte que, si l'on représente le résultat de la substitution par $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q seront des quantités réelles, P ne contiendra que des puissances paires de β, et Q ne contiendra que des puissances impaires de cette quantité.

Si l'on remplace dans la même équation x par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, le résultat ne différera du précédent qu'en ce que les puissances impaires de β auront des signes contraires; par conséquent, ce résultat sera $P - Q\sqrt{-1}$. Mais puisque, par hypothèse, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est racine de l'équation, il faut que l'expression $P + Q\sqrt{-1}$ soit zéro, ce qui exige que l'on ait séparément $P = 0$, $Q = 0$. L'expression $P - Q\sqrt{-1}$ sera donc aussi zéro; $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ sera donc une racine de l'équation.

Corollaire I. — Dans une équation dont les coefficients sont réels, les racines imaginaires sont en nombre pair.

Corollaire II. — Les facteurs correspondants aux racines imaginaires conjuguées d'une équation dont les coefficients sont réels, produisent des facteurs réels du second degré en x. Car les facteurs correspondants à deux racines imaginaires conjuguées étant $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$ et $x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$, le produit de ces deux facteurs est

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2, \quad \text{ou} \quad x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

On conclut de là que *le premier membre d'une équation de degré pair, dont les coefficients sont réels, est décomposable en facteurs réels du second degré.*

Si l'équation est de degré impair, elle a un facteur réel du premier degré (n° 375); et, en la divisant par ce facteur, on n'a plus à considérer qu'une équation de degré pair.

Relations entre les coefficients d'une équation et les racines.

385. Théorème IX. — *Dans une équation ramenée à la forme* $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + K = 0$ (*le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue étant l'unité*), *le coefficient du deuxième terme pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines. Le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits des racines deux à deux. Le coefficient du quatrième terme pris avec un signe contraire est égal à la somme des produits des racines trois à trois; ainsi de suite. Le dernier terme pris avec son signe, ou avec le signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair, est égal au produit de toutes les racines.*

Soient $a, b, c, \ldots, k$, les m racines de l'équation; le premier membre devra être identique avec le produit

$$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k).$$

Or, on a vu (n° 326) que, dans le produit de m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., le coefficient de x^{m-1} est la somme des quantités a, b, c, etc.; le coefficient de x^{m-2} est la somme des produits des mêmes quantités deux à deux; celui de x^{m-3} est la somme des produits de ces quantités trois à trois, etc.; et le dernier terme est le produit de toutes ces quantités. D'ailleurs, pour passer du produit des facteurs $x+a$, $x+b$, etc., à celui des facteurs $x-a$, $x-b$, etc., il suffit de changer les signes des quantités a, b, c, etc.; et par là les produits dans lesquels ces quantités entrent en nombre impair changent tous de signe, et ceux dans lesquels elles entrent en nombre pair ne changent pas. On conclut de là le théorème énoncé.

Scolie. — La proposition qui vient d'être établie donnant m équations entre les m racines et les coefficients, on pourrait penser qu'il y aura quelque avantage, pour déterminer les racines, à remplacer l'équation proposée par le système de ces m équations. Mais, comme les racines entrent toutes de la même manière dans ces équations, en sorte que celle que l'on a représentée par a, par exemple, exprime indifféremment l'une quelconque d'entre elles, il faudra nécessairement que, si l'on parvient à déduire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines; par conséquent, elle sera exactement semblable à l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a-b-c = A, \quad ab+ac+bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b+c$ et de bc,

déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

386. Il est souvent utile, pour faciliter la détermination des racines d'une équation, de faire subir à l'équation quelque transformation qui ait pour effet d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par une certaine quantité, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + K = 0.$$

Pour changer cette équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la première, augmentées d'une quantité h, on posera

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

la substitution de $y - h$ à la place de x dans l'équation (1) donnera l'équation cherchée.

En effectuant la substitution, il vient

$$(2) \quad (y-h)^m + A(y-h)^{m-1} + B(y-h)^{m-2} + \ldots + K = 0.$$

Il est facile de reconnaître à posteriori que cette équation satisfait à la condition proposée; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans l'équation (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans l'équation (2); par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un pro-

duit de facteurs du premier degré; car, si $a, b, c, \ldots, k$ sont les racines, le premier membre sera équivalent au produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution seront donc $a+h, b+h, \ldots, k+h$.

387. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper, qu'en ce que h doit être une quantité négative; si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\quad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2} + \ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad + A & \quad + (m-1)Ah & \quad + Ah^{m-1} \\ & \quad + B & \quad + Bh^{m-2} \\ & & \quad \vdots \\ & & \quad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Ainsi, pour transformer une équation en une autre qui manque du second terme, il faut remplacer l'inconnue x par une autre inconnue y à laquelle on ajoute le coefficient A du second terme dans l'équation proposée, pris en signe contraire et divisé par le degré de l'équation. Les racines de l'équation transformée sont alors égales à celles de la proposée augmentées de $\frac{A}{m}$.

On peut s'expliquer cette règle par celles qui ont été exposées relativement à la composition des coefficients avec les racines. Lorsque les racines sont toutes augmentées de $\frac{A}{m}$, leur somme est augmentée de $m \times \frac{A}{m}$, ou de A; mais cette somme était d'abord égale à $-A$; la somme des racines de la nouvelle équation est donc égale à zéro. Le coefficient du second terme doit donc être nul.

Si l'on voulait faire disparaître le troisième terme de l'équation (4), on égalerait le coefficient de ce terme à zéro, ce qui donnerait une équation du second degré, d'où l'on tirerait deux valeurs de h. L'évanouissement du quatrième terme dépendrait d'une équation du troisième degré, etc.; et si l'on voulait faire évanouir le dernier terme, on aurait à résoudre une équation toute semblable à la proposée.

Il est facile de s'expliquer cette dernière particularité; car, lorsque le dernier terme de l'équation (4) sera nul, une des racines de cette équation sera égale à zéro; or ces racines sont celles de la proposée, diminuées de h; par conséquent, pour que l'une d'elles soit nulle, il faut et il suffit que h soit une des racines de l'équation proposée.

388. Pour donner un exemple de l'évanouissement du second terme, prenons l'équation

$$(5) \qquad x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0.$$

Il faudra remplacer x par $y-1$; ce qui donnera

$$y^6 - 9y^3 + y^2 - 9 = 0.$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$(y^2 - 9)(y^3 + 1) = 0;$$

alors on voit qu'elle se partage en deux autres, savoir :

$$y^2 - 9 = 0, \quad y^3 + 1 = 0.$$

On conclut de la première $y = +3$ et $y = -3$; et la seconde donne (n° 212)

$$y = -1, \quad y = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \quad y = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Il suit de là que l'équation (5) a trois racines réelles et deux racines imaginaires; et d'après la relation $x = y - 1$, ces racines sont

$$x = 2, \quad x = -4, \quad x = -2,$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad x = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

Dans cet exemple, l'équation transformée ne contient ni la quatrième puissance de l'inconnue, ni la première. Mais on ne doit pas généralement compter sur la possibilité de faire évanouir à la fois plusieurs termes; et, quand il manque des termes, si l'on fait évanouir un de ceux que l'équation contient, il arrive le plus ordinairement que cette transformation fait reparaître les termes qui manquaient d'abord.

389. Pour transformer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée multipliées par une même quantité h, on posera $y = hx$, d'où $x = \frac{y}{h}$; la substitution de $\frac{y}{h}$ à la place de x donnera l'équation

demandée. Si les racines devaient être divisées par h, on poserait $y = \frac{x}{h}$, d'où $x = hy$.

390. Pour transformer une équation donnée en une autre dont les racines soient égales à celles de la première prises avec des signes contraires, il faut remplacer x par $-y$.

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + K = 0.$$

Si m est un nombre pair, la substitution de $-y$ à la place de x changera les signes de tous les termes de rangs pairs, à partir du premier, et les termes de rangs impairs ne changeront pas. Si m est impair, les termes de rangs impairs changeront de signes, et les termes de rangs pairs ne changeront pas; mais alors il faudra changer les signes de tous les termes dans l'équation résultante, afin que le premier terme devienne positif. Par conséquent, si l'équation est complète, c'est-à-dire si elle renferme tous les termes que son degré comporte, on changera les signes des racines en changeant seulement les signes des termes de rangs pairs. La même chose a encore lieu lorsqu'il manque des termes, si les exposants de l'inconnue sont alternativement pairs et impairs.

391. Lorsqu'une équation ramenée à la forme ordinaire a tous ses termes de même signe, elle ne peut admettre aucune racine positive; car la substitution d'une valeur positive à la place de x, dans le premier membre, donne une somme de quantités positives qui ne peut être nulle.

Une équation complète dont les termes sont alternativement positifs et négatifs n'a aucune racine négative; car, après le changement des signes des termes de rangs pairs, tous les termes étant positifs, la transformée n'a aucune racine positive.

Quand une équation a toutes ses racines réelles et positives, elle est complète et ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Quand toutes les racines sont réelles et négatives, l'équation est complète et tous ses termes sont positifs. Cela résulte évidemment de la proposition du n° 385.

Quand une équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue, les racines ne diffèrent deux à deux que par les signes; car, la substitution de $-y$ à la place de x n'apportant aucun changement dans l'équation, il faut que les racines ne soient pas changées quand on les prend toutes avec des signes contraires; par conséquent, s'il y a une racine $+a$, il y a aussi la racine $-a$. On parvient également à cette conclusion en remarquant que, si l'on pose $x^2 = y$, l'équation sera ramenée à une autre de degré sous-double, et pour chaque valeur de y on obtiendra deux valeurs de x qui différeront seulement par le signe.

Réciproquement, lorsque les racines d'une équation ne diffèrent deux à deux que par les signes, l'équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue. En effet, les racines pouvant être exprimées par

$$+a, \quad -a, \quad +b, \quad -b, \quad +c, \quad -c, \ldots,$$

le premier membre de l'équation est le produit des facteurs

$$x-a, \quad x+a, \quad x-b, \quad x+b, \quad x-c, \quad x+c, \ldots;$$

donc il est égal au produit des facteurs du second degré.

$$x^2-a^2, \quad x^2-b^2, \quad x^2-c^2, \ldots$$

Comme ceux-ci ne contiennent que des puissances paires de x, il en est nécessairement de même de leur produit.

Règle des signes, de Descartes.

392. Lorsque l'on considère une suite de termes affectés

des signes + et —, les changements de signe qui ont lieu d'un terme au suivant se nomment *variations*; et l'on dit qu'il y a *permanence* toutes les fois que les signes des deux termes consécutifs sont les mêmes. Ainsi, dans l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$$

il y a trois *variations*, qui sont du premier terme au deuxième, du troisième au quatrième, et du quatrième au cinquième. Il y a deux *permanences* : une du deuxième terme au troisième, l'autre du cinquième au sixième.

Il est clair que, dans toute équation complète, le nombre des variations et des permanences est égal au degré.

La proposition qu'on nomme *la règle des signes*, de Descartes, consiste dans le théorème ci-après.

393. Théorème x. — *Dans une équation complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations* (*).

Supposons qu'on ait d'abord formé le produit des facteurs correspondants aux racines imaginaires et aux racines négatives de l'équation; il ne s'agira plus, pour obtenir le premier membre, que de multiplier successivement ce produit par tous les facteurs correspondants aux racines positives. Le théorème énoncé sera donc démontré si l'on fait voir que, lorsqu'on multiplie un polynôme par un facteur $x - a$ dans lequel a est positif, le produit contient au moins une variation de plus que le multiplicande.

Soit le polynôme

$$x^m + \ldots \pm Nx^{m-n} - \ldots + Px^{m-p} + \ldots \pm Qx^{m-q} \ldots \pm R;$$

(*) On énonçait habituellement la règle des signes comme il suit : *Dans toute équation, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations, et le nombre des racines négatives ne peut pas surpasser le nombre des permanences.* Mais la seconde partie de cet énoncé est inexacte, si l'on n'ajoute pas que les termes de l'équation sont alternativement de degré pair et de degré impair, tandis que la première partie n'exige pas cette restriction.

Supposons que, s'il se trouve des termes entre x^m et $-Nx^{m-n}$, ils ont tous le signe $+$; que s'il y en a entre $-Nx^{m-n}$ et $+Px^{m-p}$, ils ont tous le signe $-$; que depuis $+Px^{m-p}$ jusqu'à $\pm Qx^{m-q}$ les signes changent un nombre quelconque de fois; et que depuis le terme $\pm Qx^{m-q}$, de signe contraire à celui qui le précède, jusqu'au dernier terme $\pm R$, tous les termes ont le même signe. Chacun des groupes composés alternativement de termes positifs et de termes négatifs pouvant d'ailleurs se réduire à un seul terme.

Multiplions ce polynôme par $x-a$; l'opération sera telle qu'on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
x^m \ldots - Nx^{m-n} \ldots\ldots + Px^{m-p} \ldots\ldots \pm Qx^{m-q} \ldots\ldots \pm R \\
x - a \\
\hline
x^{m+1} \quad -N \,\Big|\, x^{m-n+1} \ldots + P \,\Big|\, x^{m-p+1} \ldots \pm Q \,\Big|\, x^{m-q+1} \ldots \pm Rx \\
\qquad\quad - \,\Big|\, \qquad\qquad + \,\Big|\, \qquad\qquad \pm \,\Big|\, \qquad\qquad \mp Ra \\
\hline
x^{m+1} \quad -N'x^{m-n+1} \ldots + P'x^{m-p+1} \ldots \pm Q'x^{m-q+1} \ldots\ldots \mp Ra.
\end{array}$$

D'après les suppositions qui ont été établies sur les signes des termes du multiplicande, les termes du produit de ce polynôme par $-a$ dans lesquels les exposants de x seront $m-n+1$, $m-p+1$, $m-q+1$, auront, s'ils ne sont point nuls, les mêmes signes que les termes affectés des mêmes exposants de x dans le produit du multiplicande par x; par suite, les termes affectés de ces exposants dans le produit total auront aussi les mêmes signes.

Cela posé, dans le multiplicande il n'y a qu'une seule variation depuis le premier terme x^m jusqu'au terme $-Nx^{m-n}$, et dans le produit il y a au moins une variation depuis le premier terme x^{m+1} jusqu'au terme $-N'x^{m-n+1}$, puisque ces deux termes ont des signes différents. De même, il n'y a qu'une seule variation dans le multiplicande, depuis le terme $-Nx^{m-n}$ jusqu'au terme $+Px^{m-p}$, et il

s'en trouve au moins une entre les termes $-N'x^{m-n+1}$ et $+P'x^{m-p+1}$ du produit. On voit par là que le nombre des variations qui se trouvent dans le produit, jusqu'au terme $\pm Q'x^{m-q+1}$, est au moins égal au nombre des variations qui se trouvent dans le multiplicande jusqu'au terme $\pm Qx^{m-q+1}$. Mais, à partir de ce terme, le multiplicande ne contient plus aucune variation, et il s'en trouve au moins une dans le produit, du terme $\pm Q'x^{m-q+1}$ au dernier terme $\mp Ra$. Le produit contient donc au moins une variation de plus que le multiplicande.

394. Lorsque la multiplication par un facteur correspondant à une racine positive introduit plusieurs variations, elle en introduit toujours un nombre impair. En effet, supposons d'abord que le dernier terme du multiplicande ait le signe $+$; il faudra que, si les signes changent, ils changent un nombre pair de fois, c'est-à-dire que le nombre des variations du multiplicande sera zéro ou un nombre pair; mais, dans ce cas, le dernier terme du produit aura le signe $-$; par conséquent, le nombre des variations du produit sera impair. Si, au contraire, le dernier terme du multiplicande a le signe $-$, il y aura dans ce polynôme un nombre impair de variations; dans ce cas, le dernier terme du produit aura le signe $+$; par conséquent, le nombre de ses variations sera pair. Le nombre des variations du produit différera donc toujours du nombre des variations du multiplicande d'un nombre impair.

D'un autre côté, puisqu'une équation dont le dernier terme est négatif a toujours une racine positive (nos 375 et 376), le produit des facteurs correspondants aux racines négatives et aux racines imaginaires doit avoir son dernier terme positif; par conséquent, s'il y a des variations dans ce produit, il y en a un nombre pair. Donc, puisque chacun des facteurs correspondants aux racines positives introduit

un nombre impair de variations, *si le nombre des variations est plus grand que le nombre des racines positives, il le surpasse d'un nombre pair.*

395. Comme les racines d'une équation changent toutes de signe quand on change x en $-x$, il résulte du théorème précédent que *le nombre des racines négatives d'une équation ne peut surpasser le nombre des variations de l'équation transformée qu'on obtient en remplaçant* x *par* — x.

Lorsque les termes de l'équation sont alternativement de degré pair et de degré impair, le changement de x en $-x$ ne fait que changer les signes des termes de rangs pairs (n° 390), et par là les variations deviennent des permanences, et *vice versâ*. Donc, dans ce cas, *le nombre des racines négatives ne peut surpasser le nombre des permanences.*

La même chose n'a plus lieu quand deux exposants consécutifs sont tous deux pairs, ou tous deux impairs. Ainsi l'équation $x^5 - 2x + 1 = 0$ n'offre pas de permanence; cependant elle a au moins une racine négative (n° 375).

396. Soient ν le nombre des variations d'une équation, ν' le nombre des variations de la transformée qu'on obtient en changeant x en $-x$. Le nombre des racines réelles de l'équation ne pourra pas surpasser $\nu+\nu'$. Donc, si cette somme est moindre que le degré m, l'équation aura des racines imaginaires.

Soit, par exemple, l'équation $x^5 - 2x + 1 = 0$. On a $\nu = 2$, et en changeant x en $-x$, on trouve $\nu' = 1$; donc $\nu + \nu' = 3$. Il y a donc au moins deux racines imaginaires.

La somme $\nu + \nu'$ n'est jamais plus grande que le degré, et, quand elle est moindre, la différence est un nombre pair.

En effet, quand l'équation est complète, la somme $\nu+\nu'$

est égale au nombre des variations et des permanences, lequel est égal au degré; il ne s'agit donc que d'examiner le cas où il manque des termes. Or, si l'on considère une suite de $p+1$ termes consécutifs, telle que

$$\pm Nx^n \pm Px^{n-1} \ldots \pm Sx^{n-p+1} \pm Tx^{n-p},$$

cette suite de termes donnera dans la proposée et dans la transformée p variations. Si l'on supprime tous les termes de cette suite, à l'exception du premier $\pm Nx^n$ et du dernier $\pm Tx^{n-p}$, il y aura deux cas à distinguer : celui où p sera pair, et celui où p sera impair. Dans le premier cas, lorsqu'on changera x en $-x$, les deux termes $\pm Nx^n$ et $\pm Tx^{n-p}$ changeront tous deux de signe, ou ils n'en changeront ni l'un ni l'autre; donc, s'ils ont des signes différents, ils donneront dans la proposée et dans la transformée deux variations; et s'ils ont le même signe, ils n'en donneront aucune. Dans le second cas, lorsqu'on changera x en $-x$, l'un des deux termes gardera son signe et l'autre en changera; par conséquent, s'ils donnent une variation dans la proposée, ils n'en donneront pas dans la transformée, et *vice versâ*.

Il suit de là que, si p est un nombre pair, après la suppression de tous les termes compris entre $\pm Nx^n$ et $\pm Tx^{n-p}$, la somme $\nu+\nu'$ sera égale à $m-(p-2)$, ou à $m-p$, suivant que les deux termes $\pm Nx^n$ et $\pm Tx^{n-p}$ auront des signes différents, ou le même signe; et que, si p est un nombre impair, la somme $\nu+\nu'$, après la suppression des termes compris entre $\pm Nx^n$ et $\pm Tx^{n-p}$, sera égale à $m-p+1$. Donc, dans une équation incomplète, la somme $\nu+\nu'$ est toujours au plus égale au degré, et quand elle est moindre, elle en diffère d'un nombre pair.

S'il ne manque qu'une seule puissance de x, on a $p=2$; et si les deux termes dont les degrés comprennent celui de la puissance qui manque ont des signes contraires, la

somme $\nu + \nu'$ étant égale à m, l'équation pourra avoir toutes ses racines réelles; mais s'il manque une puissance de x entre deux termes de même signe, il y aura au moins deux racines imaginaires (*).

397. *Quand toutes les racines d'une équation sont réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la transformée qu'on obtient en changeant* x *en* — x.

En effet, soient ν le premier nombre de variations, ν' le second, p le nombre des racines positives, n celui des racines négatives, et m le degré de l'équation. Puisque toutes les racines sont réelles, on a $p + n = m$, et puisque la somme $p + n$ ne peut surpasser la somme $\nu + \nu'$, qui est au plus égale à m, il faut que l'on ait

$$\nu + \nu' = m, \quad \text{donc} \quad \nu + \nu' = p + n.$$

Cela posé, si p était moindre que ν, il faudrait que l'on eût $n > \nu'$, ce qui ne se peut. On a donc $p = \nu$ et $n = \nu'$.

(*) M. Sturm a déduit de la règle des signes la conséquence suivante : quand la multiplication du premier membre d'une équation par un facteur $x - a$, dans lequel a est une quantité positive, introduit $2k + 1$ variations, ou quand la multiplication par $x + a$ en fait disparaître $2k$, l'équation a au moins $2k$ racines imaginaires. En effet, soit ν le nombre des variations d'une équation $f(x) = 0$, du degré m, et $\nu' = \nu + 2k + 1$ le nombre des variations du produit $f(x)(x - a) = \varphi(x)$; l'équation $\varphi(x) = 0$, dont le degré est $m + 1$, a au plus $m + 1 - \nu'$ racines négatives; or les racines négatives de $\varphi(x) = 0$ sont les mêmes que celles de $f(x) = 0$; et, puisque celle-ci a seulement ν variations, elle a au plus ν racines positives; elle a donc au plus $\nu + m + 1 - \nu'$ ou $m - 2k$ racines réelles. A l'égard de la multiplication par $x + a$, si le nombre des variations du produit $f(x)(x + a)$ est $\nu - 2k$ (*), l'équation $f(x) = 0$ a au plus $\nu - 2k$ racines positives; mais, puisque ν est le nombre des variations de cette équation, elle a au plus $m - \nu$ racines négatives. Le nombre des racines réelles est donc au plus $m - 2k$.

(*) Il est facile de reconnaître que la différence entre le nombre des variations du produit $f(x)(x + a)$ et celui des variations de $f(x)$ est un nombre pair, et que le premier nombre ne peut pas surpasser le second.

Si l'équation est complète, le nombre des variations de la transformée est égal au nombre des permanences de la proposée. Ainsi, dans ce cas, lorsque toutes les racines sont réelles, le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.

398. Lorsque toutes les racines sont réelles, on peut connaître, au moyen de la règle des signes, de Descartes, le nombre des racines qui sont comprises entre deux nombres donnés a et b. Si l'on diminue toutes les racines de a, en posant $y = x - a$ (n° 387), d'où $x = y + a$, l'équation en y aura aussi toutes ses racines réelles, et le nombre de ses racines positives sera égal au nombre de ses variations. Or le nombre des racines positives de l'équation en y est celui des racines plus grandes que a de l'équation proposée. On connaîtra de même le nombre des racines de l'équation proposée plus grandes que b, en faisant $x = y + b$; et si $a < b$, en retranchant le nombre des racines plus grandes que b de celui des racines plus grandes que a, la différence sera le nombre des racines comprises entre a et b.

Quand on fait $x = y + a$, l'équation résultante en y est

$$f(a) + f'(a)\,y + \frac{f''(a)}{1.2}\,y^2 + \ldots = 0.$$

Donc, si l'on écrit les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$, et si l'on fait dans toutes ces fonctions $x = a$, le nombre des variations de la suite des signes des résultats de cette substitution sera le nombre des racines plus grandes que a de $f(x) = 0$. En faisant ensuite $x = b$, dans les mêmes fonctions, le nombre des variations de la suite des signes des résultats de cette seconde substitution sera le nombre des racines plus grandes que b. Donc la différence de ces deux nombres de variations sera le nombre des racines comprises entre a et b (*).

(*) La proposition du n° 398 a été indiquée par M. Budan. Ce géomètre

399. Si l'on pose $y = \frac{x-a}{b-x}$, les valeurs positives de y résulteront des valeurs de x comprises entre a et b, et seront en même nombre que ces valeurs. Donc, en formant l'équation en y, le nombre des variations de cette équation sera, dans tous les cas, une limite supérieure du nombre des racines de la proposée comprises entre a et b; et il lui sera égal, si toutes les racines sont réelles. Cette remarque est de M. Jacobi.

---

n'a pas seulement considéré le cas où toutes les racines sont réelles; il a démontré, de plus, que, dans tous les cas, *le nombre des racines comprises entre* a *et* b *ne peut pas surpasser la différence des nombres de variations de la transformée en* y + a *et de la transformée en* y + b; *et que, lorsqu'il est moindre que cette différence, il est moindre d'un nombre pair.* Fourrier est parvenu au même théorème, sans le faire résulter de la règle des signes, et en considérant, au lieu des transformées en $y+a$ et $y+b$, la suite des fonctions $f(x)$, $f'(x)$.... On verra plus loin quelle est l'utilité de ce théorème dans la recherche des racines, et ce qu'il fallait y ajouter pour le rendre susceptible d'une application entierement générale.

CHAPITRE QUATORZIÈME.

RECHERCHE DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE INCONNUE.

Des limites des racines.

400. Les méthodes par lesquelles on obtient les racines réelles d'une équation ne sont, à proprement parler, qu'une suite de tâtonnements bien dirigés, et la première question à résoudre pour restreindre ces tâtonnements est de trouver des nombres entre lesquels on soit assuré que toutes les racines sont comprises; c'est-à-dire, des *limites* des racines.

Si l'on détermine un nombre tel, qu'en mettant ce nombre, ou tout nombre plus grand, à la place de x, dans le premier membre d'une équation, on ait un résultat positif, il est clair que ce nombre sera une limite supérieure des racines.

Soit l'équation

$$x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \ldots \pm K = 0,$$

le premier terme x^m étant positif, et les autres termes pouvant avoir indifféremment le signe $+$ ou le signe $-$.

Désignons par N la valeur absolue du plus grand coefficient négatif; on rendra le premier membre de l'équation positif si l'on satisfait à l'inégalité

$$x^m > Nx^{m-1} + Nx^{m-2} + \ldots + Nx + N.$$

Or le polynôme $Nx^{m-1} + Nx^{m-2} \ldots + Nx + N$ est la même chose que $N(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1)$, ou $\frac{N(x^m - 1)}{x - 1}$. La condition ci-dessus est donc

$$x^m > \frac{N(x^m - 1)}{x - 1}.$$

Celle-ci sera vérifiée si l'on a $x - 1 = N$ ou $x - 1 > N$; car alors le quotient de N par $x - 1$ sera égal à 1 ou moindre que 1; et comme x^m est plus grand que $x^m - 1$, le premier membre sera plus grand que le second. Mais, de $x - 1 =$ ou $> N$ on conclut

$$x = \text{ ou } > 1 + N.$$

Donc, *dans toute équation, on a une limite supérieure des racines, en ajoutant l'unité à la valeur absolue du plus grand coefficient négatif.*

401. Quand le terme du degré immédiatement inférieur à celui de l'équation n'est pas négatif, on peut obtenir une limite moindre que la précédente. Soit l'équation

$$x^m \ldots - F x^{m-n} \pm G x^{m-n-1} \ldots \pm K = 0,$$

le terme $-Fx^{m-n}$ étant le premier terme négatif, et les termes suivants pouvant être indifféremment positifs ou négatifs.

Désignons encore par N la valeur absolue du plus grand coefficient négatif; on rendra le premier membre de l'équation positif si l'on satisfait à l'inégalité

$$x^m > N x^{m-n} + N x^{m-n-1} \ldots + N, \quad \text{ou} \quad x^m > N \frac{x^{m-n+1} - 1}{x - 1}.$$

Si l'on suppose $x > 1$, il suffira que l'on ait

$$x^m > \frac{N x^{m-n+1}}{x - 1}, \quad \text{ou} \quad x^{n-1}(x - 1) > N.$$

D'ailleurs la dernière condition sera évidemment remplie si l'on a

$$(x - 1)^{n-1}(x - 1) = \text{ ou } > N, \quad \text{ou bien} \quad (x - 1)^n = \text{ ou } > N;$$

d'où $$x = \text{ ou } > 1 + \sqrt[n]{N}.$$

Donc, *on a encore une limite supérieure des racines, en*

ajoutant l'unité à la racine de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, dont l'indice est la différence entre le degré de l'équation et l'exposant du premier terme négatif.

On doit observer toutefois que, si le coefficient N était plus petit que l'unité, la limite $1+N$ serait préférable à celle qu'on obtient par la dernière règle.

402. On peut encore trouver une limite supérieure des racines par le moyen suivant, qui a été indiqué par Newton :

Si l'on diminue toutes les racines de l'équation d'un même nombre h, et si l'on détermine h de manière que l'équation transformée n'ait aucune racine positive, ce nombre sera une limite supérieure des racines de la proposée.

Représentons l'équation proposée par $f(x)=0$. Pour diminuer toutes les racines d'une même quantité h, il faut poser $y=x-h$, d'où $x=y+h$; l'équation transformée est $f(y+h)=0$, ou

$$f(h)+f'(h)\,y+f''(h)\frac{y^2}{1.2}+f'''(h)\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots=0.$$

Cela posé, si l'on prend pour h un nombre tel, que tous les termes de cette équation soient positifs, elle n'aura aucune racine positive (n° 391). Ce nombre sera donc la limite cherchée.

Pour trouver ce nombre, on considérera d'abord la dérivée de l'ordre $m-1$ de $f(x)$, qui ne contient x qu'au premier degré, et on déterminera la plus petite valeur entière de x qui la rendra positive. On substituera cette valeur dans la dérivée de l'ordre $m-2$, et si le résultat est négatif, on augmentera la valeur de x successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre qui donne un résultat positif. On continuera ainsi pour toutes les fonctions successives jusqu'à $f(x)$.

Lorsqu'un nombre k rendra positives toutes les dérivées, depuis l'ordre $m-1$ jusqu'à l'ordre n, s'il faut augmenter ce nombre k d'une ou de plusieurs unités, en passant à la dérivée de l'ordre $n-1$, pour qu'elle soit aussi positive, on sera assuré que cette nouvelle valeur de x rendra encore positives toutes les dérivées depuis l'ordre $m-1$ jusqu'à l'ordre n; car, en considérant une dérivée d'ordre quelconque, on a

$$f^{(p)}(k+h)=f^{(p)}(k)+f^{(p+1)}(k)h+f^{(p+2)}(k)\frac{h^2}{1.2}+\ldots.$$

Donc, si $f^{(p)}(k)$, $f^{(p+1)}(k)$, $f^{(p+2)}(k)$, etc., sont des quantités positives, h étant aussi une quantité positive, $f^{(p)}(k+h)$ sera une quantité positive.

403. Quand l'équation proposée a toutes ses racines réelles, la méthode que nous venons d'exposer fait trouver la limite la plus approchée, en nombre entier, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine. Car, toutes les racines étant réelles, l'équation en y a aussi toutes ses racines réelles; par conséquent, pour qu'elle n'ait aucune racine positive, il faut que tous ses termes soient positifs. Or, en ne prenant dans les essais que des nombres entiers, on déterminera toujours le plus petit nombre entier qui fera prendre des valeurs positives au premier membre de l'équation et à ses dérivées.

404. Pour obtenir une limite inférieure des racines positives, on remplace x par $\frac{1}{y}$: si L est une limite supérieure des racines de l'équation en y, il est clair que $\frac{1}{L}$ est une limite inférieure des racines de l'équation en x.

En effectuant cette transformation sur une équation littérale, on reconnaît que l'on peut toujours prendre, pour limite inférieure des racines positives, la valeur absolue du

dernier terme, divisée par la somme qu'on obtient en ajoutant à la valeur absolue du dernier terme celle du plus grand coefficient de signe contraire au signe du dernier terme.

Pour trouver des limites des racines négatives, on remplace x par $-x$, et l'on cherche les limites des racines positives de la transformée.

405. On peut souvent tenir compte avec avantage, pour la détermination des limites, des différents termes positifs que l'équation renferme, en partageant les termes de l'équation en plusieurs groupes, comme on le voit dans les exemples suivants :

$$x^8 - 4x^7 + 13x^6 - x^5 - 18x^4 + 3x^2 - 100x + 1000 = 0;$$

on écrit cette équation comme il suit :

$$x^2(x-4) + 13x^4\left(x^2 - \tfrac{1}{13}x - \tfrac{18}{13}\right) + 3\left[\left(x - \tfrac{50}{3}\right)^2 + \tfrac{500}{9}\right] = 0.$$

On voit alors que le premier membre aura une valeur positive si l'on a $x = 4$ ou $x > 4$; car le binôme $x - 4$ sera positif; d'ailleurs le trinôme $x^2 - \frac{1}{13}x - \frac{18}{13}$ est positif pour toutes les valeurs de x qui surpassent $1 + \frac{18}{13}$, et la quantité $(x - \frac{50}{3})^2 + \frac{500}{9}$ est positive pour toutes les valeurs réelles de x. Le nombre 4 est donc une limite supérieure des racines. La règle du n° 400 donnerait pour limite 101.

Soit encore l'équation

$$2x^6 - 7x^5 + x^4 + 2x^3 - 60x - 48 = 0.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$2x^5\left(x - \tfrac{7}{2}\right) + x^4 + 2x^3 - 60x - 48 = 0.$$

Le binôme $x - \frac{7}{2}$ sera positif pour toute valeur de x plus grande que $\frac{7}{2}$; et, d'après la règle du n° 401, le polynôme $x^4 + 2x^3 - 60x - 48$ sera positif pour $x = 1 + \sqrt[3]{60}$, et

pour toute valeur plus grande de x. D'ailleurs $1+\sqrt[3]{60}$ est compris entre 4 et 5. Le nombre 5 est donc une limite supérieure des racines de l'équation.

On peut obtenir une limite moindre que 5; car le polynôme $x^4+2x^3-60x-48$ n'offrant qu'une seule variation, si x croissait à partir de zéro, la valeur du polynôme irait toujours en croissant et ne changerait de signe qu'une seule fois (n° 377). Or, on trouve qu'il est positif pour $x=4$; d'ailleurs le binôme $x-\frac{7}{2}$ est aussi positif pour $x=4$. Donc 4 est une limite supérieure des racines.

En faisant $x=3$ dans le polynôme $x^4+2x^3-60x-48$, on obtient un résultat négatif; par conséquent, ce polynôme sera aussi négatif pour toute valeur de x plus petite que 3. D'ailleurs $x-\frac{7}{2}$ est aussi négatif pour $x=3$, et pour toute valeur de x plus petite que 3. Donc le nombre 3 est une limite inférieure des racines positives de l'équation.

Si l'on a l'équation

$$x^8+x^7-2x^6-5x^5+120x^4-2x^3-8x^2+50x+60=0,$$

on pourra obtenir une limite inférieure de ses racines positives, en l'écrivant comme il suit :

$$60+50x-8x^2-2x^3+x^4(120-5x-2x^2)+x^7+x^8=0.$$

Il est aisé de prouver, en imitant la démonstration que nous avons donnée dans le n° 377, que, lorsqu'un polynôme, ordonné suivant les puissances croissantes de x, est composé d'un ou de plusieurs termes positifs suivis de termes tous négatifs, s'il est positif pour une valeur positive de x, il est aussi positif pour toute valeur positive plus petite. Or, les deux polynômes $60+50x-8x^2-2x^3$ et $120-5x-2x^2$ sont positifs pour $x=4$. Donc 4 est une limite inférieure des racines positives de l'équation.

En groupant les termes de cette autre manière

$$x^5(x^3+x^2-2x-5)+x^2(120x^2-2x-8)+50x+60=0,$$

on reconnaît que 2 est une limite supérieure des racines; par conséquent l'équation n'a aucune racine positive. Comme elle a quatre variations, elle a au moins quatre racines imaginaires.

406. Nommons X le polynôme $x^m + Ax^{m-1} +$ etc., et L la limite $1 + N$ ou $1 + \sqrt[n]{N}$ des racines de l'équation $X = 0$. Si l'on attribue à x des valeurs qui croissent à partir de L, la valeur du polynôme X croîtra avec celle de x; car, si l'on considère le premier terme x^m et l'ensemble des termes négatifs, ces termes formeront un polynôme qui sera positif pour $x = L$, et qui croîtra lorsque x croîtra à partir de cette limite (n° 377); et puisque les autres termes de X sont positifs et croissent avec x, le polynôme X croîtra aussi. La même chose a lieu en prenant pour L une limite obtenue par la décomposition du polynôme X en plusieurs groupes de termes de degrés décroissants, commençant chacun par un ou plusieurs termes positifs et dans lesquels les signes ne changent qu'une seule fois; puisque chacun de ces groupes croîtra lorsque x croîtra à partir de L. Il en est encore de même quand L est la limite de Newton (n° 402); car, si $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, etc., sont des quantités positives, et si k est aussi une quantité positive, on voit, par le développement de $f(h+k)$, que cette quantité augmentera lorsque k augmentera. Si L est une limite supérieure quelconque des racines de $X = 0$, et si toutes les racines sont réelles, le polynôme X croîtra constamment lorsque x croîtra à partir de L; car tous les facteurs du premier degré de ce polynôme croîtront; mais s'il y a des racines imaginaires, les facteurs réels qui leur correspondront étant de la forme $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, pour que l'on soit assuré que X croîtra lorsque x croîtra à partir de L, il ne suffira plus que le nombre L soit plus grand que

toutes les racines réelles, et il faudra qu'il soit aussi plus grand que les parties réelles des racines imaginaires.

Si l'on doit donner à x des valeurs négatives, dans le polynôme X, on changera x en $-x$; on pourra ensuite déterminer une quantité L′ telle, que, pour des valeurs croissantes à partir de L′, la valeur absolue du polynôme sera constamment croissante.

Méthode des racines commensurables.

407. Les racines commensurables peuvent être des nombres entiers ou des fractions. Nous allons d'abord nous occuper de la recherche des racines entières. Il suffirait, pour les trouver, de substituer successivement tous les nombres entiers compris entre les limites des racines; mais cette opération serait trop longue, et on a dû chercher les moyens de l'abréger. Nous considérerons seulement les équations dont les coefficients sont rationnels; dans ce cas, lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, les coefficients sont des nombres entiers. Soit l'équation générale

$$(1)\qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} \ldots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Si un nombre entier a est racine de cette équation, on aura l'égalité

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} \ldots + A_{m-2} a^2 + A_{m-1} a + A_m = 0;$$

d'où l'on conclut

$$(2)\qquad \frac{A_m}{a} = -A_0 a^{m-1} - A_1 a^{m-2} \ldots - A_{m-2} a - A_{m-1}.$$

Le second membre de cette égalité est un nombre entier; donc a doit être un diviseur de A_m.

Posons $\frac{A_m}{a} = Q_1$; on tirera de l'égalité précédente

$$(3)\qquad \frac{Q_1 + A_{m-1}}{a} = -A_0 a^{m-2} - A_1 a^{m-3} \ldots - A_{m-2};$$

donc a doit être un diviseur de $Q_1 + A_{m-1}$.

Soit $\frac{Q_1 + A_{m-1}}{a} = Q_2$; on trouvera

$$(4) \qquad \frac{Q_2 + A_{m-2}}{a} = -A_0 a^{m-3} - A_1 a^{m-4} \ldots;$$

donc a doit être aussi un diviseur de $Q_2 + A_{m-2}$.

En continuant ainsi, on parviendra enfin à la condition

$$(5) \qquad \frac{Q_{m-1} + A_1}{a} = -A_0.$$

Lorsque la dernière condition est vérifiée, le nombre a est racine de l'équation. En effet, si l'on divise les deux membres de l'équation (1) par x^m, elle devient

$$(6) \qquad \frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_{m-2}}{x^{m-2}} + \ldots + \frac{A_1}{x} + A_0 = 0.$$

Or, d'après les opérations par lesquelles on obtient les quotients Q_1, Q_2, etc., la quantité $\frac{Q_{m-1} + A_1}{a} + A_0$ est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le premier membre de l'équation (6) (n° 367); donc, si cette quantité est nulle, ce qui est la condition (5), l'équation (1) est vérifiée quand on fait $x = a$.

Ainsi, pour qu'une quantité entière a soit racine d'une équation dont les coefficients sont entiers, il faut et il suffit :

Que cette quantité soit un diviseur du dernier terme;

Que, si au quotient du dernier terme par a *on ajoute le coefficient de la première puissance de* x, *la somme divisée par* a *donne pour quotient un nombre entier;*

Que, si l'on ajoute à ce second quotient le coefficient de x^2, *la somme divisée par* a *donne pour quotient un nombre entier;*

Ainsi de suite;

Enfin que, lorsqu'on est parvenu au $(m-1)^{ième}$ *quotient, en lui ajoutant le coefficient de* x^{m-1}, *et divisant la somme par* a, *on ait un quotient égal au coefficient du premier terme pris en signe contraire.*

Quand l'équation est incomplète, il faut agir comme si elle était complète, en prenant zéro pour coefficient de chacune des puissances de x qui manquent.

408. Lorsque les conditions ci-dessus sont vérifiées, les quotients $Q_1, Q_2, \ldots - A_0$, pris en signe contraire et dans l'ordre inverse de celui dans lequel on les obtient, sont les coefficients du quotient du premier membre de l'équation (1) par $x - a$ (n° 380). Ce quotient, égalé à zéro, donne une équation du degré $m - 1$, au moyen de laquelle on détermine les autres racines. Comme l'équation proposée peut avoir plusieurs racines égales à a, il faut d'abord reconnaître, par le même mode d'épreuve, si cette quantité est ou n'est pas racine de la nouvelle équation; on passe ensuite aux autres diviseurs du dernier terme qui n'ont pas été essayés; en continuant ainsi, on détermine successivement toutes les racines entières et le degré de multiplicité de chacune d'elles.

On commence par substituer dans l'équation $+1$ et -1, qui sont toujours des diviseurs du dernier terme, et pour lesquels les opérations qui résultent des conditions ci-dessus ne diffèrent pas de la substitution directe. On doit aussi déterminer des limites des racines, afin de n'essayer que les diviseurs compris entre ces limites.

1er Exemple. $x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0.$

Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 4, 8, 16. La limite supérieure des racines, calculée d'après la règle du n° 401, est $1 + \sqrt[3]{20}$, qui est moindre que 4; et en changeant x en $-x$, on reconnaît que -5 est une limite des

racines négatives. On a donc à essayer $+1$, $+2$, -1, -2, -4.

$+1$ et -1 ne sont pas racines. $+2$ donne les résultats suivants :

$$Q_1 = -\frac{16}{+2} = -8, \qquad Q_2 = \frac{-8-20}{+2} = -14,$$

$$Q_3 = \frac{-14-16}{+2} = -15, \quad Q_4 = \frac{-15+7}{+2} = -7,$$

$$Q_5 = \frac{-7+5}{2} = -1.$$

$+2$ est racine, et la division de l'équation proposée par $x-2$ donne l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 14x + 8 = 0.$$

Celle-ci n'a plus aucune racine positive (n° 391). En essayant -2, on a

$$Q_1 = \frac{+8}{-2} = -4, \qquad Q_2 = \frac{-4+14}{-2} = -5,$$

$$Q_3 = \frac{-5+15}{-2} = -5, \quad Q_4 = \frac{-5+7}{-2} = -1.$$

-2 est racine, et la division de l'équation par $x+2$ donne l'équation du troisième degré

$$x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0.$$

En essayant de nouveau -2, on trouve que le quotient Q_2 est fractionnaire; donc -2 n'est pas racine. Pour -4, on a

$$Q_1 = \frac{+4}{-4} = -1, \quad Q_2 = \frac{-1+5}{-4} = -1,$$

$$Q_3 = \frac{-1+5}{-4} = -1.$$

-4 est racine, et la division de l'équation par $x+4$ donne

l'équation du second degré

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Celle-ci n'a que des racines imaginaires.

2e Exemple. $2x^3 - 53x + 105 = 0.$

Les nombres $+1$ et -1 ne sont point racines. Les limites sont $+\sqrt{\frac{53}{2}}$ et $-\left(1 + \sqrt{\frac{105}{2}}\right)$, et les diviseurs de 105 compris entre ces limites sont 3, 5 — 3, — 5 et — 7. Pour 3, on a

$$Q_1 = \frac{105}{3} = 35,\ Q_2 = \frac{35 - 53}{3} = -6,\ Q_3 = \frac{-6 + 0}{3} = -2.$$

Le nombre 3 est racine, et la division de l'équation par $x - 3$ donne l'équation du second degré

$$2x^2 + 6x - 35 = 0.$$

Les racines de celle-ci sont incommensurables.

409. Supposons maintenant qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit racine de l'équation (1). En substituant $\frac{a}{b}$ à la place de x, on aura

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + A_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \cdots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0;$$

d'où, en multipliant par b^m,

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} b + A_2 a^{m-2} b^2 \ldots + A_{m-1} a b^{m-1} + A_m b^m = 0.$$

b divise tous les termes du premier membre, à partir du second; donc il doit diviser $A_0 a^m$; et puisqu'il est premier avec a, il doit diviser A_0. Par une raison semblable, a doit diviser A_m.

Il résulte de cette proposition que les racines commen-

surables deviendraient toutes des nombres entiers, si l'on multipliait toutes les racines par le coefficient A_0 du premier terme. De sorte que, par cette transformation, la recherche des racines fractionnaires serait ramenée à celle des racines entières; mais on peut aussi trouver les racines fractionnaires en opérant directement sur l'équation proposée (*).

410. La fraction $\frac{a}{b}$ étant racine de l'équation, le premier membre est divisible par $x - \frac{a}{b}$, et le quotient est (n° 380)

$$\begin{array}{r|r|r}
A_0 x^{m-1} + A_0 \frac{a}{b} & x^{m-2} + A_0 \frac{a^2}{b^2} & x^{m-3} \ldots + A_0 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} \\
+ A_1 & + A_1 \frac{a}{b} & + A_1 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \\
 & + A_2 & \ldots\ldots\ldots \\
 & & + A_{m-1}
\end{array}$$

Représentons ce quotient par Q, et le premier membre de l'équation par X. On a

$$X = \left(x - \frac{a}{b}\right) \times Q, \quad \text{ou} \quad X = (bx - a) \times \frac{Q}{b}.$$

X est un polynôme entier; or, si $\frac{Q}{b}$ contenait des dénominateurs numériques, comme ces dénominateurs seraient

(*) On conclut aussi de la même proposition que, lorsque le coefficient du premier terme est l'unité, les racines commensurables ne peuvent être que des nombres entiers. D'un autre côté, il est facile de voir que, si l'on multiplie toutes les racines par A_0, il en résultera une transformée dans laquelle le coefficient du premier terme sera l'unité, tous les autres coefficients étant des nombres entiers. Dans les éditions antérieures à la quatrième, nous n'avions donné, pour la détermination des racines fractionnaires, que ces deux propositions, qui sont en effet suffisantes. Celles qui sont exposées dans les n°s 410 et 411 ont été communiquées par M. Richard, professeur de mathématiques spéciales au collége Louis-le-Grand.

premiers avec $bx - a$, le produit $(bx - a) \times \frac{Q}{b}$ ne pourrait être un polynôme entier (n° 352). Il faut donc que $\frac{Q}{b}$ soit un polynôme entier. Donc Q est pareillement un polynôme entier.

411. Concevons maintenant que l'on ait formé toutes les fractions positives et négatives ayant pour numérateurs les diviseurs du dernier terme, et pour dénominateurs les diviseurs du coefficient du premier terme; et soit $\frac{a}{b}$ une de ces fractions : pour reconnaître si elle est racine de l'équation $X = 0$, on multipliera le coefficient A_0 du premier terme par $\frac{a}{b}$, et on ajoutera au produit le coefficient A_1 de x^{m-1}; on multipliera la somme par $\frac{a}{b}$, et on ajoutera au produit le coefficient A_2 de x^{m-2}; ainsi de suite. Il faudra que tous les résultats qu'on obtiendra soient des nombres entiers, et que le dernier soit zéro (*).

Quand on aura obtenu une racine $\frac{a}{b}$, on connaîtra immédiatement le quotient de la division du premier membre de l'équation par $x - \frac{a}{b}$. Ce quotient, divisé par b, donnera celui de la division du polynôme X par $bx - a$; et en égalant celui-ci à zéro, on aura une équation de degré moindre, par laquelle on déterminera les autres racines.

(*) Au lieu d'essayer si $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation proposée, on pourrait remplacer dans cette équation x par $\frac{1}{x}$, et voir si $\frac{b}{a}$ est racine de la transformée. De cette manière, les conditions relatives aux racines fractionnaires seraient les mêmes que celles qui ont été établies dans le n° 407 pour les racines entières.

412. Le quotient de X par $bx - a$ étant un polynôme entier, il en résulte, en supposant $x = 1$ et $x = -1$, que, si $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation, le résultat de la substitution de 1 à la place de x dans X doit être divisible par $b - a$, et le résultat de la substitution de -1 doit être divisible par $b + a$. On examinera d'abord quelles sont, parmi les fractions formées comme nous l'avons dit plus haut, celles qui satisfont à ces deux conditions, et on rejettera les autres.

Pour les racines entières, il faudra supposer $b = 1$, en sorte que, si a est une de ces racines, $a - 1$ devra diviser le résultat de la substitution de $+1$, et $a + 1$ devra diviser le résultat de la substitution de -1.

3e Exemple. $6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16 = 0$.

On trouve la racine 2 répétée deux fois, et les deux racines $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$; les deux autres racines sont imaginaires.

4e Exemple. $15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$.

On trouve les racines $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{5}$; les deux autres sont incommensurables.

Théorie des racines égales.

413. Lorsqu'une équation a des racines égales, on peut ramener la résolution de cette équation à celle de plusieurs autres équations plus simples, dans lesquelles chaque racine ne se trouve qu'une seule fois. Tel est l'objet des propositions que nous allons exposer.

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Hx + K = 0.$$

Représentons par $f(x)$ le premier membre de cette équation, et par $f'(x)$ sa fonction dérivée, ou le polynôme

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots + H.$$

Le polynôme $f'(x)$ est le coefficient de la première puissance de y dans le résultat que l'on obtient en écrivant $x+y$ au lieu de x dans le polynôme $f(x)$; or, en représentant les racines de l'équation par $a, b, c, \ldots, k$, on a

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k);$$

donc, en écrivant $x+y$ au lieu de x,

$$f(x+y) = (y+x-a)(y+x-b)(y+x-c)\ldots(y+x-k).$$

On peut regarder le second membre de la dernière égalité comme le produit de m facteurs binômes qui ont pour premier terme y, et dont les seconds termes sont $x-a$, $x-b$, etc. Par conséquent, le coefficient de la première puissance de y dans ce produit est la somme des produits des quantités $x-a$, $x-b$, etc., prises $m-1$ à $m-1$. D'ailleurs, pour former ces produits, il suffit de diviser successivement $f(x)$ par chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, etc. On a donc

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c}\ldots + \frac{f(x)}{x-k}.$$

Soit maintenant

$$f(x) = (x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots.$$

Pour appliquer la proposition qui vient d'être établie, il faudra répéter n fois le quotient de la division de $f(x)$ par $x-a$, p fois le quotient de $f(x)$ par $x-b$, q fois celui de $f(x)$ par $x-c$, etc.; ainsi on aura

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & n(x-a)^{n-1}(x-b)^p(x-c)^q\ldots \\ & + p(x-a)^n(x-b)^{p-1}(x-c)^q\ldots \\ & + q(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^{q-1}\ldots \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Posons

$$D = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots;$$

D divise $f(x)$ et $f'(x)$. Il est le plus grand commun diviseur de ces deux quantités, autrement il faudrait que l'un des facteurs de $f(x)$ divisât le quotient de $f'(x)$ par D, lequel est

$$n(x-b)(x-c)\ldots + p(x-a)(x-c)\ldots$$
$$+ q(x-a)(x-b)\ldots + \ldots$$

Or chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, etc., divise toutes les parties de cette somme, à l'exception d'une seule; par conséquent la somme n'est divisible par aucun de ces facteurs.

Donc, *lorsqu'une équation a des racines égales, le premier membre de l'équation et sa fonction dérivée ont un commun diviseur algébrique, et ce commun diviseur est le produit de tous les facteurs correspondants aux racines égales de l'équation, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.*

Lorsque l'équation n'a pas de racines égales, le premier membre et sa fonction dérivée n'ont aucun facteur commun algébrique; car les exposants n, p, q, etc., étant l'unité, le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ se réduit à un nombre.

414. D'après ces propositions, pour reconnaître si une équation donnée $f(x) = 0$ a des racines égales, on cherche le plus grand commun diviseur du polynôme $f(x)$ et de sa fonction dérivée $f'(x)$. Lorsque le plus grand commun diviseur est numérique, toutes les racines sont inégales. Si le plus grand commun diviseur est algébrique et s'il est du premier degré, il fait connaître une racine double de l'équation; et il n'y a pas d'autres racines égales. Si le plus grand commun diviseur est du second degré, en l'égalant à zéro, on a une équation qui peut avoir deux racines différentes, ou deux racines égales. Dans le premier cas, chacune des deux racines se trouve deux fois dans l'équation

$f(x) = 0$; dans le second cas, la valeur de x qu'on a trouvée est une racine triple de la proposée.

415. Expliquons la marche qu'il faut suivre quand le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f'(x)$ est un polynôme d'un degré supérieur au second. Soit D_1 ce plus grand commun diviseur. Pour reconnaître si D_1 a des facteurs égaux, il faut opérer sur D_1 comme on a opéré sur le polynôme $f(x)$; c'est-à-dire qu'il faut chercher le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa fonction dérivée. Soit D_2 ce plus grand commun diviseur. Soit encore D_3 le plus grand commun diviseur de D_2 et de sa fonction dérivée, et supposons que D_3 soit premier avec sa dérivée. Dans ce cas D_2 aura des facteurs doubles et ne contiendra pas de facteurs répétés plus de deux fois. D_1 aura des facteurs triples et ne contiendra pas de facteurs répétés plus de trois fois. Enfin $f(x)$ aura des facteurs quadruples, et n'en contiendra pas à un degré de multiplicité plus élevé.

Désignons par X_1 le produit des facteurs simples du polynôme $f(x)$, par X_2 le produit des premières puissances des facteurs doubles, par X_3 le produit des premières puissances des facteurs triples, par X_4 le produit des premières puissances des facteurs quadruples. On aura

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$
$$D_1 = X_2 X_3^2 X_4^3.$$
$$D_2 = X_3 X_4^2.$$
$$D_3 = X_4.$$

En divisant chacune des égalités ci-dessus par la suivante, et en nommant Q_1 le quotient de $f(x)$ par D_1, Q_2 celui de D_1 par D_2, Q_3 celui de D_2 par D_3, on trouve

$$Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4, \quad Q_2 = X_2 X_3 X_4, \quad Q_3 = X_3 X_4.$$

En divisant encore chaque égalité par la suivante, et la der-

nière par $D_3 = X_4$, on obtient

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \quad \frac{Q_3}{D_3} = X_3.$$

Après ces opérations qui déterminent les facteurs X_1, X_2, X_3, X_4, on trouvera toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ en résolvant séparément les quatre équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0.$$

La première équation fera connaître les racines simples de l'équation proposée; la deuxième donnera les racines doubles; la suivante donnera les racines triples; enfin la dernière donnera les racines quadruples.

Si l'un des polynômes X_1, X_2, X_3 est numérique, on en conclura qu'il n'y a pas de racines du degré de multiplicité correspondant au rang de ce polynôme.

416. Pour appliquer cette méthode, prenons l'équation

$$x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur du premier membre de l'équation et de sa fonction dérivée est

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18.$$

Le plus grand commun diviseur de ce polynôme et de sa fonction dérivée est $x - 3$.

Comme cette dernière quantité ne contient x qu'au premier degré, elle ne peut avoir aucun facteur commun avec sa dérivée, et on en conclut que l'équation proposée ne contient pas de facteurs élevés à des puissances supérieures à la troisième.

En conservant aux lettres X_1, X_2, X_3, le même sens que précédemment, on a

$$X_1 X_2^2 X_3^3 = x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 \ldots,$$
$$X_2 X_3^2 = x^4 - 7x^3 + 13x^2 \ldots,$$
$$X_3 = x - 3.$$

En divisant chacune de ces égalités par la suivante, on trouve

$$X_1 X_2 X_3 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$
$$X_2 X_3 = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

En divisant de nouveau la première égalité par la deuxième, et celle-ci par $X_3 = x - 3$, on obtient

$$X_1 = x + 4, \quad X_2 = x^2 - x - 2.$$

Les équations à résoudre sont donc

$$x + 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x - 3 = 0.$$

Par la première on a la racine -4, qui ne se trouve qu'une fois dans l'équation proposée; par la deuxième on a les racines -1 et $+2$, qui sont des racines doubles; et par la troisième on a la racine 3, qui est une racine triple.

Soit encore l'équation

$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0.$$

En opérant comme pour l'exemple précédent, on obtiendra deux racines simples, deux racines doubles, et une racine triple. Les racines simples sont -2 et $+1$; les racines doubles sont $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{-7}}{2}$; la racine triple est -1.

417. Si l'on voulait avoir une équation qui contînt toutes les racines égales et inégales de l'équation donnée, et dans laquelle chaque racine ne se trouvât seule qu'une fois, il suffirait de chercher le plus grand commun diviseur D_1 du polynôme $f(x)$ et de sa fonction dérivée, et de diviser $f(x)$ par D_1; le quotient donnerait l'équation demandée, puisque ce quotient, que nous avons désigné par Q_1, est $X_1 X_2 X_3 X_4$.

On peut aussi parvenir à deux équations dont l'une donne

toutes les racines inégales, et l'autre donne toutes les racines égales sans les contenir plus d'une fois chacune. A cet effet, après avoir obtenu le quotient Q_1, on cherche le plus grand commun diviseur d des polynômes D_1 et Q_1; on a $d = X_2X_3X_4$, et, par suite, $\frac{Q_1}{d} = X_1$; les équations demandées sont donc $\frac{Q_1}{d} = 0$ et $d = 0$.

418. Lorsque la division du premier membre de l'équation proposée par sa fonction dérivée conduit à un reste nul, l'équation proposée n'a qu'une seule racine qui est répétée m fois (m désignant le degré de l'équation), et la valeur de cette racine est déterminée par l'équation du premier degré qu'on obtient en égalant à zéro le quotient de la division. Car le plus grand commun diviseur du premier membre de l'équation et de sa fonction dérivée étant alors égal à cette fonction dérivée, ou n'en différant que par un facteur numérique, il résulte de ce qui a été dit dans le numéro précédent, que le quotient de la division de ces polynômes l'un par l'autre égalé à zéro doit déterminer toutes les racines de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0.$$

La fonction dérivée du premier membre est

$$4(x^3 - 6x^2 + 12x - 8).$$

Si l'on divise $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ par $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, on trouve que la division se fait exactement, et le quotient est $x - 2$. On en conclut que l'équation n'a que la seule racine 2, qui est répétée quatre fois.

419 Lorsque tous les coefficients numériques d'une

équation sont commensurables, les polynômes que nous avons désignés par X_1, X_2, X_3, etc., ne contiennent aussi que des coefficients commensurables; car les opérations par lesquelles on les obtient ne peuvent pas introduire de quantités irrationnelles. Par conséquent, si l'une des racines de l'équation est répétée n fois, et si toutes les autres racines ont des degrés de multiplicité différents, cette racine sera nécessairement commensurable. On conclut de cette observation qu'une équation du troisième degré, qui n'a pas de racine commensurable, n'a pas de racines égales, puisqu'elle ne peut avoir deux racines au même degré de multiplicité. La même conclusion s'applique à l'équation du cinquième degré; car, si elle a des racines égales incommensurables, il faut qu'elle en ait deux au même degré de multiplicité, elle ne peut donc avoir que deux racines doubles; alors elle a une racine simple, qui doit être commensurable. Quant à l'équation du quatrième degré, si elle a des racines égales incommensurables, il faudra qu'elle ait deux racines doubles; et, dans ce cas, son premier membre sera un carré. On peut donc éviter l'emploi de la méthode des racines égales pour toutes les équations qui ne surpassent pas le cinquième degré.

420. Quand on connaît une racine a d'une équation, on peut déterminer le degré de multiplicité de cette racine en la substituant dans les dérivées successives du premier membre de l'équation; car il résulte du théorème qui a été démontré dans le n° 413, que, si le premier membre de l'équation est divisible par $(x-a)^n$, la dérivée du premier ordre sera divisible par $(x-a)^{n-1}$, celle du deuxième ordre sera divisible par $(x-a)^{n-2}$, ainsi de suite; enfin, la dérivée de l'ordre $n-1$ sera divisible par $x-a$, et la dérivée suivante ne contiendra pas le facteur $x-a$; la racine a devra donc réduire à zéro les dérivées successives du pre-

mier membre jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, sans réduire à zéro la dérivée suivante.

421. On peut parvenir au théorème du n° 413 par une méthode différente de celle que nous avons suivie, et dans laquelle la considération des fonctions dérivées se présente d'une manière plus directe.

Soit a une des racines de l'équation $f(x)=0$. Si l'on forme une autre équation dont les racines soient égales à celles de la proposée diminuées de a, cette équation aura autant de racines égales à zéro qu'il y aura dans la proposée de racines égales à a. Pour diminuer toutes les racines de la proposée de a, il faut poser $y=x-a$, d'où $x=y+a$; l'équation transformée est $f(y+a)=0$, ou

$$f(a)+f'(a)y+f''(a)\frac{y^2}{1.2}+f'''(a)\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots=0$$

$f(a)$ étant nulle, puisque, par hypothèse, a est une racine de l'équation $f(x)=0$, l'équation en y est satisfaite par $y=0$. Si la racine a est répétée n fois dans l'équation proposée, l'équation en y devant avoir n racines égales à zéro, il faudra que son premier membre soit divisible par y^n, ce qui exige que les coefficients de toutes les puissances de y jusqu'à y^{n-1} soient nuls. Donc, lorsqu'une racine a entre n fois dans une équation, toutes les dérivées du premier membre, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, doivent devenir nulles quand on y fait $x=a$. Réciproquement, si a étant racine d'une équation, l'hypothèse $x=a$ annule les dérivées du premier membre, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, sans annuler celle de l'ordre n, la racine a entre n fois dans l'équation; car alors l'équation dont les racines sont égales à celles de la proposée diminuées de a a n racines égales à zéro.

On déduit de là le théorème du n° 413; car si les $n-1$

premières dérivées de $f(x)$ sont réduites à zéro pour $x = a$, la suivante ne l'étant pas, l'équation $f'(x) = 0$ aura $n - 1$ racines égales à a; par conséquent, $f'(x)$ sera divisible par $(x - a)^{n-1}$; d'ailleurs ce polynôme ne sera pas divisible par une puissance plus haute de $x - a$; car, pour que $f'(x)$ fût divisible par $(x - a)^n$, il faudrait que la $n^{ième}$ dérivée de $f(x)$ devînt nulle pour $x = a$.

Séparation des racines incommensurables.

422. La recherche des racines incommensurables se divise en deux parties distinctes : on s'occupe d'abord de déterminer deux limites de chaque racine, l'une plus petite, l'autre plus grande, et qui soient assez rapprochées pour ne comprendre qu'une seule racine; c'est ce qu'on appelle *séparer* les racines. On cherche ensuite la valeur de chaque racine avec le degré d'approximation que la question exige.

423. On a prouvé que lorsque deux quantités substituées dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre ces quantités. Voici une autre proposition qu'il nous faut maintenant faire connaître pour parvenir à la séparation des racines.

Théorème. — *Si l'on substitue dans le premier membre d'une équation deux quantités qui comprennent une racine réelle, ou qui en comprennent un nombre impair, les deux résultats auront des signes contraires; et si les quantités substituées ne comprennent aucune racine, ou si elles en comprennent un nombre pair, les deux résultats auront le même signe.*

Représentons l'équation proposée par $f(x) = 0$, désignons par α et β deux quantités réelles quelconques, et supposons $\alpha < \beta$. Si les quantités α et β ne comprennent aucune racine de l'équation, les résultats qu'on obtiendra

en substituant successivement ces quantités à la place de x devront avoir le même signe; car s'ils avaient des signes contraires, il y aurait une racine comprise entre α et β (n° 374), ce qui est contre l'hypothèse.

Examinons le cas où α et β comprennent des racines, et soient $a, b, c, \ldots, k$ ces racines. Le polynôme $f(x)$ sera divisible par le produit des facteurs $x-a$, $x-b, \ldots$, $x-k$, et en représentant le quotient par $\varphi(x)$, on aura

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k) \times \varphi(x).$$

Faisons successivement dans cette égalité $x=\alpha$ et $x=\beta$; il viendra

$$f(\alpha) = (\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-k) \times \varphi(\alpha),$$
$$f(\beta) = (\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-k) \times \varphi(\beta).$$

Or, les racines $a, b, \ldots, k$ étant comprises entre α et β, les facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b, \ldots, \alpha-k$ sont tous négatifs, et les facteurs $\beta-a$, $\beta-b, \ldots, \beta-k$ sont tous positifs. Il suit de là que le produit des facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b$, etc., a le même signe que le produit des facteurs $\beta-a$, $\beta-b$, etc., ou bien le signe contraire, suivant que les racines $a, b, \ldots, k$ sont en nombre pair ou en nombre impair. D'ailleurs, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ ont le même signe; car si ces quantités avaient des signes contraires, l'équation $\varphi(x)=0$ aurait une racine entre α et β; donc $a, b, \ldots, k$ ne seraient pas les seules racines de $f(x)=0$ comprises entre α et β, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, si le nombre des racines $a, b, \ldots, k$ est pair, les résultats $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont le même signe; et si le nombre de ces racines est impair, les résultats $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont des signes contraires.

On déduit immédiatement du théorème précédent la proposition réciproque, savoir :

Si deux quantités substituées dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires,

elles ne comprennent qu'une racine, ou elles en comprennent un nombre impair; et, si deux quantités donnent des résultats de même signe, elles ne comprennent pas de racine, ou elles en comprennent un nombre pair.

La démonstration précédente ne suppose pas que les racines $a, b, \ldots, k$ soient différentes; de sorte que, si α et β comprenaient une racine qui fût répétée un nombre pair de fois, sans en comprendre aucune autre, il faudrait considérer ces quantités comme comprenant un nombre pair de racines.

424. Lorsque le dernier terme d'une équation est positif, l'équation n'a pas de racines positives, ou elle en a un nombre pair; car, en substituant successivement, à la place de x, zéro et la limite supérieure des racines positives, on a des résultats de même signe. Quand le dernier terme est négatif, le nombre des racines positives est impair; car, en substituant zéro et la limite supérieure des racines positives, on a des résultats de signes contraires.

425. Supposons actuellement que l'on veuille séparer les racines incommensurables d'une équation qui ne contient pas de racines égales.

On commencera par substituer dans le premier membre tous les nombres entiers compris entre la limite supérieure des racines négatives et la limite supérieure des racines positives. Si la suite des résultats de ces substitutions présente autant de changements de signes qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, il ne se trouvera pas plus d'une racine entre deux nombres consécutifs qui auront donné des résultats de signes contraires, et il ne s'en trouvera aucune entre deux nombres consécutifs qui auront donné des résultats de même signe; autrement, il faudrait que le nombre des racines surpassât le degré de l'équation. La séparation sera donc effectuée.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 15 = 0.$$

On trouve pour limites des racines, par la méthode du n° 402, $+4$ et -3; et en substituant dans le premier membre les nombres entiers depuis -3 jusqu'à $+4$, les signes des résultats sont ceux qui sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

$x=-3$,	$=-2$,	$=-1$,	$=0$,	$=+1$,	$=+2$,	$=+3$,	$=+4$;
$+$,	$-$,	$+$,	$+$,	$+$,	$-$,	$-$,	$+$.

On conclut de là que l'équation a toutes ses racines réelles, que deux d'entre elles sont positives et comprises l'une entre 1 et 2, l'autre entre 3 et 4; que les deux autres sont négatives, et qu'elles sont comprises l'une entre -1 et -2, l'autre entre -2 et -3.

Quand on sait que l'équation n'a pas plus de μ racines réelles, μ étant un nombre inférieur au degré, il suffit, pour que la séparation s'effectue en substituant les nombres entiers compris entre les limites, que la suite des résultats de ces substitutions présente μ changements de signes.

Si l'on veut effectuer seulement la séparation des racines positives, il faudra qu'en substituant les nombres entiers depuis zéro jusqu'à la limite supérieure des racines positives, le nombre des changements de signes dans la suite des résultats soit égal au nombre des variations de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 8x + 10 = 0.$$

Comme elle n'a que deux variations, elle n'a pas plus de deux racines positives. En faisant $x=0$, on a pour résultat $+10$; en faisant $x=1$, on a pour résultat -1; en faisant $x=2$, on a pour résultat -2, et en faisant $x=3$, on voit, sans effectuer en entier la substitution, que le résultat

est positif. On conclut de là que l'équation a deux racines positives, comprises l'une entre 0 et 1, l'autre entre 2 et 3.

Si l'on veut trouver les racines négatives, on changera d'abord x en $-x$, ce qui donne

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Cette équation a trois variations; ainsi elle peut avoir trois racines positives. On trouve, par la méthode du n° 402, le nombre 3 pour limite supérieure des racines, et en substituant les nombres 0, 1, 2, on voit que ces nombres donnent des résultats négatifs; d'ailleurs la limite 3 donne un résultat positif. Il suit de là que l'équation $x^5 - 3x^3 - x^2 - 8x + 10 = 0$ a au moins une racine négative comprise entre -2 et -3; mais on ne peut pas décider si les deux autres racines sont réelles.

426. Si l'on connaissait exactement le nombre des racines réelles, on serait assuré de parvenir à les séparer en effectuant des substitutions de plus en plus rapprochées, jusqu'à ce que le nombre des changements de signes de la suite des résultats fût égal à celui des racines réelles. Mais, le plus ordinairement, le nombre des racines réelles est inconnu, et il faut le déterminer. On a d'abord été conduit, pour résoudre ce problème, à chercher le moyen d'obtenir une quantité telle, qu'en la prenant pour l'intervalle des substitutions, on fût certain qu'entre chaque nombre substitué et le suivant il ne pourrait se trouver plus d'une racine. Nous montrerons bientôt comment il est possible de former une équation dont les racines soient les différences des racines d'une équation donnée, considérées deux à deux, et qu'on appelle, par cette raison, *équation aux différences*. Quand on a calculé cette équation, on détermine une limite inférieure de ses racines; cette limite est la quantité qu'il s'agissait de trouver.

La limite inférieure des racines de l'équation aux différences étant ordinairement plus petite que l'unité, on a à substituer des nombres fractionnaires. Mais en désignant par a et b deux racines quelconques de l'équation, et par δ la limite inférieure des racines de l'équation aux différences, puisque $a - b > \delta$, on a $\frac{a}{\delta} - \frac{b}{\delta} > 1$. On voit donc que, si l'on change l'équation proposée en une autre dont les racines soient $\frac{a}{\delta}$, $\frac{b}{\delta}$, etc, ce qui se fera en posant $x = \delta y$, les racines de la nouvelle équation différeront les unes des autres de plus d'une unité; de sorte qu'on pourra les séparer en ne substituant que des nombres entiers.

La méthode que nous venons d'exposer avait été indiquée par *Waring*; cependant elle était restée ignorée jusqu'au moment où elle fut reproduite par *Lagrange*, qui y était parvenu sans connaître cette partie des travaux de Waring. Cette méthode ne laisse rien à désirer sous le rapport de la rigueur, mais elle devient en quelque sorte impraticable quand le degré de l'équation à résoudre est un peu élevé, à cause de la longueur des calculs qu'il faut effectuer pour obtenir l'équation aux différences. On peut actuellement éviter ces calculs, au moyen d'un théorème remarquable découvert par M. Sturm. Nous allons exposer ce théorème, qui n'avait point encore été introduit dans les Éléments d'Algèbre, quand il fut inséré dans la première édition de ce Traité (1833).

Théorème de M. Sturm. — *Usage de ce théorème pour la recherche des racines réelles.*

427. Soit $V = 0$ une équation d'un degré quelconque, dont toutes les racines sont inégales, et soit V_1 la fonction dérivée de V. On opérera comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre V et V_1, avec cette seule

différence qu'il faudra changer les signes de tous les restes, avant de les prendre pour diviseurs. Ce changement de signes, qui serait indifférent s'il ne s'agissait que de trouver le plus grand commun diviseur, est essentiel pour le but que nous nous proposons actuellement. Désignons par Q_1 le quotient de la division de V par V_1, et par $-V_2$ le reste correspondant, on aura

$$V = V_1 Q_1 - V_2.$$

Divisant V_1 par V_2, c'est-à-dire par le reste de la première opération pris en signe contraire, et désignant par Q_2 le quotient, par $-V_3$ le reste correspondant, on aura encore

$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3.$$

En continuant ainsi, on arrivera nécessairement à un reste numérique $-V_r$, puisque nous avons supposé que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales (n° 413), et on aura cette suite de relations :

$$(1)\quad \begin{cases} V = V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 = V_2 Q_2 - V_3, \\ V_2 = V_3 Q_3 - V_4, \\ \vdots \\ V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}, \\ \vdots \\ V_{r-2} = V_{r-1} Q_{r-1} - V_r \ (*). \end{cases}$$

Cela posé, la considération des fonctions V, V_1, V_2, etc., a conduit M. Sturm au théorème suivant :

428. Théorème. — *Lorsqu'on substitue à la place de* x,

(*) On peut éviter, dans les divisions successives, les coefficients fractionnaires, en multipliant chaque dividende par un facteur numérique convenable; mais les facteurs qu'on introduit doivent être positifs, afin que les signes des restes ne soient pas altérés.

dans la suite des fonctions

$$V,\ V_1,\ V_2, \ldots,\ V_{r-1}, V_r,$$

deux nombres quelconques α *et* β *positifs ou négatifs, si* α *est plus petit que* β, *le nombre des variations de la suite des signes de ces fonctions pour* $x = \beta$ *sera au plus égal au nombre des variations de la suite des signes de ces mêmes fonctions pour* $x = \alpha$; *et s'il est moindre, la différence sera égale au nombre des racines réelles de l'équation* $V = 0$ *comprises entre* α *et* β.

Pour démontrer ce théorème, il faut examiner comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, disposées dans l'ordre indiqué, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer, quand x passe par différents états de grandeur. Or il ne peut arriver de changement dans cette suite de signes, à mesure qu'on fait croître x, qu'autant qu'une des fonctions V, V_1, V_2, etc., change de signe, et par conséquent devient nulle.

Il se présente donc deux cas à examiner, suivant que la fonction qui s'annule est la première V, ou qu'elle est une des intermédiaires V_1, V_2, etc.; car ce n'est pas la dernière fonction V_r qui peut devenir nulle, puisque V_r est un nombre.

1er Cas. Nous allons examiner le changement qui a lieu dans la suite des signes, quand x, en croissant par degrés insensibles, atteint et dépasse une valeur qui rend V égal à zéro. Si l'on substitue cette valeur de x, que nous désignerons par a, dans la fonction dérivée V_1, cette fonction deviendra un nombre positif ou négatif, puisque, par hypothèse, l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales. Représentons par u une quantité positive assez petite pour que l'équation $V_1 = 0$ n'ait pas de racine comprise entre $a - u$ et $a + u$. Alors V_1 conservera le même signe quand on y fera $x = a - u$, $x = a$, $x = a + u$.

Cela posé, désignons pour un moment V par $f(x)$ et V_1 par $f'(x)$, on aura, en observant que $f(a) = 0$,

$$f(a-u) = -\frac{u}{1}f'(a) + \frac{u^2}{1.2}f''(a) - \frac{u^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots$$

Comme rien ne limite la petitesse de u, on pourra rendre u tellement petit, que le signe du développement de $f(a-u)$ ne dépende que du signe de son premier terme (n° 372) : ainsi $f(a-u)$ aura le même signe que $-uf'(a)$, et par conséquent il aura un signe contraire à celui de $f'(a)$; or $f'(a)$ et $f'(a-u)$ ont le même signe; donc $f(a-u)$ et $f'(a-u)$ auront des signes contraires. Donc V et V_1 seront de signes contraires pour $x = a - u$.

En changeant $-u$ en $+u$ dans le développement précédent, on a

$$f(a+u) = \frac{u}{1}f'(a) + \frac{u^2}{1.2}f''(a) + \frac{u^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots;$$

et l'on voit de même que $f(a+u)$ aura le même signe que $f'(a)$, et, par suite, le même signe que $f'(a+u)$. Donc V et V_1 ont le même signe pour $x = a + u$.

Donc, si pour $x = a$ le signe de $f'(x)$ ou de V_1 est $+$, le signe de V sera $-$ pour $x = a - u$, et il sera $+$ pour $x = a + u$. Si, au contraire, le signe de V_1 est $-$ pour $x = a$, celui de V sera $+$ pour $x = a - u$, et $-$ pour $x = a + u$. C'est ce qu'indique le tableau suivant :

		V	V_1		V	V_1
Pour	$x = a - u$	$-$	$+$		$+$	$-$
	$x = a$	0	$+$	ou bien	0	$-$
	$x = a + u$	$+$	$+$		$-$	$-$.

Par conséquent, lorsque a est une racine de l'équation $V = 0$, le signe de V forme avec le signe de V_1 une *variation* avant que x atteigne la valeur a, et cette variation

est changée en une *permanence* après que x a dépassé cette valeur.

Quant aux autres fonctions V_2, V_3, etc., chacune d'elles aura, comme V_1, soit pour $x = a - u$, soit pour $x = a + u$, le même signe qu'elle a pour $x = a$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x = a$, en même temps que V. Nous allons examiner ce qui arrive lorsqu'une de ces fonctions s'évanouit.

2e Cas. Soit V_n la fonction intermédiaire qui s'annule pour $x = b$. Cette valeur de x ne peut réduire à zéro ni la fonction V_{n-1} qui précède V_n, ni la fonction V_{n+1} qui la suit immédiatement; car, si cela était, le facteur $x - b$ diviserait en même temps deux restes consécutifs V_{n-1} et V_n, ou V_n et V_{n+1}; par conséquent $x - b$ serait un facteur multiple du polynôme V, ce qui est impossible, puisque nous avons supposé que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales. En outre, d'après l'égalité $V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}$, qui est une des relations (1) du n° 427, V_n étant nulle pour $x = b$, on aura $V_{n-1} = - V_{n+1}$; donc V_{n-1} et V_{n+1} auront des signes contraires lorsqu'on y fera $x = b$.

Cela posé, substituons à la place de x deux nombres $b - u$ et $b + u$ très-peu différents de b; les fonctions V_{n-1} et V_{n+1} auront pour ces deux valeurs de x les mêmes signes qu'elles ont pour $x = b$, puisqu'on peut prendre u assez petit pour que chacune des fonctions V_{n-1} et V_{n+1} ne change pas de signe quand x croît dans l'intervalle de $b - u$ à $b + u$. Il suit de là que, quel que soit le signe de V_n pour $x = b - u$, comme il est placé entre les signes de V_{n-1} et V_{n+1} qui sont contraires, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, quand on fera $x = b - u$, formeront toujours une permanence et une variation, ou une variation et une permanence. On prouvera de la même manière que, quel que soit le signe de V_n pour $x = b + u$, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, quand on fera $x = b + u$, ne présenteront qu'une variation.

Ainsi, la suite des signes de toutes les fonctions $V_1, \ldots, V_r$, pour $x = b + u$, contiendra précisément autant de variations que la suite des signes de ces fonctions pour $x = b - u$. Donc, quand une fonction intermédiaire quelconque passe par zéro, le nombre des variations dans la suite des signes n'est pas changé, à moins que la valeur de x qui annule cette fonction intermédiaire ne réduise aussi à zéro la première fonction V; dans ce cas, le changement de signe de celle-ci ferait disparaître une variation sur la gauche de la suite des signes, ainsi que nous l'avons prouvé (1er cas).

Il est clair que la même conclusion subsisterait si plusieurs fonctions intermédiaires non adjacentes devenaient nulles pour la valeur $x = b$.

Il est donc démontré que, chaque fois que la variable x, en croissant par degrés insensibles, atteint et dépasse une valeur qui rend V égale à zéro, la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, perd une variation formée par les signes de V et de V_1, laquelle est remplacée par une permanence; tandis que les changements de signes des fonctions intermédiaires $V_1, V_2, \ldots, V_{r-1}$, ne peuvent jamais ni augmenter ni diminuer le nombre des variations. Par conséquent, si l'on prend un nombre quelconque α, positif ou négatif, et un autre nombre β plus grand que α, et si l'on fait croître x depuis α jusqu'à β, autant il y aura de valeurs de x comprises entre α et β qui réduiront V à zéro, autant la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, pour $x = \beta$, contiendra de variations de moins que la suite des signes de ces fonctions pour $x = \alpha$. Le principe que nous venons d'énoncer n'est autre chose que le théorème qu'on voulait établir, exprimé en d'autres termes.

Scolie. — Il peut arriver que l'une des fonctions $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{r-1}$, devienne nulle, soit pour $x = \alpha$, soit pour $x = \beta$. Dans ce cas, il suffit de considérer les variations de

la suite des signes de toutes les fonctions, sans avoir égard à celle qui s'évanouit. Car on a vu que, lorsque la fonction V_n devient nulle pour $x = \alpha$, si l'on substitue à la place de x une quantité très-peu différente de α, les signes des trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, présenteront toujours une variation et une permanence; et la variation subsistera encore quand on omettra la fonction V_n.

Corollaire I. — Pour connaître le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, il faudra substituer, dans toutes les fonctions, deux quantités α et β entre lesquelles toutes les racines soient comprises. Or il est toujours possible de donner à x une valeur assez grande pour que chacune des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ ait le signe de son premier terme (n° 371); donc, si l'on considère d'abord les signes des premiers termes des fonctions en supposant x négatif, et ensuite les signes de ces mêmes termes en supposant x positif, l'excès du nombre des variations de la première suite de signes sur le nombre des variations de la seconde suite sera précisément le nombre des racines réelles de l'équation.

Corollaire II. — Le théorème de M. Sturm donne le moyen de trouver les conditions nécessaires pour que toutes les racines d'une équation soient réelles. L'équation $V = 0$ étant du degré m, il faudra que la suite des signes des premiers termes des fonctions V, V_1, V_2, etc., puisse présenter m variations; ce qui exige que le nombre des fonctions ne soit pas moindre que $m + 1$; or ce nombre ne peut pas surpasser $m + 1$, puisque le degré de chaque fonction est inférieur au moins d'une unité à celui de la fonction précédente; donc il devra être $m + 1$. Il faudra de plus que les premiers termes des fonctions, en supposant x positif, aient tous le même signe. Ces conditions sont suffisantes; car, si les exposants des premiers termes des fonctions ne diminuent que d'une unité de chaque fonction à la sui-

vante, ils seront alternativement pairs et impairs; et, si les signes de ces premiers termes ne présentent que des permanences quand x est positif, ils ne présenteront que des variations pour x négatif. Le nombre des racines réelles sera donc égal à m.

Pour exprimer ces conditions, comme les premiers termes des fonctions V et V_1 sont toujours de même signe, on aura seulement à considérer les premiers termes des fonctions suivantes V_2, V_3, etc.; on obtiendra donc $m-1$ conditions. Il pourra d'ailleurs arriver que quelques-unes de ces conditions rentrent dans les autres, ainsi qu'on le verra par l'exemple 1 ci-après.

Corollaire III. — Toutes les fois que le nombre des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, etc., est égal à m, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation $V=0$ par la simple inspection des signes des premiers termes de ces fonctions. *L'équation* $V=0$ *a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes des fonctions* V, V_1, V_2, etc., *jusqu'à la constante* V_m *inclusivement*; car, si cette suite présente n variations, elle présente $m-n$ permanences; quand on change x en $-x$, les permanences se changent en variations et *vice versâ*, de sorte que le nombre des variations est $m-n$; le nombre des racines réelles est donc $m-2n$.

429. Appliquons le théorème de M. Sturm à quelques exemples.

Exemple 1. — Soit proposé de trouver les conditions nécessaires pour que l'équation $x^3+px+q=0$ ait toutes ses racines réelles.

On a

$$V=x^3+px+q,$$
$$V_1=3x^2+p.$$

Pour calculer la fonction V_2, on divise V par V_1, et, afin d'éviter les fractions, on multiplie V par 3; on obtient ainsi le reste $2px + 3q$; donc

$$V_2 = -2px - 3q.$$

On divise V_1 par V_2. Pour éviter les fractions, il faut multiplier V_1 par $2p$; mais comme le signe de p n'est pas connu, on doit multiplier par $2p^2$, qui est toujours une quantité positive; et pour n'avoir aucune préparation à effectuer après la première division partielle, il faut multiplier par $4p^2$. De cette manière, le reste indépendant de x est $4p^3 + 27q^2$; donc

$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

On obtient les conditions demandées en exprimant que les premiers termes des fonctions doivent avoir le même signe, ce qui donne

$$p < 0, \quad \text{et} \quad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

La première condition est comprise dans la seconde, car $27q^2$ étant toujours positif, la quantité $4p^3 + 27q^2$ ne peut être négative que si p est une quantité négative.

Exemple II. — Soit l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$.

La condition de réalité des racines est vérifiée; car on a

$$4p^3 + 27q^2 = -49.$$

Comme l'équation a deux variations, deux des racines sont positives, et la troisième est négative (n° 397). Le premier membre est positif pour $x = \sqrt{7}$ et pour toute valeur plus grande de x; et en substituant à la place de x les nombres 0, 1, 2, on a des résultats positifs. Pour séparer les deux racines positives, on peut former les fonctions de M. Sturm. En déduisant les fonctions V_2 et V_3 de celles qui ont été cal-

culées dans l'exemple précédent, on a

$$V = x^3 - 7x + 7,$$
$$V_1 = 3x^2 - 7,$$
$$V_2 = 14x - 21,$$
$$V_3 = 49.$$

La substitution dans ces fonctions des nombres 0, 1, 2 donne les suites de signes :

$$(0)\ldots + \ - \ - \ +$$
$$(1)\ldots + \ - \ - \ +$$
$$(2)\ldots + \ + \ + \ +.$$

Les deux racines sont donc comprises entre 1 et 2. Si l'on fait $x = 1,5$, la fonction V est négative; donc une des racines est entre 1 et 1,5 ; et l'autre est entre 1,5 et 2.

Si l'on substituait la valeur 1,5 dans les fonctions V_1 et V_2, on trouverait que la dernière devient nulle, et on aurait, pour les quatre fonctions, cette suite de signes :

$$- \ - \ 0 \ +.$$

En ne tenant pas compte dans cette suite du signe 0, on y trouve une variation, ainsi elle a une variation de moins que la suite qu'on obtient pour $x = 1$, et une de plus que la suite qu'on obtient pour $x = 2$, ce qui s'accorde avec le scolie du n° 428.

Exemple III. $x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$

On a vu que cette équation n'a pas moins de trois racines réelles (n° 425); il ne s'agit donc plus que de reconnaître si toutes les racines sont réelles, ou si elle a deux racines imaginaires. Or on trouve

$$V_1 = 5x^4 - 9x^2 + 2x - 8,$$
$$V_2 = 6x^3 - 3x^2 + 32x + 50,$$
$$V_3 = 413x^2 + 636x + 436,$$
$$V_4 = -195395x - 256937.$$

Le premier terme de la fonction V_5 étant négatif, l'équation a nécessairement des racines imaginaires (n° 428, cor. II). On peut donc se dispenser de calculer la constante V_5. Si l'on achève l'opération, on trouvera que cette constante est négative; de sorte que la suite des signes des premiers termes des fonctions V, V_1, ..., V_5 a une seule variation, ce qui est d'accord avec le corollaire III.

430. Lorsqu'on a calculé les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., s'il ne suffit pas de quelques essais pour effectuer la séparation des racines, on doit substituer dans toutes les fonctions des nombres croissants, jusqu'à ce que l'on ait atteint une limite pour laquelle la suite des signes des résultats ne présente pas plus de variations qu'il ne s'en trouve dans la suite des signes des premiers termes des fonctions. On est alors certain qu'il n'y a aucune racine au delà de cette limite; et on substitue des nombres intermédiaires, dans les intervalles où on a reconnu qu'il se trouve plusieurs racines, jusqu'à ce que ces racines soient séparées. On peut ne considérer que les racines positives, et changer ensuite x en $-x$ dans toutes les fonctions, pour la séparation des racines négatives. Les nombres que l'on substitue peuvent être choisis d'une manière arbitraire; mais pour la facilité des calculs, il convient d'employer d'abord les nombres 0, 1, 10, 100, 1000, etc. S'il y a plusieurs racines entre 100 et 1000, par exemple, on substituera 500 et successivement les autres nombres de centaines compris entre 100 et 1000. Si plusieurs racines ont le même chiffre de centaines, on substituera les nombres de dizaines entre les deux nombres de centaines qui comprendront ces racines. On passera ensuite, s'il est nécessaire, à la substitution des nombres comprenant des unités, puis à celle des nombres avec des dixièmes; ainsi de suite. De cette manière on obtiendra successivement les chiffres de chaque

racine, à partir des plus hautes unités, jusqu'à ce que les racines soient toutes séparées. Si l'on doit substituer les nombres 310, 320, etc., on pourra faire dans toutes les fonctions $x = 300 + x'$; on n'aura plus à substituer dans les fonctions transformées en x' que les nombres 10, 20, etc. Pareillement, s'il faut substituer pour x' des nombres compris entre 20 et 30, on fera $x' = 20 + x''$, et l'on n'aura à substituer, dans les nouvelles fonctions en x'', que des nombres de 1 à 10.

431. Lorsque l'on reconnaît qu'une des fonctions auxiliaires, telle que V_n, intermédiaire entre V et V_r, conserve toujours le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, il n'est point nécessaire de considérer les fonctions qui suivent V_n; il suffit de substituer les deux nombres α et β dans les fonctions des degrés supérieurs, V, V_1, V_2, etc., en s'arrêtant à V_n, et d'écrire les signes des résultats. *Le nombre des racines réelles de l'équation* $V = 0$ *comprises entre* α *et* β, *est égal à l'excès du nombre des variations de la suite des signes produits par la substitution de* α, *sur le nombre des variations de la suite des signes produits par la substitution de* β.

Pour se rendre compte de cette propriété, il suffit de remarquer qu'on peut appliquer au système partiel de fonctions V, $V_1, \ldots, V_n$, la démonstration que nous avons donnée plus haut pour le système complet des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}, \ldots, V_r$, dont la dernière était un nombre constant. Dans l'hypothèse actuelle, V_n conserve toujours le même signe, sans avoir une valeur constante, pour toutes les valeurs croissantes de x depuis α jusqu'à β; or, la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_n$ perd une variation chaque fois que V devient nulle, et l'évanouissement des fonctions intermédiaires entre V et V_n ne peut ni augmenter ni diminuer le nombre des variations.

Donc, autant l'équation $V = 0$ a de racines comprises entre α et β, autant la suite des signes produits par la substitution de β a de variations de moins que la suite des signes produits par la substitution de α.

Le théorème modifié comme on vient de le voir, sera souvent d'une application plus facile. Ainsi, lorsqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et V_1, on parvient à un polynôme V_n (par exemple celui du second degré) qui, égalé à zéro, ne donne que des valeurs imaginaires de x, il n'est pas nécessaire de pousser plus loin les divisions; car ce polynôme V_n sera constamment de même signe que son premier terme, pour toutes les valeurs réelles de x; de sorte qu'on pourra le prendre pour la dernière des fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc. On pourrait même s'arrêter à un polynôme V_n qui s'annulerait pour des valeurs réelles de x, pourvu qu'on pût déterminer toutes ces valeurs. Car, en désignant par p, q, r, etc., celles de ces valeurs qui seraient comprises entre α et β, et les supposant disposées par ordre de grandeur, en commençant par les plus petites, on trouverait par l'application du principe ci-dessus, combien l'équation $V = 0$ a de racines entre α et $p - u$, u étant une quantité positive aussi petite qu'on le voudrait; on trouverait de même combien $V = 0$ a de racines entre $p + u$ et $q - u$, c'est-à-dire entre p et q, en prenant le nombre u suffisamment petit; on trouverait de même combien $V = 0$ a de racines entre q et r; et ainsi de suite. On suppose toutefois que les valeurs p, q, r, etc., qui annulent V_n, ne réduisent pas en même temps V à zéro.

432. On peut remarquer que, lorsque la fonction V_n ne change pas de signe pour les valeurs croissantes de x, depuis α jusqu'à β, on obtiendra constamment le même nombre de variations en substituant soit α, soit β, soit tout autre nombre compris entre α et β, dans la suite partielle

des fonctions $V_n, V_{n+1}, \ldots, V_r$, puisque l'évanouissement des fonctions intermédiaires de cette suite partielle ne peut pas altérer le nombre de ses variations. Mais il ne faut pas croire que, si les deux nombres α et β, substitués dans ces fonctions, donnent le même nombre de variations, V_n conservera le même signe pour toutes les valeurs croissantes de x depuis α jusqu'à β. Cette proposition réciproque n'est vraie que dans le cas où l'équation $V = 0$ a toutes ses racines réelles.

433. Nous avons supposé jusqu'à présent que l'équation proposée $V = 0$ n'avait pas de racines égales. Mais le théorème du n° 428 subsiste également quand cette condition n'a pas lieu.

Pour le faire voir, supposons que, l'équation ayant des racines égales, on opère sur les polynômes V et V_1 comme on l'a dit dans le n° 427. On parviendra alors à un reste V_r, fonction de x, qui divisera exactement le reste précédent V_{r-1}; ce reste V_r sera le plus grand commun diviseur de V et de V_1, et il divisera exactement chacun des restes successifs $V_2, V_3, \ldots, V_{r-2}$.

Concevons que l'on divise les fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ par V_r, et représentons les quotients par $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$. Il est facile de reconnaître que le théorème du n° 428 aura lieu pour l'équation $T = 0$, en considérant la suite des fonctions $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$.

En effet, on voit d'abord que le dernier quotient T_r sera indépendant de x, puisqu'il sera égal à l'unité. En second lieu, comme on aura toujours, entre les fonctions V, V_1, V_2, etc., les équations $V = V_1 Q_1 - V_2$, $V_1 = V_2 Q_2 - V_3$, etc., on aura aussi, en divisant toutes ces équations par V_r, $T = T_1 Q_1 - T_2$, $T_1 = T_2 Q_2 - T_3$, etc.; et de là on conclura, comme dans le n° 428, que, si une valeur de x annule une des fonctions $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{r-1}$, elle ne pourra

annuler aucune des deux fonctions adjacentes, et elle fera prendre à ces deux fonctions des valeurs de signes contraires.

Tout se réduit donc à faire voir que, si a est une racine de l'équation $T = 0$, les deux fonctions T et T_1, dont la seconde n'est plus la dérivée de la première, auront néanmoins des signes contraires pour $x = a - u$ et les mêmes signes pour $x = a + u$. Soit

$$V = (x - a)^n (x - b)^{n'} (x - c)(x - d).$$

On aura (n° 413)

$$V_1 = (x - a)^{n-1} (x - b)^{n'-1} \times \left\{ \begin{array}{l} n(x - b)(x - c)(x - d) \\ + n'(x - a)(x - c)(x - d) \\ + (x - a)(x - b)(x - d) \\ + (x - a)(x - b)(x - c) \end{array} \right\};$$

et en observant que $V_1 = (x - a)^{n-1} (x - b)^{n'-1}$, on conclura de ces valeurs de V et de V_1 :

$$T = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} n(x - b)(x - c)(x - d) + n'(x - a)(x - c)(x - d) \\ + (x - a)(x - b)(x - d) + (x - a)(x - b)(x - c). \end{array} \right.$$

Cela posé, si l'on fait $x = a - u$, u étant une quantité très-petite, toutes les parties de T_1 qui contiennent le facteur $x - a$ auront des valeurs très-petites; par conséquent, le signe de T_1 sera le même que celui du produit $n(x - b)(x - c)(x - d)$; or ce produit aura un signe contraire à celui de T, puisque le facteur $x - a$ se réduira à la quantité négative $-u$; donc T et T_1 auront des signes contraires. Si l'on fait, au contraire, $x = a + u$, le facteur $x - a$ devenant $+u$, T et T_1 auront le même signe.

Il résulte de ces explications que, *si l'on donne successivement à* x, *dans la suite des fonctions* T, T_1, T_2, etc., *deux valeurs* α *et* β (α *étant plus petit que* β), *l'excès du nombre des variations qu'on trouvera en faisant* $x = \alpha$,

sur celui des variations qu'on trouvera pour $x = \beta$, *sera égal au nombre des racines réelles de l'équation* $T = 0$ *comprises entre* α *et* β.

On peut se dispenser de calculer les quotients T, T_1, T_2, etc.; car les fonctions V, V_1, V_2, etc., qui sont respectivement égales aux fonctions T, T_1, T_2, etc., multipliées par V_r, auront pour une valeur particulière de x les mêmes signes que les fonctions T, T_1, T_2, etc., ou bien elles auront toutes des signes contraires, suivant que la fonction V_r sera positive ou négative pour cette valeur de x; par conséquent, le nombre des variations de signes des fonctions V, V_1, V_2, etc., pour une valeur quelconque de x, sera toujours égal au nombre des variations de signes de la suite des fonctions T, T_1, T_2, etc.

Donc, *si l'on donne successivement à* x *dans la suite des fonctions* V, V_1, V_2, ..., V_r, *deux valeurs* α *et* β (α *étant moindre que* β), *l'excès du nombre des variations qu'on obtiendra en faisant* $x = \alpha$, *sur celui des variations qu'on obtiendra pour* $x = \beta$, *sera égal au nombre des racines réelles différentes de l'équation* $V = 0$ *comprises entre* α *et* β, *abstraction faite du degré de multiplicité de chaque racine.*

434. Parmi les différentes observations que M. Sturm a faites au sujet de son théorème, nous rapporterons encore la suivante :

V_1 étant la fonction dérivée de V, on a vu que si V est nul pour $x = a$, V a le signe contraire à celui de V_1 pour $x = a - u$, et le même signe que V_1 pour $x = a + u$. C'est ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit.

Supposons maintenant que V_1 ne soit plus la fonction dérivée de V, mais que ce soit un polynôme quelconque

d'un degré inférieur à celui de V, et qui n'ait aucun facteur réel du premier degré commun avec V. On pourra se servir de ce polynôme V_1 pour en former d'autres V_2, V_3, etc., de degrés décroissants, par des divisions successives, comme on s'est servi du polynôme dérivé (n° 427).

Considérons ce nouveau système de fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$, qui vérifient aussi les équations (1) du n° 427. Quand x en croissant atteint et dépasse une valeur a qui annule V, il peut arriver que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou enfin qu'il ne change pas de signe. Dans le premier cas, la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$ perd sur sa gauche une variation; dans le deuxième cas elle acquiert, au contraire, une variation; dans le troisième cas le nombre des variations de la suite n'est pas changé. D'ailleurs l'évanouissement d'une fonction intermédiaire entre V et V_r ne peut pas altérer le nombre des variations. De là résulte le théorème suivant, qui remplace celui du n° 428 lorsque la fonction V_1 n'est par la dérivée de V.

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre les deux nombres α et β, pour lesquelles le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, moins le nombre des racines de la même équation comprises entre α et β, pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, est égal au nombre des variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_r$, pour $x = \alpha$, moins le nombre de leurs variations pour $x = \beta$.

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre α et β ne peut donc pas être moindre que la différence entre ces deux nombres de variations; mais il peut être égal à cette différence, ou la surpasser d'un nombre

pair quelconque. Pour qu'il lui soit précisément égal, il faut que V_1 soit la fonction dérivée de V, ou bien une fonction qui ait toujours le même signe que cette dérivée ou bien un signe contraire au sien pour chaque valeur réelle de x comprise entre α et β qui annule V. Comme on ne connaît pas à priori une telle fonction, on est obligé de prendre pour V_1 la fonction dérivée de V, si l'on veut déterminer avec certitude toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$.

Théorème de ROLLE. *Séparation des racines par ce théorème et par celui de* M. BUDAN.

435. On a vu, dans la démonstration du théorème de M. Sturm, que, si a est une racine d'une équation $f(x) = 0$, en désignant par u une quantité positive très-petite, le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ ont des signes contraires pour $x = a - u$, et ils ont le même signe pour $x = a + u$ (nos 428 et 433). Soit b une autre racine de $f(x) = 0$, plus grande que a; $f(x)$ et $f'(x)$ auront des signes contraires quand on fera $x = b - u$. Or, s'il n'y a entre a et b aucune autre racine de l'équation $f(x) = 0$, $f(b - u)$ a le même signe que $f(a + u)$; donc $f'(b - u)$ et $f'(a + u)$ ont des signes contraires; d'où il résulte qu'il y a entre $a + u$ et $b - u$ un nombre impair de racines de $f'(x) = 0$. Donc, *entre deux racines réelles et différentes d'une équation* $f(x) = 0$, *qui n'en comprennent aucune autre, il y a toujours une racine ou un nombre impair de racines de l'équation* $f'(x) = 0$.

Cette proposition est le théorème de Rolle. On en déduit un moyen de trouver les conditions nécessaires pour que toutes les racines d'une équation soient réelles; mais elle est surtout utile pour séparer les racines d'une équation $f(x) = 0$, quand il est possible d'obtenir toutes les racines réelles de l'équation plus simple $f'(x) = 0$.

436. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$ ces racines de $f'(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur, en commençant par les plus petites; et supposons d'abord que l'équation proposée n'ait pas de racines égales, auquel cas elle ne sera vérifiée par aucune des valeurs α, β, γ, etc.

Puisque deux racines quelconques de $f(x) = 0$ doivent comprendre au moins une des quantités α, β, γ, etc., cette équation ne peut avoir qu'une seule racine plus petite que α, une seule comprise entre α et β, une seule entre β et γ, etc., une seule plus grande que λ. Donc, si l'on substitue successivement, à la place de x dans $f(x)$, les nombres $-L'$, α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$, $+L$, en désignant par $-L'$ et $+L$ deux limites quelconques des racines de $f(x) = 0$, on connaîtra par les signes des résultats de ces substitutions quelles sont celles entre lesquelles il y a une racine, et celles entre lesquelles il n'y en a aucune.

Il suffit que la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ soit formée de toutes les racines de $f'(x) = 0$ dont le degré de multiplicité est impair; car, lorsque deux racines consécutives a et b de $f(x) = 0$ comprennent une racine de $f'(x) = 0$ d'un degré de multiplicité pair, elles doivent en comprendre une autre d'un degré de multiplicité impair, puisque les racines de $f'(x) = 0$ comprises entre a et b sont en nombre impair.

Quand l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales, si β est une de ces racines, qui doit se trouver comprise parmi celles de la dérivée, la racine de $f(x) = 0$ immédiatement plus grande que β doit être aussi plus grande que la racine suivante γ de $f'(x) = 0$.

437. On peut séparer de cette manière les racines d'une équation quelconque du troisième ou du quatrième degré. Car, dans le cas d'une équation du troisième degré, l'équation $f'(x) = 0$ est du second degré; de sorte qu'on peut la résoudre. Pour une équation du quatrième degré, si l'on

fait évanouir le second terme, et que l'on change ensuite x en $\frac{1}{x}$, on aura une équation qui ne contiendra pas la première puissance de x; la dérivée aura une racine nulle, et ses deux autres racines seront données par une équation du second degré.

438. Quand on est assuré que toutes les racines d'une équation sont réelles, on peut les séparer en employant, au lieu des fonctions de M. Sturm, les fonctions dérivées successives; puisque, dans ce cas, les signes des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, etc., jusqu'à la constante $f^{(m)}(x)$, pour deux valeurs quelconques de x, font connaître le nombre exact des racines comprises entre ces deux valeurs (n° 398).

439. Le problème de la séparation des racines se trouvant ainsi complétement résolu, pour le cas de la réalité de toutes les racines, par le théorème de M. Budan ou par celui de Fourier, qui lui est équivalent, ces deux géomètres s'étaient efforcés de rendre le même théorème applicable à tous les cas; mais ils n'avaient pu y réussir. A la vérité, Fourier avait énoncé, en 1827, dans les Mémoires de l'Institut, que, lorsqu'il resterait de l'incertitude sur le nombre des racines comprises dans un certain intervalle, elle serait toujours dissipée par les opérations ultérieures pour le calcul des valeurs approchées de ces racines, en les supposant réelles; mais il n'avait donné aucune preuve à l'appui de cette assertion, dont l'exactitude n'a été établie qu'en 1834, par une démonstration de M. Vincent, qui a ainsi complété la méthode de Fourier. M. Ossian Bonnet a montré depuis qu'on peut également parvenir à la détermination de toutes les racines réelles d'une équation, au moyen de la remarque de M. Jacobi, que nous avons mentionnée dans le n° 399. (*Voir* les *Nouvelles Annales des Mathématiques*, décembre 1847.) Les travaux de Fourier

sur les équations ont été réunis dans un ouvrage publié, après sa mort, par les soins de M. NAVIER, sous le titre d'*Analyse des Équations*. Le Mémoire de M. Vincent a d'abord été inséré parmi ceux de la *Société des Sciences de Lille*. Il a été ensuite imprimé séparément sous ce titre : *Note sur la résolution des équations numériques*. (Paris, Bachelier.) On le trouve aussi dans le Journal de M. LIOUVILLE (tome I, 1836).

Méthode d'approximation de NEWTON.

440. Quand on a déterminé deux nombres a et b, qui comprennent une racine d'une équation, et qui n'en comprennent qu'une seule, on peut trouver la valeur aussi approchée qu'on le veut de cette racine par des substitutions successives. Car, si l'on substitue un troisième nombre c compris entre a et b, le signe du résultat fera connaître si la racine est entre a et c ou entre b et c. Supposons qu'elle soit entre b et c; on substituera un nombre intermédiaire d, ce qui fera connaître si la racine est entre b et d ou entre c et d. En continuant de resserrer ainsi les limites de la racine, on parviendra à l'évaluer avec l'approximation que l'on voudra. Mais ces opérations peuvent être remplacées par d'autres beaucoup plus simples, en employant la méthode suivante, due à Newton. Nous exposerons d'abord cette méthode d'après l'usage ordinaire; nous ferons connaître ensuite les perfectionnements qui y ont été apportés par FOURIER.

441. Supposons qu'on ait obtenu une valeur de la racine qui en diffère de moins d'un dixième. Soit a cette valeur approchée, et désignons l'équation par $f(x) = 0$. Si l'on pose $x = a + y$, l'équation en y sera

$$f(a) + f'(a)\,y + f''(a)\frac{y^2}{2} + f'''(a)\frac{y^3}{2.3} + \ldots = 0.$$

En tirant de cette équation la valeur de y, comme si les quantités y^2, y^3, etc., étaient connues, on trouve

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{1}{f'(a)}\left[f''(a)\frac{y^2}{2} + f'''(a)\frac{y^3}{2.3} + \ldots\right]$$

La valeur de y que l'on veut obtenir étant moindre qu'un dixième, y^2 est moindre qu'un centième, y^3 est moindre qu'un millième, etc.; de sorte qu'en négligeant dans l'expression ci-dessus de y, tous les termes qui contiennent ces puissances, il pourra arriver que l'on obtienne la valeur de y à moins d'un centième. On a ainsi

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)};$$

on effectue la division indiquée en s'arrêtant aux centièmes, et l'on ajoute le résultat à la quantité a.

Nommons b la valeur de x qu'on obtient par cette correction, et supposons qu'elle soit exacte à moins d'un centième. En opérant sur cette valeur comme on a opéré sur la précédente, et en nommant y' ce qu'il faut ajouter à b pour avoir la racine, on trouvera

$$y' = -\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

La valeur de y' devant être moindre qu'un centième, d'où il suit que y'^2, y'^3, etc., sont des quantités toutes moindres qu'un dix-millième, on calculera la valeur de y' jusqu'aux dix-millièmes; on ajoutera ensuite le résultat à b.

Si la valeur de x qu'on obtient par cette seconde correction est exacte à moins d'un dix-millième, on s'en servira pour calculer de la même manière une troisième valeur encore plus approchée; et cette fois on poussera l'approximation jusqu'à la huitième décimale. On continuera ainsi, en doublant chaque fois le nombre des décimales de la

valeur de x, jusqu'à ce qu'on ait l'approximation nécessaire.

On doit remarquer que, dans la pratique, les corrections successives sont toutes données par la même formule. Ainsi, en posant généralement

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

on remplacera d'abord x par a, on calculera la valeur de y jusqu'aux centièmes, et on l'ajoutera à a, ce qui donnera la seconde valeur approchée b; on remplacera ensuite x par b, on calculera la valeur de y jusqu'aux dix-millièmes, et on l'ajoutera à b, ce qui donnera la troisième valeur approchée; ainsi de suite.

442. Cette méthode, telle que nous venons de la présenter, n'offre aucune certitude; et il peut arriver qu'au lieu d'approcher de la racine, on obtienne, au contraire, des nombres qui s'en éloignent de plus en plus. Il est donc nécessaire de vérifier, après chaque correction, si toutes les décimales qu'on a calculées appartiennent réellement à la valeur de la racine que l'on cherche.

Considérons d'abord la valeur b fournie par la première correction, et qui est exprimée avec deux décimales. On substituera cette valeur dans l'équation, et, suivant que l'on connaîtra par le signe du résultat, comparé aux signes des résultats des substitutions qui auront été faites précédemment, que la racine est plus grande ou plus petite que b, on substituera $b + \frac{1}{100}$, ou bien $b - \frac{1}{100}$. Si le résultat de cette seconde substitution a un signe contraire à celui de la première, on sera certain que la quantité b ne diffère pas de la racine d'un centième; mais si les deux résultats ont le même signe, on en conclura que la correction est fautive ou insuffisante. Dans ce cas, pour se servir de la méthode de Newton, il faudra partir d'une valeur plus approchée,

qu'on pourra obtenir en cherchant le chiffre des centièmes, comme il a été dit dans le numéro précédent.

On agira de la même manière pour les valeurs qui résulteront des autres corrections. C'est-à-dire qu'après chaque opération, on substituera d'abord la valeur qu'on aura obtenue, et ensuite cette valeur augmentée ou diminuée d'une unité du dernier ordre. Si l'on trouve que la seconde correction, dans laquelle on prend quatre décimales, ne fournit pas une valeur approchée à moins d'un dix-millième, on supprimera la dernière décimale; et si celles qui restent sont exactes, on passera à une autre correction qu'on étendra jusqu'aux millionièmes, sauf à supprimer ensuite une ou deux décimales.

443. 1er Exemple. — Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Les règles qui ont été exposées précédemment font connaître que cette équation a une seule racine réelle, qui est comprise entre 2 et 3. En substituant 2,5, on a un résultat positif, et comme 2 donne un résultat négatif, la racine est comprise entre 2 et 2,5. En substituant 2,2, on a encore un résultat positif. La racine est donc 2,1 à moins d'un dixième.

La dérivée du premier membre est $3x^2 - 2$; ainsi la formule des corrections est

$$y = -\frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2}.$$

On fait dans cette formule $x = 2,1$, ce qui donne

$$y = -\frac{0,061}{11,23}.$$

On doit calculer la valeur de y jusqu'aux centièmes; mais le quotient de 0,061 par 11,23 étant plus petit qu'un centième, il s'ensuit que, si la méthode n'est pas en défaut,

le nombre 2,1 diffère de la racine de moins d'un centième; on peut donc pousser immédiatement la correction jusqu'aux dix-millièmes. On trouve alors $y = -0,0054$, et l'on en conclut

$$x = 2,0946.$$

En substituant cette seconde valeur dans la formule ci-dessus, et calculant la valeur de y avec huit décimales, on trouve $y = -0,00004851$, et l'on en conclut

$$x = 2,09455149.$$

En continuant les calculs, on pourra pousser le nombre des décimales aussi loin qu'on le voudra.

Pour procéder avec plus de certitude, il aurait fallu s'assurer d'abord que le nombre 2,1 exprime la valeur de la racine à moins d'un centième, et que la valeur qu'on en déduit ensuite est exacte à moins d'un dix-millième. Mais en négligeant ces précautions, et en se bornant à vérifier la dernière valeur, qui est exprimée avec huit décimales, on voit qu'elle a tous ses chiffres exacts; car en substituant cette valeur on a un résultat positif; et en substituant 2,09455148 on a un résultat négatif.

444. Avant d'expliquer comment la méthode de Newton peut être employée de manière à donner des résultats dont l'exactitude soit certaine, il nous faut établir quelques formules préliminaires.

Désignons par $F(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions entières de z, et soit $F(z) = z\varphi(z)$. Si l'on pose l'équation

$$F(u) - u\varphi(z) = 0,$$

cette équation sera vérifiée par $u = 0$ et par $u = z$. Donc, en vertu du théorème de Rolle (n° 435), la dérivée du premier membre par rapport à u, $F'(u) - \varphi(z)$, sera rendue nulle par une valeur de u comprise entre zéro et z. Soit θz

cette valeur, θ sera un nombre compris entre zéro et 1, et on aura

$$F'(\theta z) - \varphi(z) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(z) = F'(\theta z);$$

par suite,

$$F(z) = zF'(\theta z).$$

Soit $F(z) = z^2\varphi(z)$. Si l'on pose l'équation

$$F(u) - u^2\varphi(z) = 0,$$

cette équation sera vérifiée par $u = 0$ et par $u = z$; donc la dérivée du premier membre par rapport à u sera rendue nulle par une valeur z_1 de z comprise entre zéro et z. Cette dérivée est $F'(u) - 2u\varphi(z)$, et elle est aussi rendue nulle par $u = 0$; car, puisque $F(u) = u^2\varphi(u)$, $F(u)$ est divisible par u^2, d'où il suit que $F'(u)$ est divisible par u. La quantité $F'(u) - 2u\varphi(z)$ étant nulle pour $u = 0$ et pour $u = z_1$, sa dérivée par rapport à u, $F''(u) - 2\varphi(z)$, sera rendue nulle par une valeur de u comprise entre zéro et z_1; cette valeur sera comprise entre zéro et z; en la représentant, comme précédemment, par θz, θ sera un nombre compris entre zéro et 1, et on aura

$$F''(\theta z) - 2\varphi(z) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}F''(\theta z);$$

par suite,

$$F(z) = \frac{z^2}{2}F''(\theta z).$$

445. Considérons la fonction $f(x+h)$. La différence $f(x+h) - f(x)$ est une quantité de la forme $h\varphi(h)$, et sa dérivée par rapport à h est $f'(x+h)$ (*). Donc, d'après

(*) La dérivée par rapport à h de $f(x+h)$ est le coefficient de la première puissance de k dans le développement de $f(x+h+k)$; or, en posant $x+h=z$, on a

$$f(x+h+k) = f(z+k) = f(z) + f'(z)k + \ldots;$$

la dérivée de $f(x+h)$ est donc $f'(z)$ ou $f'(x+h)$.

les formules du numéro précédent, on a

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

La différence $f(x+h) - f(x) - hf'(x)$ a tous ses termes divisibles par h^2; ainsi elle est de la forme $h^2\varphi(h)$. Les deux premières dérivées de cette différence, par rapport à h, sont $f'(x+h) - f'(x)$ et $f''(x+h)$. Donc

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h).$$

446. Revenons maintenant à la méthode de Newton. Soient a et b deux nombres qui comprennent une racine α de l'équation $f(x) = 0$ et qui n'en comprennent qu'une seule. Supposons $a < b$ et représentons par y et y_1 les différences $\alpha - a$ et $b - \alpha$; d'où $\alpha = a + y$ et $\alpha = b - y_1$. Les valeurs approchées de y et y_1 données par la méthode sont

$$(3) \qquad -\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad (4) \qquad \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Or, en remplaçant x dans l'équation par $a+y$ et par $b-y_1$, on obtient, d'après la formule (1),

$$f(a) + yf'(a+\theta y) = 0, \quad f(b) - y_1 f'(b-\theta y_1) = 0;$$

d'où

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a+\theta y)}, \qquad y_1 = \frac{f(b)}{f'(b-\theta y_1)}.$$

Les quantités y et y_1 sont positives, et la méthode serait fautive si les termes de correction (3) et (4) étaient négatifs; il faut donc que $f'(a)$ ait le même signe que $f'(a+\theta y)$, et que $f'(b)$ ait le même signe que $f'(b-\theta y_1)$. Or on ne peut être assuré que cette condition est remplie, que si $f'(x)$ ne change pas de signe depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Il faut donc que les limites a et b ne comprennent aucune racine de $f'(x) = 0$.

La méthode sera encore fautive si les valeurs des termes de correction surpassent la différence $b-a$; et pour que l'on soit assuré que les quantités $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$, $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$ sont plus approchées de la racine que les deux limites a et b, il faut que la première quantité ne surpasse pas cette racine et que la seconde ne lui soit pas inférieure. Or, on a, d'après la formule (2), en remplaçant x dans $f(x)$ par $a+y$ et par $b-y_1$,

$$f(a)+yf'(a)+\frac{y^2}{1.2}f''(a+\theta y)=0,$$

$$f(b)-y_1f'(b)+\frac{y_1^2}{1.2}f''(b-\theta y_1)=0;$$

d'où l'on conclut

$$(5)\qquad y=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{f''(a+\theta y)}{f'(a)}\frac{y^2}{1.2},$$

$$(6)\qquad y_1=\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{f''(b-\theta y_1)}{f'(b)}\frac{y_1^2}{1.2}.$$

La dernière condition énoncée sera donc remplie si $-\frac{f''(a+\theta y)}{f'(a)}$ et $\frac{f''(b-\theta y_1)}{f'(b)}$ sont des quantités positives.

Nous pouvons supposer que la racine α ne réduit pas $f''(x)$ à zéro; car, si les équations $f(x)=0$ et $f''(x)=0$ ont des racines communes, on pourra remplacer la première équation par deux autres plus simples, en déterminant le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f''(x)$.

La racine α n'annulant ni $f'(x)$ ni $f''(x)$, on peut rendre les limites a et b assez rapprochées pour qu'elles ne comprennent aucune racine de $f'(x)=0$, ni de $f''(x)=0$; et on peut toujours s'assurer si ces conditions sont remplies, en appliquant, s'il est nécessaire, le théorème de M. Sturm à ces deux équations. Alors $f'(a)$ et $f'(b)$ ont le même signe, et $f''(a+\theta y)$ et $f''(b-\theta y_1)$ ont aussi le même signe. Il suit de là que l'une des deux formules de

correction (3) et (4) pourra être fautive, mais que l'autre ne le sera pas; et que, si $f''(a)$ et $f''(b)$ sont de signe contraire à $f'(a)$, on devra appliquer la formule (3); et si $f''(a)$ et $f''(b)$ ont le même signe que $f'(a)$, on devra appliquer la formule (4).

Comme $f'(a)$ est de signe contraire à $f(a)$, et de même signe que $f(b)$, on voit qu'il faudra employer celle des deux limites a et b pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ auront le même signe. On déduira de cette limite une suite de valeurs de plus en plus approchées de la racine, et qui en approcheront toutes dans le même sens.

447. Pour reconnaître le degré d'approximation que l'on obtiendra à chaque opération, considérons le cas où l'on doit employer la plus petite limite a. L'erreur de la correction $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ est le terme $\frac{-f''(a+\theta y)}{f'(a)}\frac{y^2}{2}$. Nommons e cette erreur. Soit M un nombre plus grand que toutes les valeurs de $\pm f''(x)$ pour les valeurs de x comprises entre a et b, et soit N un nombre moindre que toutes les valeurs de $\pm f'(x)$ pour les mêmes valeurs de x. On aura pendant toute la durée des opérations

$$e < \frac{M}{2N} y^2. \tag{7}$$

Pour calculer la quantité M, si la valeur de $f''(x)$ est positive entre $x = a$ et $x = b$, il suffit de remplacer x dans les termes positifs par la plus grande limite b, et dans les termes négatifs, par la plus petite limite a. Si, au contraire, la valeur de $f''(x)$ est négative entre $x = a$ et $x = b$, il faut remplacer x dans les termes négatifs par la plus grande limite b, et dans les termes positifs, par la plus petite limite a; la valeur absolue de la différence des deux sommes qu'on obtient ainsi est le nombre M. A l'égard du nombre N, puisque $f''(x)$ ne change pas de signe depuis

$x = a$ jusqu'à $x = b$, la fonction dérivée $f'(x)$ est constamment croissante ou constamment décroissante dans cet intervalle, et comme elle est de signe contraire à $f''(x)$ dans le cas que nous examinons, on devra prendre pour N la valeur absolue de $f''(b)$ (*). Quand on doit employer, pour les corrections successives, la plus grande limite b, l'approximation qu'on obtient à chaque opération est encore indiquée par la formule (7), et on obtient le nombre M de la même manière que dans le cas précédent, mais le nombre N est alors la valeur absolue de $f'(a)$.

Soit $y < \frac{1}{10^n}$ et $\frac{M}{2N} < \frac{1}{10^p}$, l'exposant p pouvant être négatif; on aura $e < \frac{1}{10^{2n+p}}$, et, pour que l'on soit assuré d'obtenir des chiffres exacts au delà de ceux qui seront déjà connus, il faudra que l'on ait $2n + p > n$, ou $p > -n$.

Lorsque l'on réduira en décimales la quantité $-\frac{f(a)}{f'(a)}$; ou $\frac{f(b)}{f'(b)}$, en prenant seulement $2n + p$ chiffres, on com-

(*) On a

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x) + \frac{h^2}{2} f'''(x) + \ldots$$

On peut prendre h assez petit pour que le second membre de cette égalité ait le signe de son premier terme $hf''(x)$. Donc, h étant positif, si $f''(x)$ est une quantité positive, on a

$$f'(x+h) > f'(x);$$

si, au contraire, $f''(x)$ est une quantité négative, on a

$$f'(x+h) < f'(x).$$

Il suit de là que la fonction $f'(x)$ est croissante quand $f''(x)$ a une valeur positive; et qu'elle est décroissante quand $f''(x)$ a une valeur négative. Si $f'(x)$ est de signe contraire à $f''(x)$, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, lorsqu'elle sera croissante elle sera négative, et sa plus petite valeur absolue correspondra à la plus grande limite b, lorsqu'elle sera décroissante elle sera positive, et sa plus petite valeur sera encore donnée par la plus grande limite b.

mettra sur le quotient une erreur qui s'ajoutera à l'erreur e. La valeur exacte de la fraction sur laquelle on opérera étant toujours trop faible, pour être assuré que l'erreur totale ne sera pas d'une unité du dernier chiffre, on devrait prendre le quotient par excès; mais le sens de l'approximation du résultat serait incertain, et il pourrait arriver que la valeur qu'on obtiendrait ainsi ne fût pas celle qu'il faudrait employer dans l'opération suivante. On devra préférer, par cette raison, le quotient par défaut. Si l'erreur est de plus d'une unité du dernier chiffre, on en sera averti par la correction suivante qui portera sur ce chiffre; on en tiendra compte dans l'estimation de l'approximation qui devra résulter de cette nouvelle opération, et on ne conservera que les chiffres dont l'exactitude sera certaine, sauf l'erreur produite par la réduction en décimales.

448. Appliquons ces principes à l'exemple du n° 443. Les nombres 2 et 2,1 ne comprennent aucune racine de $f'(x) = 0$ ni de $f''(x) = 0$. La dérivée du second ordre étant positive pour toute valeur positive de x, on doit employer la limite 2,1 qui est plus grande que la racine. On a

$$M = 12{,}6, \quad N = 10, \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{2N} < 1;$$

ainsi on peut doubler à chaque opération le nombre des chiffres décimaux. Les corrections calculées avec les valeurs approchées 2,10 et 2,0946, font voir que le dernier chiffre de chacune de ces valeurs approchées est exact. Si l'on s'arrête après avoir calculé huit chiffres décimaux, on pourra craindre que l'erreur ne soit de plus d'une unité du dernier chiffre, et il faudra diminuer ce chiffre de 1. On reconnaîtra alors, en faisant la substitution, que le résultat est approché par défaut.

2e Exemple. — Soit l'équation $6x^3 - 141x + 263 = 0$.

On reconnaît, comme dans l'exemple II du n° 429, que les trois racines sont réelles, que deux d'entre elles sont positives, et qu'elles sont moindres que $\sqrt{\frac{141}{6}}$. Les nombres entiers inférieurs à $\sqrt{\frac{141}{6}}$ sont 0, 1, 2, 3, 4; et en les substituant dans l'équation, on n'a que des résultats positifs. Pour séparer les deux racines positives au moyen du théorème de Rolle, on cherche la racine positive de l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $18x^2 - 141 = 0$. Cette racine est $\sqrt{\frac{141}{18}}$, ou, à très-peu près, 2,8. En substituant 2,8 dans l'équation on obtient un résultat négatif; ainsi l'une des racines est plus petite que 2,8, et l'autre est plus grande que ce nombre. La substitution de 2,7 et celle de 2,9 donnent des résultats positifs; ainsi l'une des racines est entre 2,7 et 2,8; l'autre est entre 2,8 et 2,9.

Occupons-nous d'abord de la plus petite racine. Comme les nombres 2,7 et 2,8 comprennent une racine de l'équation $f'(x) = 0$, il faut obtenir des limites plus rapprochées. La substitution de 2,75 donne un résultat positif, et celle de 2,76 donne un résultat négatif. Donc la racine est entre 2,75 et 2,76. La dérivée du second ordre étant positive pour toutes les valeurs positives de x, on doit faire usage de la plus petite limite, qui donne un résultat positif. On a

$$M = 36 \times 2{,}76 \quad \text{et} \quad N = 141 - 18 \times (2{,}76)^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{2N} < 13.$$

Ainsi la première correction pourra ne pas donner exactement le chiffre des millièmes; mais lorsque ce chiffre aura été déterminé, chacune des corrections suivantes fera trouver de nouveaux chiffres exacts, dont le nombre ne sera pas inférieur de plus de deux unités à celui des chiffres décimaux de la valeur qui aura été employée.

Pour la plus grande racine, les limites 2,8 et 2,9 ne comprennent aucune racine de la dérivée; de sorte qu'on peut appliquer la méthode en partant de ces limites, et il

faut employer la plus grande limite; mais en calculant la fraction $\frac{M}{2N}$ avec les nombres 2,8 et 2,9, on trouve que la valeur de cette fraction surpasse 400, ce qui ne permet pas d'apprécier l'approximation de la première correction. Cette correction calculée jusqu'aux centièmes est 0,94, et elle doit être soustraite. On est assuré par là que la racine est plus petite que 2,86. La substitution de 2,85 donne un résultat positif, et celle de 2,84 donne un résultat négatif; ainsi la racine est entre 2,84 et 2,85. Ces limites donnent

$$M = 36 \times 2{,}85, \quad N = 18 \times (2{,}84)^2 - 141, \quad \text{d'où } \frac{M}{2N} < 13.$$

En continuant les opérations, on ne sera pas assuré d'obtenir exactement le chiffre des millièmes; mais lorsque ce chiffre aura été déterminé, chacune des corrections suivantes fera trouver de nouveaux chiffres exacts, et leur nombre ne sera pas inférieur de plus de deux unités à celui des chiffres décimaux de la valeur qui aura été employée.

On peut se dispenser de calculer directement la racine négative; car sa valeur absolue est la somme de deux racines positives.

Méthode d'approximation de LAGRANGE.

449. Soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs qui comprennent une seule racine d'une équation. Si l'on pose $x = a + \frac{1}{y}$, l'équation résultante en y aura nécessairement une racine plus grande que 1; et parmi les racines de cette équation en y, il n'y en aura qu'une seule plus grande que 1; autrement il y aurait plusieurs valeurs de x entre a et $a+1$, ce qui est contre l'hypothèse. On pourra donc déterminer la partie entière de cette valeur de y, en substituant successivement dans l'équation en y les nombres

entiers 1, 2, 3, etc., jusqu'à ce que l'on ait obtenu deux résultats de signes contraires.

Soient b et $b+1$ les deux nombres qui donnent ces résultats de signes contraires. Si l'on pose $y = b + \frac{1}{z}$, l'équation résultante en z aura encore une seule racine plus grande que 1, et l'on pourra déterminer la partie entière de cette valeur de z, en opérant de la même manière que pour la valeur de y.

Si c est la partie entière de la valeur de z, on posera $z = c + \frac{1}{u}$; ainsi de suite.

On aura de cette manière la valeur de x exprimée par une fraction continue.

450. On pourra calculer les transformées successives en y, z, etc., au moyen des dérivées (n° 369). L'équation proposée étant exprimée par $f(x) = 0$, celle qu'on obtiendra en posant $x = a + \frac{1}{y}$ sera

$$f(a) + f'(a)\frac{1}{y} + \frac{f''(a)}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{f'''(a)}{2.3}\frac{1}{y^3} + \ldots = 0.$$

On chassera les dénominateurs en multipliant tous les termes par y^m, m étant le degré de l'équation, ce qui donnera

$$f(a)y^m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{2}y^{m-2} + \frac{f'''(a)}{2.3}y^{m-3} + \ldots = 0.$$

Si l'on représente le premier membre de cette équation par $\varphi(y)$, la transformée suivante sera

$$\varphi(b)z^m + \varphi'(b)z^{m-1} + \frac{\varphi''(b)}{2}z^{m-2} + \frac{\varphi'''(b)}{2.3}z^{m-3} + \ldots = 0;$$

et de même pour toutes les autres

451. Quand les nombres a et $a+1$ comprennent plusieurs racines de l'équation proposée, la transformée en y qu'on obtient en posant $x = a + \frac{1}{y}$ a aussi plusieurs racines plus grandes que 1; de sorte que la substitution des nombres entiers 1, 2, 3, etc., à la place de y, peut ne plus suffire pour faire connaître les parties entières des valeurs de y; mais quand on a effectué, par quelque méthode que ce soit, la séparation des racines, il est toujours facile de voir par quel nombre on doit multiplier les racines qui sont comprises entre les mêmes nombres entiers, afin de les changer en d'autres dont les parties entières soient différentes. De cette manière le calcul des valeurs approchées des racines par la méthode de Lagrange se ramène toujours à ce qui a été dit ci-dessus. Au reste, quand les différences des racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs a et $a+1$ ne sont pas des fractions très-petites, on peut encore opérer directement sur l'équation proposée, ainsi qu'on le verra dans le deuxième exemple ci-après.

452. 1er Exemple. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Cette équation ayant une seule racine réelle qui est comprise entre 2 et 3 (n° 443), on pose $x = 2 + \frac{1}{y}$. On a

$$f(2) = 2^3 - 2.2 - 5 = -1,$$
$$f'(2) = 3.2^2 - 2 = 10,$$
$$\tfrac{1}{2} f''(2) = 3.2 = 6,$$
$$\tfrac{1}{2.3} f'''(2) = 1.$$

1re transformée. $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$.

Il est facile de voir, sans faire la substitution, que $y = 10$ donne un résultat négatif; d'ailleurs $y = 11$ donne un résultat positif (n° 400); la valeur de y est donc comprise

entre 10 et 11. En posant $y = 10 + \frac{1}{z}$, on trouve

$$\varphi(10) = 10^3 - 10.10^2 - 6.10 - 1 = -61,$$
$$\varphi'(10) = 3.10^2 - 20.10 - 6 = 94,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi''(10) = 3.10 - 10 = 20,$$
$$\tfrac{1}{2.3}\varphi'''(10) = 1.$$

2ᵉ transformée. $61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0.$

L'hypothèse $z = 2$ donnant un résultat positif, on en conclut que la valeur de z est comprise entre 1 et 2; il faut donc poser $z = 1 + \frac{1}{u}$. On obtient

$$\psi(1) = 61.1^3 - 94.1^2 - 20.1 - 1 = -54,$$
$$\psi'(1) = 183.1^2 - 188.1 - 20 = -25,$$
$$\tfrac{1}{2}\psi''(1) = 183.1 - 94 = 89,$$
$$\tfrac{1}{2.3}\psi'''(1) = 61.$$

3ᵉ transformée. $54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0.$

Cette équation fait connaître que la valeur de u est comprise entre 1 et 2.

En continuant les opérations, les quotients incomplets suivants sont 1, 2, 1, 3, 1, etc., et il en résulte les réduites

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \ldots$$

En s'arrêtant à la fraction $\frac{731}{349}$, on a une valeur trop forte (nº 246); mais l'erreur est moindre que $\frac{1}{349(349+275)}$ ou $\frac{1}{217776}$ (nº 250). Cette dernière fraction étant plus petite que 0,000005, on peut obtenir, au moyen de la

réduite $\frac{731}{349}$, une valeur approchée de la racine avec cinq décimales exactes; cette valeur est 2,09455.

2e Exemple. $x^3 - 7x + 7 = 0$.

On a vu que cette équation a une racine négative comprise entre -3 et -4, et deux racines positives comprises l'une entre 1 et $\frac{3}{2}$, et l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2 (n° 429). Pour obtenir une équation dont les racines positives n'aient pas la même partie entière, il suffit de remplacer x par $\frac{x'}{2}$: la transformée est

$$x'^3 - 28x' + 56 = 0;$$

et elle a une racine comprise entre 2 et 3, et une autre comprise entre 3 et 4.

En opérant sur cette équation comme dans l'exemple précédent, on trouve pour la première racine les quotients incomplets 2, 1, 2, 2, 40, etc., et en prenant la cinquième réduite, on en déduit une valeur approchée de la racine avec quatre décimales exactes, qui est 2,7138.

Les quotients incomplets de la racine comprise entre 3 et 4, sont 3, 2, 1, 1, 1, 1, 9, etc. La septième réduite donne une valeur approchée de la racine avec quatre décimales exactes, qui est 3,3840.

Il suit de là que les valeurs approchées des deux racines positives de l'équation proposée, à moins d'un demi-dix-millième, sont 1,3569 et 1,6920.

Pour calculer la racine négative, on devra changer x en $-x$; mais on peut se dispenser de calculer directement cette racine; car, la somme des racines étant nulle, la valeur absolue de la racine négative est égale à la somme des deux racines positives.

On pourrait calculer les deux racines positives sans faire subir à l'équation aucune transformation; car, l'une de ces

racines étant comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$, et l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2, si l'on pose $x = 1 + \frac{1}{y}$, l'inconnue y aura seulement deux valeurs positives, l'une plus grande que 2, l'autre comprise entre 1 et 2. L'équation qui résulte de la substitution de $1 + \frac{1}{y}$ à la place de x est $y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$. En faisant $y = 1$, on a un résultat positif; $y = 2$ donne un résultat négatif, et $y = 3$ donne un résultat positif; ainsi la partie entière de la plus grande valeur de y est 2. En posant $y = 2 + \frac{1}{z}$, et $y = 1 + \frac{1}{z}$, on obtiendra deux transformées qui auront chacune une seule racine plus grande que l'unité.

453. Lorsqu'on calcule une racine par la méthode de Lagrange, on peut obtenir une fraction continue périodique. Cette racine est alors une quantité de la forme $a + \sqrt{b}$, qu'on détermine au moyen d'une équation du second degré (n° 254). Soit $x^2 + px + q = 0$ cette équation du second degré, et soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Si les coefficients de l'équation $f(x) = 0$ sont rationnels, son premier membre sera exactement divisible par $x^2 + px + q$. En effet, on peut effectuer la division jusqu'à ce que le reste ne contienne x qu'au premier degré. Soit $Mx + N$ le reste, et soit Q le quotient; on aura

$$f(x) = (x^2 + px + q)\,Q + Mx + N.$$

Si l'on remplace x dans les deux membres de cette égalité par $a + \sqrt{b}$, le premier membre sera zéro, $(x^2 + px + q)Q$ sera aussi zéro; par conséquent $Mx + N$ devra être aussi zéro. Or il faut, pour cela, que l'on ait $M = 0$, $N = 0$; autrement, comme M et N sont des quantités rationnelles, on aurait une quantité rationnelle égale à une quantité irrationnelle, ce qui est impossible: $f(x)$ est donc divisible par $x^2 + px + q$.

Il suit de là que, lorsque l'on trouve une suite de quotients incomplets qui se reproduisent dans le même ordre, pour s'assurer si la racine est réellement exprimée par une fraction continue périodique, il faut former l'équation du second degré qui donnerait la valeur de cette fraction continue périodique, et voir si le premier membre est un diviseur du premier membre de l'équation proposée. Si la division se fait exactement, on connaîtra deux racines de l'équation, et la recherche des autres racines ne dépendra que d'une équation d'un degré moindre de deux unités (*).

454. Si l'on n'a pas supprimé les racines commensurables, on pourra les obtenir par la méthode de Lagrange; elles seront exprimées par des fractions continues terminées; mais, tant que l'on n'est pas parvenu à une transformée qui admet une racine entière, on ne peut pas être assuré que la fraction continue ne se prolongera pas indéfiniment. La méthode de Newton donnerait également les racines commensurables; elles seraient exprimées par des fractions décimales terminées ou périodiques. Mais si l'on devait parvenir à une fraction décimale périodique, les calculs ne pourraient que faire soupçonner la périodicité; et pour lever l'incertitude, il faudrait substituer dans l'équation la fraction ordinaire équivalente à la fraction périodique.

455. En combinant la méthode de Lagrange avec le théorème de M. Sturm, on peut calculer toutes les racines

(*) On pourrait penser que, lorsqu'on doit obtenir une fraction continue périodique, on parviendra, après un certain nombre d'opérations, à une transformée identique avec l'une des précédentes. Mais il n'en est pas ainsi, et les transformées successives sont toujours différentes. Cette propriété des transformées se conclut de celle que M. Vincent a démontrée dans le Mémoire cité à la page 472, et dont l'auteur a tiré, pour l'emploi de la méthode de Newton, des règles qui conduisent au même but que celles qui ont été expliquées dans le n° 446.

d'une équation qui ont la même partie entière, sans faire subir à ces racines aucune transformation.

Supposons que a et $a+1$ soient deux nombres qui comprennent plusieurs racines. On fera, selon la méthode de Lagrange, $x = a + \frac{1}{y}$; mais au lieu de se borner à substituer $a + \frac{1}{y}$ à la place de x dans l'équation proposée, que nous représenterons par $V = 0$, on fera en outre la même substitution dans les fonctions que nous avons désignées par V_1, V_2, V_3, etc., en s'arrêtant à la première fonction qui garde le même signe pour toutes les valeurs de x. Si l'on substitue alors dans les fonctions résultantes en y les nombres entiers consécutifs, la différence entre les nombres des variations que donneront les signes de ces fonctions pour deux nombres consécutifs b et $b+1$ sera le nombre des valeurs de y comprises entre b et $b+1$. Car, puisque l'on a posé $x = a + \frac{1}{y}$, les résultats qu'on obtient en substituant pour y les nombres b et $b+1$, sont ceux qu'on aurait en substituant $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$ à la place de x dans les polynômes primitifs V, V_1, V_2, etc. Ainsi la différence entre les deux nombres des variations que présentent les signes de ces résultats, est égale au nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$, et auxquelles répondent autant de valeurs de y comprises entre b et $b+1$.

S'il y a plusieurs valeurs de y comprises entre b et $b+1$, on posera $y = b + \frac{1}{z}$, et l'on remplacera y par $b + \frac{1}{z}$ dans toutes les fonctions précédentes en y; on substituera ensuite pour z, dans les nouvelles fonctions, les nombres entiers consécutifs. Ainsi de suite.

Quand une des inconnues successives y, z, etc., n'aura qu'une seule valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs, on continuera les calculs pour cette valeur, en ne considérant plus que la seule transformée qui proviendra de la fonction V.

Comme on n'a besoin que de connaître les signes et non les valeurs des fonctions de y pour chaque nombre substitué à la place de y, on pourra multiplier ces fonctions par des facteurs positifs. Ainsi, après avoir mis $a + \frac{1}{y}$ à la place de x dans la fonction V, on pourra multiplier la fonction résultante par y^m, ce qui revient à prendre immédiatement pour cette fonction celle qu'on obtient en opérant comme il a été dit dans le n° 450. Il en serait de même des fonctions transformées qui se déduiraient des polynômes V_1, V_2, etc., et de toutes les fonctions semblables que l'on aurait à considérer dans la suite des calculs.

Quand on doit calculer avec une grande approximation des racines qui sont très-peu différentes, on peut d'abord obtenir, par les moyens que nous venons d'indiquer, une valeur suffisamment approchée de chaque racine, puis recourir à la méthode de Newton, pour avoir une valeur plus exacte.

Exemple. $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$

Cette équation a deux racines comprises entre 3 et 4; ainsi, en posant $x = 3 + \frac{1}{y}$, y a deux valeurs plus grandes que 1; en remplaçant x par $3 + \frac{1}{y}$, dans les fonctions V, V_1, V_2, et en substituant ensuite pour y les nombres 1, 2, 3, 4, etc., on voit que les deux valeurs de y sont comprises entre 4 et 5. Il faut alors poser $y = 4 + \frac{1}{z}$, et z doit avoir deux

valeurs plus grandes que 1. L'une de ces valeurs de z est comprise entre 1 et 2, et l'autre entre 2 et 3. Arrivé à ce point, on n'a plus besoin de considérer les fonctions auxiliaires, et l'on peut continuer à développer les deux racines en fractions continues, comme nous l'avons expliqué dans le n° 449.

Lorsqu'on a trouvé la valeur de chacune des deux racines à moins de 0,001, en calculant trois chiffres de plus par la méthode de Newton, on obtient, pour les valeurs approchées de ces racines, 2,213128, et 3,229521.

CHAPITRE QUINZIÈME.

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION, POUR LA RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES, DE DEGRÉ QUELCONQUE, A DEUX INCONNUES. ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES. RACINES IMAGINAIRES.

Sur la forme des équations à deux inconnues.

456. Lorsqu'une équation contient deux inconnues x et y, on peut l'ordonner par rapport à l'une des inconnues, x par exemple. On la ramène ainsi à cette forme :

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Hx + K = 0,$$

les coefficients A, B, C...H, K étant des polynômes en y.

Pour que l'équation soit du degré m, il faut que le coefficient A soit une quantité indépendante de y; que B ne contienne aucune puissance de y supérieure à la première; que C ne contienne aucune puissance de y supérieure à la seconde; ainsi de suite; enfin que K ne contienne que des puissances de y dont l'exposant ne surpasse pas m. On a donc tous les termes que l'équation peut contenir en posant

$$\begin{aligned} B &= b_0 + b_1 y, \\ C &= c_0 + c_1 y + c_2 y^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K &= k_0 + k_1 y + k_2 y^2 + \ldots + k_m y^m. \end{aligned}$$

De sorte que l'équation générale du degré m à deux inconnues est

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &Ax^m + (b_0 + b_1 y)x^{m-1} + (c_0 + c_1 y + c_2 y^2)x^{m-2} \ldots \\ &\qquad + k_0 + k_1 y + k_2 y^2 + \ldots + k_m y^m = 0. \end{aligned} \right.$$

En supposant $m = 2$, on obtient l'équation générale du

second degré à deux inconnues

$$A x^2 + (b_0 + b_1 y) x + c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0.$$

Comme une équation n'est pas altérée quand on divise tous les termes par un même nombre, on peut toujours faire en sorte que le coefficient de l'un des termes soit l'unité. Mais, dans une équation générale, on doit donner à chaque terme un coefficient indéterminé; car, si l'on supposait, par exemple, $A = 1$, l'équation (2) ne comprendrait plus les équations du degré m qui ne contiendraient pas la $m^{ième}$ puissance de l'inconnue x.

457. Quand il faut déterminer les coefficients d'une équation générale à deux inconnues de manière à obtenir une équation particulière qui satisfasse à des conditions indiquées, un des coefficients inconnus reste nécessairement arbitraire, et lorsque l'on a trouvé les valeurs de tous les autres coefficients exprimées au moyen de ce coefficient arbitraire, en mettant ces valeurs dans l'équation générale, le coefficient arbitraire est facteur dans tous les termes, et on peut le supprimer. Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer ainsi une équation du degré m est inférieur d'une unité au nombre des coefficients de l'équation (2); par conséquent il est

$$2 + 3 + 4 + \ldots + (m + 1) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2} m (m + 3).$$

Si l'on supposait l'un des coefficients inconnus égal à l'unité, et si l'équation cherchée ne devait pas contenir le terme auquel ce coefficient appartiendrait, on ne pourrait pas trouver des valeurs finies pour les autres coefficients; et le but du calcul ne pourrait pas être atteint.

Observations préliminaires sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

458. Pour résoudre deux équations à deux inconnues x et y, quand l'une d'elles est du premier degré par rapport à une des inconnues x, il faut tirer de cette équation la valeur de x exprimée en fonction de y; la substitution de cette valeur dans l'autre équation en fournit une qui ne contient plus que y. Lorsque les valeurs de y sont connues, en les mettant successivement dans la valeur de x exprimée en fonction de y, on obtient les valeurs correspondantes de x.

Ce procédé peut encore être appliqué lorsque l'une des équations n'est que du second degré par rapport à x. On déduit de cette équation deux valeurs de x qui peuvent être représentées par $p+\sqrt{q}$ et $p-\sqrt{q}$, p et q désignant des fonctions rationnelles de y. En substituant successivement chacune de ces valeurs à la place de x dans l'autre équation, on obtient deux équations en y; la résolution de ces deux équations donne toutes les valeurs de y qui conviennent au système proposé.

L'équation qui résulte de la substitution de $p+\sqrt{q}$ à la place de x, dans la seconde équation du système proposé, est de la forme

$$(1) \qquad P+Q\sqrt{q}=0,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de y.

L'équation qui résulte de la substitution de $p-\sqrt{q}$ ne diffère de la précédente que par le signe de la partie irrationnelle, de sorte qu'elle est

$$(2) \qquad P-Q\sqrt{q}=0.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on

obtient une équation délivrée de radicaux,

$$(P + Q\sqrt{q})(P - Q\sqrt{q}) = 0, \quad \text{ou} \quad P^2 - Q^2 q = 0.$$

Pour avoir toutes les valeurs de y qui vérifient les deux premières équations, il suffit évidemment de résoudre la troisième. Cette dernière équation peut d'ailleurs se déduire immédiatement de l'une ou de l'autre des équations (1) et (2); car, si dans chacune de ces équations on fait passer la partie irrationnelle dans le second membre, en élevant ensuite les deux membres au carré, on a

$$P^2 = Q^2 q, \quad \text{d'où} \quad P^2 - Q^2 q = 0.$$

Quand on connaît les valeurs de y, on obtient les valeurs de x au moyen d'un principe qui sera exposé ci-après.

459. Lorsque les premiers membres des équations proposées peuvent être décomposés en facteurs rationnels par rapport aux inconnues, la résolution du système des deux équations se ramène à la résolution de plusieurs systèmes plus simples. Représentons, par exemple, les deux équations par $M=0$, $N=0$, et supposons que l'on ait $M=UU'U''$, $N=VV'$, en désignant par U, U', U'', V, V', des facteurs rationnels par rapport aux inconnues x et y. Il est clair qu'on obtiendra toutes les solutions du système $M=0$, $N=0$, en cherchant celles des différents systèmes,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} U=0 & U=0 & U'=0 & U'=0 & U''=0 & U''=0 \\ V=0 & V'=0 & V=0 & V'=0 & V=0 & V'=0. \end{array}$$

Si les premiers membres des deux équations ont un facteur commun, le système proposé est vérifié par tous les couples de valeurs des inconnues qui réduisent ce facteur à zéro, ce qui fournit un nombre illimité de solutions. Quand le facteur commun ne contient que x, en l'égalant à zéro, on a une équation qui détermine un nombre limité

de valeurs de x, auxquelles on peut joindre des valeurs quelconques de y. Quand le facteur commun ne contient que y, on en déduit, au contraire, des valeurs déterminées de y, auxquelles on peut joindre des valeurs quelconques de x. Enfin, quand le facteur commun est dépendant à la fois de x et de y, il en résulte une équation dans laquelle une des inconnues peut recevoir des valeurs arbitraires qui déterminent celles de l'autre inconnue.

460. Soient les deux équations

$$(y^2-1)x^2-(2y^3-2y)x+y^4-2y^2+1=0,$$
$$(y^2-3y+2)x^2-y^4-3y^3+7y^2+15y-18=0.$$

En effectuant les calculs nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur des multiplicateurs des diverses puissances de x et de la partie indépendante de x, dans la première équation, on reconnaît que ces quantités sont divisibles par y^2-1, ou $(y-1)(y+1)$; et le quotient du premier membre de l'équation par y^2-1 est $x^2-2yx+y^2-1$. On voit, de la même manière, que le premier membre de la seconde équation est divisible par le trinôme y^2-3y+2, qui équivaut à $(y-1)(y-2)$, et le quotient est x^2-y^2-6y-9. Les équations proposées peuvent donc s'écrire ainsi :

$$(y-1)(y+1)(x^2-2yx+y^2-1)=0,$$
$$(y-1)(y-2)(x^2-y^2-6y-9)=0.$$

On satisfait à ces équations en posant $y=1$ avec des valeurs quelconques de x; et on obtiendra les autres solutions au moyen des trois systèmes :

1°. $y+1=0$, $x^2-y^2-6y-9=0$;

2°. $y-2=0$, $x^2-2yx+y^2-1=0$;

3°. $x^2-2yx+y^2-1=0$, $x^2-y^2-6y-9=0$.

Le premier système donne les deux couples $y = -1$, $x = 2$; $y = -1$, $x = -2$.

Le deuxième système donne les deux couples $y = 2$, $x = 1$; $y = 2$, $x = 3$.

Le troisième système a été résolu précédemment (n° 195).

Soient encore les équations

$$x^3 - y^3 - 3xy + 3y^2 = 0,$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0.$$

La première équation peut s'écrire ainsi

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3y) = 0.$$

La seconde équation revient à

$$2x^2 - 2xy + x^2 - y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (x - y)(3x + y) = 0.$$

On satisfera donc aux deux équations en posant $x - y = 0$, ce qui donne un nombre illimité de solutions.

Pour obtenir les autres solutions, il faut résoudre le système

$$x^2 + xy + y^2 - 3y = 0, \quad 3x + y = 0;$$

on en déduit le couple $x = 0$, $y = 0$, qui était déjà compris parmi les solutions de l'équation $x - y = 0$, et le couple $x = -\frac{9}{7}$, $y = \frac{27}{7}$.

Méthode générale pour la résolution de deux équations numériques à deux inconnues.

461. Considérons deux équations de degré quelconque à deux inconnues x et y. Soit $x = \alpha$, $y = \beta$, une solution commune à ces deux équations. Si, au lieu de substituer simultanément α à la place de x, et β à la place de y, on substitue seulement β à la place de y, il en résultera deux équations qui ne contiendront plus que l'inconnue x, et ces équations devront être vérifiées par la valeur $x = \alpha$; or,

pour cela, il sera nécessaire et il suffira que les premiers membres aient un commun diviseur contenant le facteur $x - \alpha$. Ainsi :

Deux équations à deux inconnues étant données, pour qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues y *convienne à ces équations, il faut que, si l'on substitue cette valeur dans les équations, les premiers membres acquièrent, par cette substitution, un commun diviseur fonction de l'autre inconnue* x. *Réciproquement, si, après la substitution d'une valeur de* y, *les premiers membres des deux équations ont un commun diviseur fonction de* x, *cette valeur de* y *convient aux équations; et en égalant le commun diviseur à zéro, on obtient une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue* x.

462. Cette proposition donne lieu de penser qu'on pourra trouver les solutions communes de deux équations, en appliquant aux premiers membres les mêmes calculs que si l'on voulait obtenir leur plus grand commun diviseur.

Représentons les deux équations par $A = 0$, $B = 0$. Supposons que le degré de B, par rapport à x, ne surpasse pas celui de A. Soit Q le quotient de la division de A par B, en continuant l'opération jusqu'à ce que l'on ait un reste de degré moindre que B par rapport à x; nommons R ce reste, et considérons d'abord le cas où la division peut être effectuée sans que le quotient contienne des dénominateurs en y, et sans qu'on soit forcé de recourir à aucune préparation pour que cette condition soit remplie. On aura

$$A = BQ + R.$$

D'après cette égalité, toutes les valeurs des inconnues qui donneront $A = 0$, $B = 0$, devront donner aussi $R = 0$, puisque le quotient Q ne peut pas devenir infini pour des valeurs finies de x et de y. Par la même raison, toutes les valeurs qui donneront $B = 0$ et $R = 0$ donneront aussi

$A = o$. On pourra donc remplacer le système des équations $A = o$, $B = o$, par le système $B = o$, $R = o$, lequel est plus simple que le précédent, en ce que R est d'un degré moins élevé que B par rapport à x.

La même conclusion n'aurait plus lieu si le quotient Q contenait des dénominateurs en y, car alors il pourrait se faire que A et B étant réduits à zéro, Q devînt infini; dans ce cas le terme $B \times Q$ pourrait avoir une valeur différente de zéro; par conséquent, R pourrait ne pas être nul.

Supposons que, pour effectuer la division de A par B, sans que y entre en dénominateur dans le quotient, il soit nécessaire de multiplier d'abord le polynôme A par un facteur contenant y. Nommons c ce facteur, et représentons encore par Q le quotient qu'on obtiendra après cette préparation, et par R le reste, on aura

$$cA = BQ + R.$$

Cette égalité prouve que les solutions des équations $B = o$, $R = o$, sont les mêmes que celles des équations $cA = o$, $B = o$. Or ce dernier système est vérifié lorsqu'on a en même temps $A = o$ et $B = o$, ou $c = o$ et $B = o$. Quand les solutions de chacun de ces deux systèmes diffèrent toutes de celles de l'autre système, elles doivent être toutes données par les équations $B = o$, $R = o$. Quand les deux systèmes ont des solutions communes, on ne peut plus affirmer qu'il en sera de même, parce qu'il faudrait pouvoir juger si les solutions communes seront données plusieurs fois par les équations $B = o$, $R = o$. Mais, dans tous les cas, si l'on calcule toutes les solutions distinctes du dernier système, et si l'on en retranche toutes les solutions de $c = o$, $B = o$, qui ne satisferont pas à $A = o$, on sera assuré d'avoir toutes les solutions distinctes de $A = o$ et $B = o$, et de ne pas avoir de solutions étrangères.

On opérera sur les équations $B = o$ et $R = o$ de la même

manière que sur les équations $A = 0$ et $B = 0$. On obtiendra ainsi un nouveau système formé de l'équation $R = 0$, et d'une autre équation de degré moindre par rapport à x. Ce système admettra toutes les solutions du système $B = 0$, $R = 0$, et il pourra en admettre d'autres.

En continuant ainsi, on parviendra toujours à un système de deux équations dont l'une ne contiendra plus x; et en déterminant toutes les solutions de ce dernier système, on aura toutes les solutions du système proposé, et, en outre, celles qui auront été introduites par les préparations qu'on aura fait subir aux dividendes successifs.

463. S'il existe dans les premiers membres des équations proposées des facteurs qui ne dépendent que de y, on devra les supprimer, afin de simplifier les calculs; et parce que ceux qui se trouveraient dans le diviseur et qu'il serait nécessaire d'introduire dans le dividende, donneraient lieu à des solutions étrangères qui comprendraient des valeurs indéterminées de x. On supprimera ainsi des solutions; mais on pourra en tenir compte suivant ce qui a été dit dans le n° 459. On devra supprimer pareillement dans les restes successifs les facteurs qui ne dépendront que de y, en tenant compte des solutions qui en résulteront.

464. M. Labatie, et, après lui, M. Sarrus, professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg, ont démontré qu'on peut écarter les solutions étrangères, sans résoudre les systèmes dans lesquels elles sont contenues, et sans avoir à soumettre ces solutions à des vérifications qui seraient le plus souvent tout à fait impraticables. La démonstration que nous allons faire connaître est celle de M. Sarrus; mais la proposition qui en résulte n'est pas différente de celle de M. Labatie.

465. Supposons que A et B représentent les quotients

que l'on obtient en divisant les premiers membres des équations proposées par tous ceux de leurs facteurs qui ne dépendent que de y.

Soit c le facteur par lequel il faut multiplier A pour effectuer la division par B; représentons par q le quotient, et par Rr le reste, r désignant le produit des facteurs de ce reste qui ne dépendent que de y. Soit c_1 le facteur par lequel il faut multiplier B pour effectuer la division par R; représentons par q_1 le quotient et par $R_1 r_1$ le reste, r_1 désignant le produit des facteurs de ce reste qui ne dépendent que de y. Ainsi de suite. Enfin supposons, pour fixer les idées, qu'à la quatrième division on ait un reste indépendant de x, et désignons ce reste par r_3. On aura les égalités

$$(1)\quad \begin{cases} cA = Bq + Rr, \\ c_1 B = Rq_1 + R_1 r_1, \\ c_2 R = R_1 q_2 + R_2 r_2, \\ c_3 R_1 = R_2 q_3 + r_3. \end{cases}$$

Soient d le plus grand commun diviseur de c et de r, d_1 celui de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, d_3 celui de $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}$ et de r_3. Nous allons prouver qu'on obtiendra toutes les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sans aucune solution étrangère, en résolvant les systèmes ci-après :

$$(2)\quad \begin{bmatrix} \frac{r}{d} = 0 \\ B = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_1}{d_1} = 0 \\ R = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_2}{d_2} = 0 \\ R_1 = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_3}{d_3} = 0 \\ R_2 = 0 \end{bmatrix}.$$

Pour établir cette proposition, nous prouverons d'abord que les solutions des systèmes (2) conviennent toutes aux équations $A = 0$, $B = 0$; nous ferons voir ensuite que les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sont toutes comprises parmi celles des systèmes (2).

En divisant par d les deux membres de la première égalité (1), on obtient

$$(3) \qquad \frac{c}{d}A = \frac{q}{d}B + \frac{r}{d}R.$$

$\frac{q}{d}$ est entier; car c et r sont divisibles par d, donc qB est divisible par d; mais B, par hypothèse, est premier avec d; donc d divise q.

D'après l'égalité (3), les valeurs de x et y qui satisfont aux équations $B = 0$, $\frac{r}{d} = 0$, annulent $\frac{c}{d}A$; or $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ sont premiers entre eux; donc ces valeurs satisfont à l'équation $A = 0$. Par conséquent, 1° *toutes les solutions du système* $B = 0$, $\frac{r}{d} = 0$, *conviennent au système* $A = 0$, $B = 0$.

Pour avoir une relation entre A, R et $\frac{r_1}{d_1}$, on multiplie l'égalité (3) par c_1, et l'on remplace, dans celle qui en résulte, c_1B par le second membre de la deuxième égalité (1); ce qui donne

$$\frac{cc_1}{d}A = \left(\frac{c_1r + qq_1}{d}\right)R + \frac{q}{d}r_1R_1.$$

La quantité $\frac{c_1r + qq_1}{d}$ est entière, puisque r et q sont divisibles par d; de plus, cette quantité est divisible par d_1; car d_1 divise $\frac{cc_1}{d}$ et r_1, et il est premier avec R. Divisant les deux membres de l'égalité ci-dessus par d_1, et posant, pour abréger, $\frac{q}{d} = M$ et $\frac{c_1r + qq_1}{dd_1} = M_1$, il vient

$$(4) \qquad \frac{cc_1}{dd_1}A = M_1R + MR_1\frac{r_1}{d_1}.$$

Pour avoir une relation entre B, R et $\frac{r_1}{d_1}$, on multiplie

d'abord la deuxième égalité (1) par $\frac{c}{d}$, ce qui donne $\frac{cc_1}{d}B = \frac{cq_1}{d}R + \frac{c}{d}R_1 r_1$. Puisque $\frac{cc_1}{d}$ et r_1 sont divisibles par d_1, il faut que d_1 divise aussi $\frac{cq_1}{d}R$; or d_1 est premier avec R, donc d_1 divise $\frac{cq_1}{d}$. Divisant tous les termes par d_1, et posant, pour abréger, $\frac{c}{d} = N$, $\frac{cq_1}{dd_1} = N_1$, il vient

$$(5) \qquad \frac{cc_1}{dd_1}B = N_1 R + NR_1 \frac{r_1}{d_1}.$$

D'après les égalités (4) et (5), toutes les valeurs de x et de y qui réduisent à zéro les polynômes R et $\frac{r_1}{d_1}$, annulent aussi $\frac{cc_1}{dd_1}A$ et $\frac{cc_1}{dd_1}B$; or $\frac{cc_1}{dd_1}$ et $\frac{r_1}{d_1}$ sont premiers entre eux; par conséquent, 2° *toutes les solutions du système* $R = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$, *conviennent au système proposé* $A = 0$, $B = 0$.

On obtient une relation entre A, R_1 et $\frac{r_2}{d_2}$ en multipliant (4) par c_2, et remplaçant $c_2 R$ par le second membre de la troisième égalité (1). On trouve ainsi

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}A = R_1\left(M_1 q_2 + Mc_2\frac{r_1}{d_1}\right) + M_1 R_2 r_2.$$

Par hypothèse, d_2 divise le premier membre de cette égalité, ainsi que r_2; il doit donc diviser $R_1\left(M_1 q_2 + Mc_2\frac{r_1}{d_1}\right)$; or R_1 et d_2 sont premiers entre eux : donc d_2 divise le multiplicateur de R_1. Désignant le quotient par M_2, il vient

$$(6) \qquad \frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A = M_2 R_1 + M_1 R_2 \frac{r_2}{d_2}.$$

En multipliant (5) par c_2, et remplaçant ensuite $c_2 R$ par

le second membre de la troisième égalité (1), il vient

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}B = R_1\left(N_1q_2 + Nc_2\frac{r_1}{d_1}\right) + N_1R_2r_2.$$

On démontrerait comme ci-dessus que le multiplicateur de R_1 est divisible par d_2; et en représentant le quotient par N_2, on trouve

$$(7) \qquad \frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B = N_2R_1 + N_1R_2\frac{r_2}{d_2}.$$

D'après les égalités (6) et (7), toutes les valeurs de x et de y qui réduisent les polynômes R_1 et $\frac{r_2}{d_2}$ à zéro, annulent aussi les premiers membres de ces deux équations; or $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}$ et $\frac{r_2}{d_2}$ sont premiers entre eux; par conséquent, 3° *toutes les solutions du système* $R_1 = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$, *conviennent au système proposé* $A = 0$, $B = 0$.

On obtient une relation entre A, R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$ en multipliant (6) par c_3, et remplaçant c_3R_1 par le second membre de la quatrième égalité (1). On trouve ainsi

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}A = R_2\left(M_2q_3 + c_3M_1\frac{r_2}{d_2}\right) + M_2r_3.$$

Divisant les deux membres par d_3, et désignant par M_3 le quotient de la division du polynôme entier $M_2q_3 + c_3M_1\frac{r_2}{d_2}$ par d_3, il vient

$$(8) \qquad \frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}A = M_3R_2 + M_2\frac{r_3}{d_3}.$$

Pour avoir une relation entre B, R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$, on multiplie (7) par c_3, et l'on remplace c_3R_1 par le second membre

de la quatrième égalité (1), ce qui donne

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}\,B = R_2\left(N_2q_3 + c_3N_1\frac{r_2}{d_2}\right) + N_2r_3.$$

Divisant les deux membres par d_3, et désignant par N_3 le quotient de la division du polynôme entier $N_2q_3 + c_3N_1\frac{r_2}{d_2}$ par d_3, il vient

$$(9)\qquad \frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}\,B = N_3R_2 + N_2\frac{r_3}{d_3}.$$

D'après les égalités (8) et (9), toutes les valeurs de x et de y qui réduisent les polynômes R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$ à zéro, annulent aussi les premiers membres de ces équations; or $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}$ et $\frac{r_3}{d_3}$ sont premiers entre eux; par conséquent, 4° *toutes les solutions du système* $R_2 = 0$, $\frac{r_3}{d_3} = 0$, *conviennent au système proposé* $A = 0$, $B = 0$.

Il reste encore à prouver qu'un système quelconque de valeurs qui satisfont aux équations $A = 0$, $B = 0$, fait partie des systèmes de valeurs que fournissent les équations (2).

Pour former les relations qui démontrent cette seconde partie du théorème, remplaçons d'abord dans l'égalité (3) $\frac{c}{d}$ par N et $\frac{q}{d}$ par M; il viendra, en transposant le terme MB,

$$(10)\qquad NA - MB = R\frac{r}{d}.$$

Éliminons maintenant R entre les égalités (4) et (5). On pourrait effectuer cette élimination en retranchant les deux égalités l'une de l'autre, après avoir multiplié la première par N_1, la seconde par M_1, et en ayant égard aux valeurs ci-dessus de N_1 et de M_1; mais les calculs sont plus simples en multipliant (4) par B et (5) par A. On trouve alors, en

retranchant l'une de l'autre les deux égalités résultantes, $(M_1B - N_1A)R + (MB - NA)R_1\frac{r_1}{d_1} = 0$. Remplaçant $MB - NA$ par $-R\frac{r}{d}$, et supprimant le facteur R, il vient

$$(11) \qquad N_1A - M_1B = -R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}.$$

Afin d'éliminer R_1 entre (6) et (7), on multiplie (6) par B et (7) par A, puis on retranche l'une de l'autre les égalités résultantes; ce qui donne

$$(M_2B - N_2A)R_1 + (M_1B - N_1A)R_2\frac{r_2}{d_2} = 0.$$

Remplaçant $M_1B - N_1A$ par $R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}$, et supprimant le facteur R_1, il vient

$$(12) \qquad N_2A - M_2B = R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}.$$

On parvient de la même manière à l'égalité

$$(13) \qquad N_3A - M_3B = -\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}\frac{r_3}{d}.$$

D'après l'égalité (13), tout système de valeurs de x et de y qui donnera $A = 0$ et $B = 0$, devra aussi satisfaire à l'équation $\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\cdot\frac{r_3}{d_3} = 0$, ce qui exige que l'un des facteurs $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1}$, etc., devienne nul; d'où il suit que les équations $\frac{r}{d} = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$, $\frac{r_3}{d_3} = 0$, donnent toutes les bonnes valeurs de y.

Cela posé, soit $x = \alpha$, $y = \beta$, un système de bonnes valeurs des équations $A = 0$, $B = 0$.

Si la valeur $y = \beta$ est une racine de l'équation $\frac{r}{d} = 0$, il

est clair que le couple $x = \alpha$, $y = \beta$, sera une solution du système $B = 0$, $\frac{r}{d} = 0$.

Si la valeur $y = \beta$ ne vérifie point l'équation $\frac{r}{d} = 0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_1}{d_1} = 0$, on voit par l'égalité (10) que le couple $x = \alpha$, $y = \beta$, donnera $R = 0$; par conséquent, il sera une solution du système $R = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$.

Si la valeur $y = \beta$ ne vérifie ni l'équation $\frac{r}{d} = 0$, ni l'équation $\frac{r_1}{d_1} = 0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_2}{d_2} = 0$, on voit par l'égalité (11) que le couple $x = \alpha$, $y = \beta$, donnera $R_1 = 0$; par conséquent, il sera une solution du système $R_1 = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$.

Si la valeur $y = \beta$ ne vérifie aucune des équations $\frac{r}{d} = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_3}{d_3} = 0$, on voit par l'égalité (12) que le couple $x = \alpha$, $y = \beta$, donnera $R_2 = 0$; par conséquent, il sera une solution du système $R_2 = 0$, $\frac{r_3}{d_3} = 0$.

Donc tous les systèmes de valeurs qui satisfont aux équations $A = 0$, $B = 0$, font partie des systèmes de valeurs que fournissent les équations (2).

L'équation $\frac{r}{d} \cdot \frac{r_1}{d_1} \cdot \frac{r_2}{d_2} \cdot \frac{r_3}{d_3} = 0$, qui donne toutes les bonnes valeurs de y, est appelée *équation finale* en y.

EXEMPLE I.

$$x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0,$$
$$x^2 + 2yx + y^2 - y = 0.$$

Première Division.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y & x^2 + 2yx + y^2 - y \\ \cline{2-2} -x^3 - 2yx^2 - (y^2 - y)x & x + y \\ \hline \quad yx^2 + (2y^2 + 1)x + y^3 - y^2 + 2y & \\ \quad -yx^2 - 2y^2x - y^3 + y^2 & \\ \hline \qquad x + 2y & \end{array}$$

Seconde Division.

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 2yx + y^2 - y & x + 2y \\ \cline{2-2} -x^2 - 2yx & x \\ \hline \qquad y^2 - y & \end{array}$$

Puisque l'on n'a pas fait subir de préparation aux dividendes, et que l'on n'a supprimé dans les restes aucun facteur, on aura toutes les solutions du système proposé au moyen des deux équations

$$x + 2y = 0, \quad y^2 - y = 0;$$

ces équations donnent les deux couples

$$y = 0, \quad x = 0; \quad \text{et} \quad y = 1, \quad x = -2.$$

L'équation $y^2 - y = 0$ est l'équation finale en y.

EXEMPLE II.

$$x^3 + 2yx^2 + 2y(y - 2)x + y^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

La première division donne le reste $(y - 2)x + y^2 - 4$ ou $(y - 2)(x + y + 2)$. On supprime le facteur $y - 2$, et

l'on divise le premier membre de la seconde équation par $x+y+2$, ce qui conduit à un reste indépendant de x qui est y^2-5y+6. On obtiendra toutes les solutions des équations proposées en résolvant les deux systèmes,

1°. $y-2=0, \quad x^2+2yx+2y^2-5y+2=0;$

2°. $y^2-5y+6=0, \quad x+y+2=0.$

Le premier système donne les deux couples $y=2$, $x=0$; $y=2$, $x=-4$; et le second système donne les deux couples $y=2$, $x=-4$; $y=3$, $x=-5$.

On obtiendra l'équation finale en y, en multipliant membre à membre les deux équations $y-2=0$ et $y^2-5y+6=0$.

EXEMPLE III.

$$x^3-3yx^2+3x^2+3y^2x-6yx-x-y^3+3y^2+y-3=0,$$

$$x^3+3yx^2-3x^2+3y^2x-6yx-x+y^3-3y^2-y+3=0.$$

Le reste de la première division est $2(1-y)(3x^2+y^2-2y-3)$. On divise le premier membre de la seconde équation par $3x^2+y^2-2y-3$, ce qui conduit au reste $8(y^2-2y)x$. Enfin, en divisant $3x^2+y^2-2y-3$ par x, on obtient le reste y^2-2y-3. On aura donc toutes les solutions des équations proposées en résolvant les trois systèmes

1°. $y-1=0, \quad x^3+3yx^2-3x^2+3y^2x-6yx-x+y^3-3y^2-y+3=0;$

2°. $y^2-2y=0, \quad 3x^2+y^2-2y-3=0;$

3°. $y^2-2y-3=0, \quad x=0.$

Le premier système donne les trois couples $y=1$, $x=0$; $y=1$, $x=2$; $y=1$, $x=-2$.

Le deuxième système donne les quatre couples $y=0$, $x=1$; $y=0$, $x=-1$; $y=2$, $x=1$; $y=2$, $x=-1$.

Le troisième système donne les deux couples $y=3$, $x=0$; $y=-1$, $x=0$.

EXEMPLE IV.

$$(y-2)x^2-2x+5y-2=0,$$
$$yx^2-5x+4y=0.$$

Première Division.

Pour effectuer cette division, on multiplie d'abord le premier membre de la première équation par y.

$$\begin{array}{l|l}
(y-2)x^2-2x+5y-2 & yx^2-5x+4y \\
(y-2)yx^2-2yx+5y^2-2y & \overline{y-2} \\
-(y-2)yx^2+(5y-10)x-4y^2+8y & \\
\hline
\qquad (3y-10)x+y^2+6y &
\end{array}$$

Seconde Division.

Pour effectuer cette division, on multiplie d'abord le dividende par $3y-10$; et pour continuer l'opération, il faut multiplier encore le reste par $3y-10$.

$$\begin{array}{l|l}
\qquad yx^2-5x+4y & (3y-10)x+y^2+6y \\
(3y-10)yx^2-(15y-50)x+12y^2-40y & \overline{yx-(y^3+6y^2+15y-50)} \\
-\ldots\ldots\ldots-(y^3+6y^2)x & \\
\hline
\quad -(y^3+6y^2+15y-50)x+12y^2-40y & \\
\quad -(y^3+\ldots)(3y-10)x+36y^3-240y^2+400y & \\
\quad +\ldots\ldots\ldots+y^5+12y^4+51y^3+40y^2-300y & \\
\hline
\qquad y^5+12y^4+87y^3-200y^2+100y. &
\end{array}$$

Il est facile de voir qu'on aurait obtenu le même reste, si, au lieu de multiplier le dividende par $3y-10$, et ensuite le premier reste par $3y-10$, on avait multiplié le dividende par $(3y-10)^2$; il faut donc diviser le reste en y ci-dessus par le plus grand commun diviseur de ce reste et de $y(3y-10)^2$. D'ailleurs on voit immédiatement que le reste y^5+12y^4+ etc. n'est pas divisible par $3y-10$,

puisque la valeur de y qui annule $3y - 10$ étant fractionnaire, elle ne peut pas rendre nul le polynôme $y^5 + 12y^4 + \text{etc.}$ (n° 409). Tout se réduit donc à diviser ce polynôme par y; et l'on obtiendra toutes les solutions des équations proposées au moyen des deux équations ci-après :

$$(3y - 10)x + y^2 + 6y = 0,$$

$$y^4 + 12y^3 + 87y^2 - 200y + 100 = 0.$$

On peut remarquer que s'il n'est résulté de la multiplication par $3y - 10$ aucune solution étrangère, cela tient à ce que l'on ne peut pas satisfaire en même temps aux deux équations

$$3y - 10 = 0, \quad (3y - 10)x + y^2 + 6y = 0,$$

puisque, si l'on met dans la seconde équation la valeur de y tirée de la première, le premier membre se réduira à un nombre.

L'équation $y^4 + 12y^3 + 87y^2 - 200y + 100 = 0$ admet la racine commensurable $y = 1$; et en supprimant le facteur $y - 1$, on obtient l'équation du troisième degré $y^3 + 13y^2 + 100y - 100 = 0$; les racines de cette équation sont incommensurables. La valeur de x qui correspond à $y = 1$ est $x = 1$; les autres solutions ne peuvent s'obtenir qu'approximativement.

EXEMPLE V.

$$yx^3 - (y^3 - 3y - 1)x + y = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

La première division donne le reste $x + y$, et la division de $x^2 - y^2 + 3$ par $x + y$ donne le reste 3. Ce reste étant numérique, il n'existe point de valeurs des inconnues qui le réduisent à zéro; et comme on n'a supprimé aucun facteur, les équations proposées sont incompatibles.

Remarques sur la méthode précédente.

I. Afin de justifier en général ce que nous avons dit dans le 4e exemple, sur la manière d'effectuer les préparations nécessaires pour éviter les quotients fractionnaires, désignons par A le dividende et par B le diviseur. Supposons qu'après avoir multiplié A par c, on obtienne un quotient q et un reste A′ qui contienne x à un plus haut degré que B; que l'on multiplie A′ par un nouveau facteur c', et que la division de c'A′ par B donne un quotient q' et un reste A″; que l'on multiplie A″ par un facteur c'', et que la division de c''A″ par B donne un quotient q'' avec le reste Rr, ce reste étant d'un degré moindre que le diviseur par rapport à x. On aura les égalités

$$cA = Bq + A', \quad c'A' = Bq' + A'', \quad c''A'' = Bq'' + Rr.$$

Or, en multipliant les deux membres de la première égalité par $c'c''$, ceux de la seconde par c'', et en ajoutant ensuite les trois égalités, on obtient celle-ci :

$$cc'c''A = B(qc'c'' + q'c'' + q'') + Rr;$$

si dans cette dernière égalité on pose $cc'c'' = C$, et $qc'c'' + q'c'' + q'' = Q$, il vient

$$CA = BQ + Rr.$$

Il existe donc entre CA, B et Rr une relation semblable à celle que présentent les égalités (1) (page 503).

II. Pour conserver à la démonstration du n° 465 toute sa généralité, nous avons supposé que c et r pouvaient avoir un facteur commun; mais, d'après ce qu'on a dit au sujet de l'égalité (3), si d est le plus grand commun diviseur de c et de r, la division de $\frac{c}{d}$A par B donnera un quotient qui ne contiendra point de fractions; par conséquent, c ne sera

pas le facteur le plus simple par lequel il faudra multiplier A pour effectuer la division par B. On peut donc faire en sorte que c soit premier avec r; et on voit de même que, si l'on a opéré convenablement, c_1 sera premier avec r_1, c_2 sera premier avec r_2, c_3 sera premier avec r_3. Alors, dans les systèmes (2), l'équation $\frac{r}{d}=0$ sera la même que $r=0$; et l'on devra prendre pour d_1 le plus grand commun diviseur de c et de r_1; pour d_2 celui de $\frac{cc_1}{d_1}$ et de r_2; pour d_3 celui de $\frac{cc_1c_2}{d_1d_2}$ et de r_3.

III. Lorsque le reste indépendant de x, que nous avons désigné par r_3, est nul, le polynôme R_2 est le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, et il divise aussi les restes R et R_1. Les équations proposées $A=0$, $B=0$, sont alors vérifiées par toutes les solutions de l'équation $R_2=0$, et les autres solutions sont données par les deux équations $\frac{A}{R_2}=0$, $\frac{B}{R_2}=0$. Or, en divisant les deux membres des égalités (1) par R_2, on obtient d'autres égalités qui ne diffèrent des premières qu'en ce que les quantités A, B, R, R_1, R_2 sont remplacées par les quotients $\frac{A}{R_2}$, $\frac{B}{R_2}$, $\frac{R}{R_2}$, $\frac{R_1}{R_2}$, $\frac{R_2}{R_2}$ ou 1. Par conséquent on aura toutes les solutions du système des équations $\frac{A}{R_2}=0$, $\frac{B}{R_2}=0$, en résolvant ceux-ci :

$$\left[\frac{r}{d}=0,\ \frac{B}{R_2}=0\right]\left[\frac{r_1}{d_1}=0,\ \frac{R}{R_2}=0\right]\left[\frac{r_2}{d_2}=0,\ \frac{R_1}{R_2}=0\right].$$

EXEMPLE VI.

$$x^3+yx^2-(y^2+1)x+y-y^3=0,$$
$$x^3-yx^2-(y^2+6y+9)x+y^3+6y^2+9y=0.$$

La première division conduit au reste

$$yx^2 + (3y + 4)x - (y^3 + 3y^2 + 4y).$$

Pour faire la seconde division, on multiplie le dividende par y, et l'on exécute encore la même préparation sur le premier reste que l'on obtient. On est ainsi conduit à un reste du premier degré en x qui peut se mettre sous cette forme

$$8(y^2 + 3y + 2)(x - y).$$

En divisant alors le reste du second degré par $x - y$, on obtient le quotient $yx + y^2 + 3y + 4$, et le reste est nul.

On conclut de ces calculs que les premiers membres des équations proposées sont divisibles par $x - y$, de sorte qu'elles sont vérifiées par toutes les solutions de l'équation indéterminée $x - y = 0$. Les autres solutions sont fournies par le système des deux équations

$$y^2 + 3y + 2 = 0, \quad yx + y^2 + 3y + 4 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$y = -1, \quad x = +2, \quad \text{et} \quad y = -2, \quad x = +1.$$

IV. Lorsque le reste indépendant de x n'est pas nul, les polynômes A et B n'ont aucun facteur commun. Dans ce cas, les équations $A = 0$, $B = 0$ n'admettent que des solutions déterminées pour chaque inconnue; car, dans chacun des systèmes (2), l'équation qui ne contient que y donne des valeurs déterminées de cette inconnue, et la substitution de chaque valeur de y dans l'autre équation donne une équation qui ne peut être identique, puisque les quantités B, R, R_1, R_2 n'admettent point de diviseurs qui ne dépendent que de y.

V. Soit l'équation $Gx^n + Hx^{n-1} \ldots + Px + Q = 0$, les coefficients G, H, ..., P, Q étant des fonctions d'une inconnue y; il pourra arriver qu'en attribuant à y une

valeur 6, on ait $G = 0$. Or, si, avant de faire $y = 6$, on remplace dans l'équation x par $\frac{1}{x'}$, elle devient

$$Qx'^n + Px'^{n-1} \ldots + Hx' + G.$$

Quand on a $G = 0$, une des racines de cette équation est zéro. Donc, puisque $x = \frac{1}{x'}$, une des racines de la première équation est infinie. Si l'on a en même temps $G = 0$, $H = 0$, la seconde équation a deux racines nulles; par conséquent la première a deux racines infinies. En général, on doit admettre que la première équation a autant de racines infinies correspondantes à $y = 6$ qu'il y a de coefficients consécutifs, à partir du premier coefficient G, qui sont rendus nuls par cette valeur de y. Lorsque l'on a deux équations entre deux inconnues x et y, le système de ces deux équations peut comporter des solutions communes formées d'une valeur finie de l'une des inconnues, et d'une valeur infinie de l'autre inconnue. Mais les raisonnements qui ont été employés dans les n°s 462 et 465 ne sont pas applicables aux solutions infinies, puisque l'on suppose que les quotients ne peuvent prendre que des valeurs finies. Quand on veut obtenir les solutions formées d'une valeur finie de y avec une valeur infinie de x, il faut les déterminer directement; à cet effet, on divise tous les termes de chacune des équations par la plus haute puissance de x; en faisant ensuite $x = \infty$, on obtient deux équations qui ne contiennent que l'inconnue y, et il faut chercher les racines communes à ces deux équations.

EXEMPLE VII.

$$(y-1)x^2 + yx + y^2 - 2y = 0.$$
$$(y-1)x + y = 0.$$

La division conduit au reste $y^2 - 2y = 0$; ainsi les solu-

tions des équations proposées dépendent du système

$$y^2 - 2y = 0, \quad (y-1)x + y = 0.$$

Ce système donne les deux couples $y = 0$, $x = 0$; $y = 2$, $x = -2$. Mais les équations proposées admettent en outre la solution $y = 1$, $x = \infty$, puisque la valeur $y = 1$ anéantit le multiplicateur de la plus haute puissance de x dans chacune des équations.

EXEMPLE VIII.

$$(y-1)x^3 + y(y+1)x^2 + (3y^2 + y - 2)x + 2y = 0,$$
$$(y-1)x^2 + y(y+1)x + 3y^2 - 1 = 0.$$

La première division donne le reste $(y-1)x + 2y$; et en prenant ce reste pour diviseur, on parvient, sans aucune préparation, au reste $y^2 - 1$. On obtiendra donc toutes les solutions du système proposé en résolvant les deux équations

$$y^2 - 1 = 0, \quad (y-1)x + 2y = 0.$$

La première équation donne $y = \pm 1$. Pour $y = -1$, on trouve $x = -1$. Pour $y = +1$, on trouve $x = \infty$; ce couple est une solution des équations proposées; car en divisant chacune d'elles par la plus haute puissance de x, et supposant $x = \infty$, les deux équations se réduisent à $y - 1 = 0$.

Équation aux carrés des différences.

466. On a vu comment on peut effectuer la séparation des racines incommensurables d'une équation numérique, en calculant d'abord une autre équation dont les racines soient les différences des racines de l'équation proposée prises deux à deux (n° 426). Nous allons maintenant expliquer comment on forme cette équation.

Représentons l'équation proposée par

(1) $$f(x) = 0.$$

et soient a, b, c, d, etc., les m racines. Supposons d'abord que l'on veuille obtenir une équation dont les racines soient les différences entre une racine a et les $m-1$ autres racines. On posera

$$y = x - a, \text{ d'où } x = a + y.$$

En substituant $a+y$ au lieu de x, dans $f(x)=0$, il vient

$$f(a+y)=0,$$

ou, en développant (n° 369),

$$(2) \quad f(a) + f'(a)\,y + f''(a)\frac{y^2}{1.2} + f'''(a)\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots = 0.$$

$f(a)$ est nulle, puisque, par hypothèse, a est une racine de l'équation (1). Il suit de là que l'équation (2) est divisible par y; ainsi elle admet une racine nulle. Cette racine nulle provient de la différence $a-a$; car, d'après la relation $y = x - a$, les valeurs de y sont les différences entre la racine a et toutes les racines de l'équation (1), en y comprenant la racine a. Si l'on supprime cette racine nulle, l'équation se réduit à

$$f'(a) + f''(a)\frac{y}{1.2} + f'''(a)\frac{y^2}{1.2.3} + \ldots = 0;$$

cette dernière équation a pour racines les différences entre a et les $m-1$ autres racines de la proposée.

En prenant successivement pour a toutes les racines de la proposée, et en déterminant les valeurs correspondantes de y, on obtiendra toutes les différences des racines combinées deux à deux; or on aura ainsi effectué la résolution du système des deux équations $f(x)=0$ et

$$(3) \quad f'(x) + f''(x)\frac{y}{1.2} + f'''(x)\frac{y^2}{1.2.3} + \ldots = 0.$$

Par conséquent, si l'on élimine x entre ces deux équations, l'équation finale en y sera l'équation cherchée.

467. L'équation proposée étant du degré m, l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$; car le nombre de ses racines est égal au nombre des arrangements qu'on peut former avec m lettres a, b, c, etc., en les prenant deux à deux. Cette équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue; car elle admet à la fois les racines $a-b$ et $b-a$; par conséquent ses racines sont deux à deux égales en valeur absolue, et de signes contraires. En faisant $y^2=z$, on obtiendra une équation de degré sous-double, dont les racines seront les carrés des différences des racines de l'équation proposée, et qu'on nomme, par cette raison, *équation aux carrés des différences*.

468. Le principal usage de l'équation aux différences est de faire trouver, comme nous l'avons dit dans le n° 426, une quantité moindre que la plus petite différence des racines d'une équation donnée; à cet effet, on cherche une limite inférieure des racines positives de l'équation aux différences : cette limite est la quantité qu'on voulait obtenir. On peut aussi chercher une limite inférieure des racines de l'équation aux carrés des différences, et prendre la racine carrée de cette limite; on obtient souvent, de cette manière, une limite plus grande, qui est par conséquent préférable.

Il peut arriver que l'élimination de x entre les équations (1) et (3) conduise à plusieurs équations partielles en y, qui comprennent chacune une partie des valeurs de y. Dans ce cas, on détermine une quantité moindre que la plus petite différence des racines de l'équation proposée, en cherchant les limites inférieures des racines de chaque équation partielle; et comme chaque différence doit se trouver à la fois dans le système de ces équations avec le signe $+$ et avec le signe $-$, on peut prendre pour la quantité cherchée la plus petite limite inférieure des valeurs positives de y, ou la plus petite limite inférieure des valeurs négatives.

Si l'on n'a pas fait les opérations nécessaires pour que les équations en y ne renferment pas des racines étrangères, on pourra se servir de ces équations pour déterminer la quantité dont nous venons de parler; seulement on sera exposé à obtenir une limite moindre que celle que l'on trouverait si les équations en y avaient été débarrassées des racines étrangères.

469. L'équation aux carrés des différences donne le moyen de reconnaître si l'équation proposée a des racines imaginaires.

Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, l'équation aux carrés des différences a toutes ses racines réelles et positives; par conséquent, elle est complète et elle n'a que des variations de signes. (Nous supposons que l'équation proposée n'a pas de racines égales, de sorte que l'équation aux différences n'a pas de racines nulles.)

Réciproquement, si l'équation aux carrés des différences est complète et ne présente que des variations, l'équation proposée a toutes ses racines réelles; car, si elle avait deux racines imaginaires, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, le carré de la différence de ces deux expressions étant $-4\beta^2$, il s'ensuivrait que l'équation aux carrés des différences aurait une racine négative, et puisqu'elle est complète, elle devrait avoir au moins une permanence, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En considérant l'équation $x^3 + px + q = 0$, on trouve que l'équation aux carrés des différences est

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

On en conclut que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée ait toutes ses racines réelles sont, $p < 0$, $4p^3 + 27q^2 < 0$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans le n° 429 (1er *exemple*).

Calcul des racines imaginaires.

470. Lorsque l'on veut trouver les racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$, on représente ces racines par $y + z\sqrt{-1}$, y et z devant être des quantités réelles. En remplaçant x par $y + z\sqrt{-1}$, dans le polynôme $f(x)$, on a un résultat de la forme $P + Qz\sqrt{-1}$. Ce résultat devant être nul, il faut que l'on ait $P = 0$ et $z = 0$, ou $P = 0$ et $Q = 0$; mais, pour les racines imaginaires, y étant réelle, z ne peut être nulle. On obtiendra donc toutes les racines imaginaires, en déterminant les couples de valeurs réelles de y et de z qui vérifieront les deux dernières équations.

On a

$$f(y + z\sqrt{-1}) = f(y) + f'(y)z\sqrt{-1} - f''(y)\frac{z^2}{1.2}$$
$$- f'''(y)\frac{z^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + f^{\text{iv}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4}\cdots$$

Donc les équations $P = 0$, $Q = 0$, sont

$$(1) \qquad f(y) - f''(y)\frac{z^2}{1.2} + f^{\text{iv}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4}\cdots = 0,$$

$$(2) \qquad f'(y) - f'''(y)\frac{z^2}{1.2.3} + f^{\text{v}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4.5}\cdots = 0.$$

On devra éliminer une des inconnues y et z entre ces deux équations, afin d'obtenir une ou plusieurs autres équations qui déterminent les valeurs de l'autre inconnue. Si l'on élimine y, les équations résultantes ne contiendront que des puissances paires de z, puisque z n'entre qu'à des puissances paires dans les deux équations.

471. Le système des équations (1) et (2) admet d'autres solutions que les couples de valeurs réelles de y et de z qui déterminent les racines imaginaires de l'équation proposée, et il est facile de voir comment ces solutions

dépendent des racines de la proposée. En effet, les équations (1) et (2) expriment que $y + z\sqrt{-1}$ est une racine de l'équation $f(x) = 0$, et que $y - z\sqrt{-1}$ est aussi une racine de la même équation. Or, si l'on représente par a et b deux racines quelconques de $f(x) = 0$, et si l'on pose

$$y + z\sqrt{-1} = a, \quad y - z\sqrt{-1} = b,$$

on en conclut

$$y = \frac{a+b}{2}, \quad z = \frac{a-b}{2\sqrt{-1}}.$$

Il suit de là que les valeurs de y seront les demi-sommes des racines de l'équation proposée combinées deux à deux; et, si l'on fait $z^2 = u$, les valeurs de u seront les carrés des différences des racines, pris en signes contraires et divisés par 4. Si l'on a calculé l'équation aux carrés des différences, elle tiendra lieu de celle que produirait l'élimination de y entre les équations (1) et (2). On devra alors calculer les racines négatives de l'équation aux carrés des différences, les prendre en signe contraire, les diviser par 4, et extraire les racines carrées des résultats. On obtiendra ainsi toutes les valeurs de z; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de y, en substituant chacune des valeurs de z dans les équations (1) et (2) et cherchant le plus grand commun diviseur des équations en y produites par la substitution. Il pourra d'ailleurs arriver que toutes les valeurs de z ne déterminent pas des valeurs réelles de y; car, lorsque l'équation proposée a des racines imaginaires non conjuguées, dont la partie réelle est la même, comme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha + \gamma\sqrt{-1}$, le carré de la différence de ces racines est une quantité négative; de sorte que l'équation aux carrés des différences peut avoir plus de racines négatives que la proposée n'a de couples de racines imaginaires.

CHAPITRE SEIZIÈME.

DE L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES. RECHERCHE DES DIVISEURS DU SECOND DEGRÉ. ÉQUATIONS BINOMES ET TRINOMES. ÉQUATIONS IRRATIONNELLES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

De l'abaissement des équations.

472. On a vu qu'une équation qui a des racines égales peut être remplacée par plusieurs autres équations de degrés moindres; on dit alors que l'équation proposée est susceptible d'*abaissement*. On peut également abaisser le degré d'une équation, quand on connait des relations particulières entre quelques-unes des racines.

473. Supposons qu'en désignant par p, q, r trois quantités connues, on sache que deux racines a et b d'une équation $f(x) = 0$ doivent vérifier l'équation

$$(1) \qquad pa + qb = r.$$

Puisque a et b sont des racines de l'équation $f(x) = 0$, on devra avoir $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Or, en substituant dans $f(b) = 0$ la valeur de b tirée de l'équation (1), on obtient $f\left(\frac{r - pa}{q}\right) = 0$. La quantité a doit donc vérifier à la fois les deux équations $f(x) = 0$ et $f\left(\frac{r - px}{q}\right) = 0$. Par conséquent, si l'on cherche le plus grand commun diviseur D des premiers membres de ces équations, l'équation $D = 0$ admettra la racine a.

Si l'équation $f(x) = 0$ a une racine a qui satisfasse à la condition $pa + qa = r$, ou $a = \frac{r}{p + q}$, cette racine véri-

fiera aussi l'équation $f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$; par conséquent elle sera donnée par l'équation $D=0$.

Réciproquement, toute racine a de l'équation $D=0$ sera une racine de l'équation proposée, par laquelle on en aura une autre b, au moyen de la relation $pa+qb=r$, ou qui satisfera à la condition $pa+qa=r$; car cette racine vérifiera l'équation $f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$, par conséquent $\frac{r-pa}{q}$ sera une racine de $f(x)=0$.

474. Si l'on a $p=q$, la relation (1) devient $a+b=s$, en posant pour abréger $\frac{r}{p}=s$. Il faut alors chercher le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$ et $f(s-x)$. Soit D ce plus grand commun diviseur. Les deux racines a et b entrant de la même manière dans la relation $a+b=s$, l'équation $D=0$ ne doit pas donner une d'elles plutôt que l'autre; ainsi elle doit les donner toutes deux. Cette équation doit donner, en outre, toutes les racines de l'équation proposée qui satisfont à la condition $a+a=s$, ou $a=\frac{1}{2}s$.

Si toutes les racines peuvent être groupées deux à deux de manière que la somme des racines de chaque groupe soit égale à s, l'équation $f(s-x)=0$ sera la même que $f(x)=0$, et il faudra recourir à un autre procédé pour opérer l'abaissement On pourra diminuer les racines de $\frac{1}{2}s$; la somme des racines de chaque groupe sera alors diminuée de s; il résultera de là que les racines de l'équation transformée seront égales deux à deux en valeur absolue, et de signes contraires; par conséquent cette équation sera réductible à un degré sous-double.

Si l'équation $f(x)=0$ est de degré impair et ne change pas quand on y remplace x par $s-x$, elle a au moins une racine égale à $\frac{1}{2}s$; et quand on a diminué toutes les racines

de $\frac{1}{2}s$, la racine correspondante de la transformée est égale à zéro.

475. Quand on connaît le produit p de deux racines, en représentant une de ces racines par a, l'autre est $\frac{p}{a}$; et comme a ne désigne pas une des deux racines plutôt que l'autre, chacune d'elles doit vérifier l'équation $f\left(\frac{p}{x}\right) = 0$. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur D des polynômes $f(x)$ et $f\left(\frac{p}{x}\right)$; l'équation $D = 0$ devra admettre les deux racines a et $\frac{p}{a}$. Si la proposée $f(x) = 0$ a des racines dont le carré soit égal à p, elles seront aussi comprises dans l'équation $D = 0$; car, en supposant $a = \pm\sqrt{p}$, on a $\frac{p}{a} = \pm\sqrt{p}$. Mais, puisque p est une quantité connue, on peut supprimer toutes les racines de l'équation proposée égales à $\pm\sqrt{p}$ Alors l'équation $D = 0$ ne donnera que les racines qui pourront être groupées deux à deux, de manière que le produit des racines de chaque groupe soit égal à p.

476. Lorsque chaque racine a est liée à une autre b de telle sorte que l'on ait $ab = p$, les équations $f(x) = 0$ et $f\left(\frac{p}{x}\right) = 0$ sont identiques, et l'abaissement ne peut plus être opéré de la même manière.

Si l'on représente par z la somme de deux racines d'un même couple, le nombre des valeurs de z sera la moitié du nombre des racines; par conséquent ces valeurs dépendront d'une équation dont le degré sera sous-double de celui de la proposée. z désignant la somme de deux racines dont le produit est p, le polynôme $f(x)$ devra être divisible par

$x^2 - zx + p$, on pourra effectuer la division et on devra exprimer que le reste du premier degré par rapport à x doit être nul indépendamment de la valeur de x; on obtiendra ainsi deux équations $M = 0$, $N = 0$; on calculera le plus grand commun diviseur D des polynômes M et N; l'équation cherchée sera $D = 0$.

477. On peut former autrement l'équation en z. Considérons, par exemple, une équation du sixième degré,

$$(2) \qquad x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0.$$

Cherchons d'abord quelles sont les conditions nécessaires pour que les racines présentent le cas dont nous nous occupons. En remplaçant x par $\frac{p}{x}$, on obtient l'équation

$$(3) \qquad x^6 + \frac{Ep}{F}x^5 + \frac{Dp^2}{F}x^4 + \frac{Cp^3}{F}x^3 + \frac{Bp^4}{F}x^2 + \frac{Ap^5}{F}x + \frac{p^6}{F} = 0.$$

Pour que ces deux équations soient identiques, on doit avoir

$$A = \frac{Ep}{F}, \quad B = \frac{Dp^2}{F}, \quad C = \frac{Cp^3}{F},$$

$$D = \frac{Bp^4}{F}, \quad E = \frac{Ap^5}{F}, \quad F = \frac{p^6}{F}$$

La dernière condition donne $F^2 = p^6$, d'où $F = \pm p^3$; mais puisque les racines doivent se grouper deux à deux de manière que le produit des racines de chaque groupe soit égal à p, le produit de toutes les racines doit être égal à p^3: par conséquent on doit rejeter la condition $F = -p^3$. Les conditions ci-dessus se réduisent ainsi aux suivantes :

$$F = p^3, \quad E = Ap^2, \quad D = Bp;$$

de sorte que l'équation est

$$(4) \qquad x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Bpx^2 + Ap^2x + p^3 = 0.$$

Il est clair que, si l'on considérait une équation d'un degré plus élevé, on obtiendrait des conditions analogues.

En divisant tous les termes de l'équation (4) par x^3 et réunissant les termes également éloignés des extrêmes, on a

$$(5) \qquad x^3 + \frac{p^3}{x^3} + A\left(x^2 + \frac{p^2}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{p}{x}\right) + C = 0.$$

Soit

$$(6) \qquad x + \frac{p}{x} = z;$$

on trouve, en élevant les deux membres au carré,

$$(7) \qquad x^2 + \frac{p^2}{x^2} = z^2 - 2p.$$

En multipliant $x^2 + \frac{p^2}{x^2}$ par $x + \frac{p}{x}$, on obtient

$$x^3 + \frac{p^2}{x} + px + \frac{p^3}{x^3}, \quad \text{ou} \quad x^3 + \frac{p^3}{x^3} + p\left(x + \frac{p}{x}\right);$$

donc

$$(8) \qquad x^3 + \frac{p^3}{x^3} = z^3 - 3pz.$$

En substituant dans l'équation (4) les valeurs des binômes $x + \frac{p}{x}$, $x^2 + \frac{p^2}{x^2}$, $x^3 + \frac{p^3}{x^3}$, on aura, pour déterminer z, une équation du troisième degré. Les valeurs de z étant connues, on obtiendra celles de x au moyen de l'équation (6), ou

$$x^2 - zx + p = 0.$$

478. Lorsqu'on rend les équations (2) et (3) identiques en adoptant la condition $F = -p^3$, les autres conditions sont $E = -Ap^2$, $D = -Bp$, et $C = -C$, d'où $C = 0$. D'après ces conditions, les racines de l'équation (2) sont telles qu'on les reproduit toutes en divisant successivement p par chacune d'elles; ainsi, à chaque racine a, il en

correspond une autre $\frac{p}{a}$, à moins que l'on n'ait $a = \frac{p}{a}$, d'où $a = \pm\sqrt{p}$. Le produit de toutes les racines qui forment des groupes tels que a et $\frac{p}{a}$ est une puissance de p; donc, puisque le produit de toutes les racines est $-p^3$, il faut qu'une des racines soit égale à $-\sqrt{p}$; et, puisque le nombre des racines est pair, il faut qu'il y ait aussi une racine égale à $+\sqrt{p}$. S'il y a plusieurs racines égales à $-\sqrt{p}$, elles sont en nombre impair, et il en est de même des racines égales à $+\sqrt{p}$. On supprimera ces racines, et on obtiendra ensuite les autres racines de la même manière que dans le numéro précédent.

479. Considérons encore le cas où l'on connaît une relation entre trois racines, et supposons qu'elle soit exprimée par l'équation

$$pa + qb + rc = s, \tag{9}$$

p, q, r, s étant des quantités connues. On devra joindre cette relation les trois équations

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0.$$

En éliminant b et c entre les deux dernières équations et l'équation (9), on en obtiendra une qui ne contiendra que l'inconnue a, et qui devra être vérifiée en même temps que $f(a) = 0$; par conséquent ces deux équations admettront un commun diviseur D, au moyen duquel on trouvera la valeur de a. Si l'on a $p = q$, l'équation $D = 0$ devra donner les deux racines a et b; si l'on a $p = q = r$, l'équation $D = 0$ donnera les trois racines a, b, c. Si, outre les racines qui satisfont à l'équation (9), il y a une racine a qui soit liée à une autre b par la condition $pa + qb + rb = s$, ou qui satisfasse à la condition $pa + qa + ra = s$, elle sera aussi comprise dans l'équation $D = 0$, puisqu'elle fera partie

d'un système de valeurs de a, b et c qui vérifiera l'équation (9) et les trois équations

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0.$$

480. Supposons que la relation connue soit $a + c = 2b$. En cherchant une des trois racines a, b, c par la méthode qui vient d'être indiquée, on trouvera aussi les racines qui satisferont à la condition $a + a = 2a$; et comme cette relation est une identité, on devra trouver toutes les racines; de sorte que l'équation $D = 0$ sera la même que $f(x) = 0$.

On parvient à la même conclusion par une autre considération, qui montre en même temps comment la méthode doit être modifiée, dans le cas qui nous occupe et dans les autres cas analogues. Supposons qu'on veuille trouver la racine b, qui est moyenne arithmétique entre deux autres. De la relation $a + c = 2b$ jointe à $f(c) = 0$, on conclut $f(2b - a) = 0$; il faut donc éliminer a entre $f(2b - a) = 0$ et $f(a) = 0$. Afin de reconnaître quelles seront les solutions de ces deux équations, exprimons-les par $f(x) = 0$ et $f(2y - x) = 0$; et concevons que l'on substitue successivement dans la seconde, à la place de x, les racines a, b, c, etc. de la première. Par la substitution de a à la place de x, on aura l'équation $f(2y - a) = 0$, et on satisfera à cette équation, en posant $2y - a = a$, $= b$, $= c$, etc.; donc

$$y = a, \quad = \tfrac{1}{2}(a + b), \quad = \tfrac{1}{2}(a + c), \ldots.$$

De même, en remplaçant x par b, on obtiendra

$$y = b, \quad = \tfrac{1}{2}(b + a), \quad = \tfrac{1}{2}(b + c), \ldots.$$

Il suit de là qu'en éliminant x entre les deux équations, on parviendra à une équation dont les racines seront toutes celles de la proposée, et les demi-sommes de ces racines prises deux à deux. Soit $F(y) = 0$ cette équation; on pourra supprimer les racines égales à celles de la proposée

en divisant $F(y)$ par $f(y)$; il en résultera une équation qui ne comprendra plus que les demi-sommes des racines a, b, c, etc.; et, d'après la relation $b = \frac{1}{2}(a+c)$, cette équation aura une racine commune avec la proposée, qui sera la racine b.

Au lieu du système des deux équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(2y - x) = 0,$$

on peut considérer le système équivalent

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(2y - x) - f(x) = 0.$$

La dernière équation admet le facteur $y - x$; car le premier membre devient nul quand on suppose $y = x$. En supprimant le facteur $y - x$, avant de faire l'élimination, on supprimera les solutions du système $f(x) = 0$, $y - x = 0$, par lesquelles on a les valeurs de y égales aux racines de la proposée; et en effectuant ensuite l'élimination, on obtiendra l'équation qui devra donner les demi-sommes des racines considérées deux à deux.

481. Ce que nous venons de dire, par rapport à des relations exprimées par des équations du premier degré, s'applique à des relations quelconques; et les difficultés que l'on peut rencontrer dans les questions de cette nature ne consistent que dans les éliminations qu'il faut effectuer.

« En général, dit Lacroix, l'abaissement a lieu lorsqu'on obtient, entre les inconnues d'un problème possible, plus d'équations qu'il ne renferme d'inconnues, ce à quoi on parvient souvent en considérant le problème proposé sous plusieurs faces; on trouve alors entre une même inconnue deux équations finales qui, devant s'accorder entre elles, ont un diviseur commun, duquel on tire la solution la plus simple dont le problème soit susceptible. »

482. Lorsque l'on veut déterminer des coefficients d'une équation, de manière qu'elle admette des racines qui satisfassent à de certaines conditions, on déduit de ces conditions un système d'équations qui doivent être vérifiées simultanément; et on en conclut les relations qui doivent exister entre les coefficients, en éliminant toutes les autres inconnues.

Supposons, par exemple, que l'on ait à trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation, pour qu'elle ait deux racines qui ne diffèrent l'une de l'autre que par leur signe. Soit l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Celle qui a les mêmes racines prises en signes contraires est

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0;$$

il faudra donc que cette équation et la précédente aient deux racines communes.

On peut substituer à ces deux équations celles qui s'en déduisent en les ajoutant et en les retranchant, ce qui donne

$$x^4 + qx^2 + s = 0, \quad px^3 + rx = 0.$$

La dernière équation est vérifiée par $x = 0$; mais cette solution ne remplit pas la condition proposée. On vérifie aussi cette équation par $x^2 = -\frac{r}{p}$; et en substituant cette valeur de x^2 dans l'autre équation, on obtient la condition cherchée

$$r^2 - pqr + p^2 s = 0.$$

483. Considérons aussi le cas où l'on veut exprimer qu'une équation $f(x) = 0$ doit avoir une racine répétée n fois. Cette racine doit vérifier les équations

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x) = 0;$$

de sorte qu'il faut que ces équations et la proposée aient une racine commune. Cette racine commune ne devant se trouver qu'une fois dans $f^{(n-1)}(x)$, on cherchera d'abord la condition nécessaire pour que les deux polynômes $f^{(n-2)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$ aient un commun diviseur du premier degré; et il faudra que la valeur de x qui annulera ce commun diviseur, annule aussi tous les autres polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-3)}x$. On obtiendra ainsi $n-1$ conditions.

Supposons que l'équation proposée soit celle de l'exemple précédent, et qu'elle doive avoir une racine triple. En divisant $f'(x)$ par $f''(x)$, on aura un reste du premier degré; il faudra que la valeur de x pour laquelle ce reste sera zéro annule aussi $f''(x)$, puisque ce reste devra être diviseur de $f''(x)$. Si cette condition est remplie, la même valeur de x annulera aussi $f'(x)$, et il faudra de plus qu'elle annule $f(x)$.

Des équations réciproques.

484. On nomme équations *réciproques* celles dont on reproduit toutes les racines, quand on divise successivement l'unité par chacune d'elles. Ces équations sont comprises parmi celles dont les racines satisfont aux conditions que nous avons examinées dans les n°s 477 et 478; on a alors $p = 1$. On conclut de là, par des calculs semblables à ceux du n° 477, que, pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux, ou qu'ils soient égaux en valeur absolue et de signes contraires, et que l'équation, dans ce cas, manque du terme du milieu. On trouve, de même, que, pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux, ou qu'ils soient égaux en valeur absolue et de signes contraires. On

reconnaît, en outre, par un raisonnement semblable à celui qui a été employé dans le n° 478, qu'une équation réciproque de degré impair a une racine égale à -1, quand les coefficients des termes équidistants des extrêmes ont les mêmes signes; à $+1$ quand ces coefficients ont des signes contraires; et lorsque l'équation est de degré pair, si les coefficients des termes équidistants des extrêmes ont des signes contraires, elle a les racines $+1$ et -1. On parvient d'ailleurs aux mêmes conclusions par l'inspection des équations. Quand on a supprimé les racines égales à ± 1, la détermination des autres racines dépend de la résolution de l'équation qu'on obtient en prenant pour inconnue la somme $x+\frac{1}{x}$ de deux racines réciproques, et en opérant de la même manière que dans le n° 477.

485. Les valeurs des binômes $x+\frac{p}{x}$, $x^2+\frac{p^2}{x^2}$, $x^3+\frac{p^3}{x^3}$,... peuvent se déduire les unes des autres au moyen d'une formule générale. On a par la multiplication

$$\left(x^n+\frac{p^n}{x^n}\right)\left(x+\frac{p}{x}\right)=x^{n+1}+\frac{p^n}{x^{n-1}}+px^{n-1}+\frac{p^{n+1}}{x^{n+1}}.$$

Donc

$$x^{n+1}+\frac{p^{n+1}}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{p^n}{x^n}\right)\left(x+\frac{p}{x}\right)-p\left(x^{n-1}+\frac{p^{n-1}}{x^{n-1}}\right);$$

et pour $p=1$

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Ces formules démontrent qu'en posant $x+\frac{p}{x}=z$, on obtient pour le binôme $x^n+\frac{p^n}{x^n}$ une fonction de z du degré n.

Recherche des diviseurs du second degré.

486. Lorsque l'on veut trouver les diviseurs du second degré d'une équation, on représente l'un quelconque de ces diviseurs par $x^2 + px + q$. En effectuant la division du premier membre de l'équation par ce trinôme, on parvient à un reste du premier degré $Px + Q$, P et Q désignant des quantités qui contiennent les coefficients inconnus p et q. La division devant se faire exactement, il faut que ce reste soit nul indépendamment de la valeur de x, ce qui exige qu'on ait $P = 0$, $Q = 0$. On obtient les diviseurs cherchés en prenant pour p et q les couples de valeurs qui vérifient ces deux équations.

Le nombre des diviseurs du second degré étant $\frac{1}{2}m(m-1)$ (n° 383), si l'on élimine p ou q entre les deux équations $P = 0$, $Q = 0$, l'équation finale devra être du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$; et comme ce nombre est plus grand que m, toutes les fois que m surpasse 3, il s'ensuit que la détermination des diviseurs du second degré offrira généralement plus de difficulté que la résolution de l'équation proposée. Mais, s'il existe des couples de valeurs commensurables de p et de q qui satisfassent aux équations $P = 0$, $Q = 0$, il sera facile de les déterminer; on connaîtra par là tous les diviseurs commensurables du second degré de l'équation proposée, et la résolution de l'équation sera ramenée à celle d'une équation de degré moindre et de plusieurs équations du second degré.

487. Considérons l'équation

$$x^3 + ax + b = 0. \tag{1}$$

En divisant le premier membre par $x^2 + px + q$, on parvient au reste

$$(p^2 - q + a)x + pq + b.$$

Il faut poser les deux équations

$$p^2 - q + a = 0, \quad pq + b = 0.$$

En éliminant q entre ces deux équations, on obtient

$$(2) \qquad p^3 + ap + b = 0.$$

Celle-ci n'étant autre que l'équation (1), dans laquelle a est remplacé par p les valeurs de p sont les racines de l'équation proposée

On s'explique cette particularité comme il suit : si l'on représente par α, β, γ les racines de l'équation (1), les diviseurs cherchés sont

$$(x-\alpha)(x-\beta), \quad (x-\alpha)(x-\gamma), \quad (x-\beta)(x-\gamma);$$

les diverses valeurs de p sont donc

$$-(\alpha+\beta), \quad -(\alpha+\gamma), \quad -(\beta+\gamma);$$

mais, puisque le coefficient de x^2 dans l'équation proposée est zéro, on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

d'où l'on conclut

$$-(\alpha+\beta) = \gamma, \quad -(\alpha+\gamma) = \beta, \quad -(\beta+\gamma) = \alpha.$$

188. Considérons encore l'équation

$$(3) \qquad x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

En divisant le premier membre par $x^2 + px + q$, on parvient au reste

$$(b - ap + 2pq - p^3)x + c - aq + q^2 - p^2q.$$

Il faut donc poser les deux équations

$$(4) \quad p^3 - 2pq + ap - b = 0, \quad (5) \quad q^2 - (a + p^2)q + c = 0.$$

On conclut de la première

$$(6) \qquad q = \frac{p^3 + ap - b}{2p};$$

et en substituant cette valeur de q dans la seconde équation, on obtient

$$(7) \qquad p^6 + 2ap^4 + (a^2 - 4c)p^2 - b^2 = 0.$$

Cette équation est du sixième degré; mais comme elle ne contient que des puissances paires de l'inconnue p, on la ramènera à une équation du troisième degré en posant $p^2 = z$.

On pouvait prévoir cette réduction; car les six valeurs de p doivent être les sommes deux à deux des quatre racines de l'équation proposée; or, la somme de ces racines étant nulle, la somme de deux quelconques d'entre elles est égale et de signe contraire à la somme des deux autres; l'équation qui détermine p ne doit donc contenir que des puissances paires de l'inconnue.

Si l'on considérait l'équation complète

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

le coefficient p dépendrait d'une équation complète du sixième degré; mais cette équation serait susceptible d'abaissement. En effet, si l'on nomme α, β, γ, δ les quatre racines de l'équation proposée, on aura

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -a;$$

d'où il suit que les valeurs de p se groupent deux à deux de manière que la somme des racines de chaque groupe est égale à a; par conséquent, si l'on fait disparaître le second terme de l'équation en p, les autres puissances impaires de cette inconnue disparaîtront aussi (n° 474).

L'élimination de p entre les équations (4) et (5) conduirait également à une équation susceptible d'abaissement; car les valeurs de q sont $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$; or $\alpha\beta\gamma\delta = d$; les valeurs de q se groupent donc deux à deux

de manière que le produit des racines de chaque groupe est égal à d.

489. Le dernier terme de l'équation (7) étant négatif, cette équation a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative (n° 376); et, pour chaque valeur réelle de p, on obtient une valeur réelle de q. La proposition qu'une équation dont les coefficients sont réels admet toujours des facteurs réels du second degré, se trouve ainsi établie pour l'équation du quatrième degré, indépendamment des théorèmes généraux que nous avons démontrés à ce sujet.

Quand on a $b = 0$, l'équation (4) devient

$$p^3 - 2pq + ap = 0;$$

on satisfait donc aux deux équations (4) et (5), en posant

$$p = 0, \quad q^2 - (a + p^2)q + c = 0,$$

ou en posant

$$p^2 - 2q + a = 0, \quad q^2 - (a + p^2)q + c = 0.$$

Le premier système donne

$$q = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - c}.$$

Dans l'autre système, la première équation donne $q = \frac{a+p^2}{2}$, et la substitution de cette valeur dans la seconde équation conduit à

$$p^4 + 2ap^2 + a^2 - 4c = 0.$$

Lorsque l'on a $a^2 - 4c > 0$, la formule $q = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c}$ détermine deux valeurs réelles de q. Quand on a, au contraire, $a^2 - 4c < 0$, ces valeurs sont imaginaires; mais, dans ce cas, l'équation $p^4 + 2ap^2 + a^2 - 4c = 0$ détermine deux valeurs réelles de p, et pour chacune de ces valeurs on obtient une valeur réelle de q.

490. On pourrait se proposer de déterminer les facteurs

du troisième degré d'une équation, ceux du quatrième degré, etc.; mais la recherche de ces diviseurs n'a pas d'utilité, et elle dépend de la résolution d'un système d'équations dans lequel le nombre des inconnues est égal au degré des diviseurs que l'on veut obtenir.

Des équations binômes et des équations trinômes réductibles au second degré.

491. Les équations binômes peuvent être ramenées à cette forme

$$x^m - A = 0. \tag{1}$$

Les racines de l'équation (1) sont les diverses valeurs algébriques de l'expression $\sqrt[m]{A}$; or, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de A, l'équation (1) admet m racines (n° 382); de plus, toutes ces racines sont inégales, car il n'existe aucun facteur commun entre le binôme $x^m - A$ et sa fonction dérivée du premier ordre, qui est mx^{m-1}. Le radical $\sqrt[m]{A}$, considéré algébriquement, admet donc m valeurs différentes; ce qui est la proposition qui a été énoncée dans le n° 214.

Soit a une des valeurs du radical $\sqrt[m]{A}$, c'est-à-dire une des racines de l'équation (1); on aura $a^m = A$; et si l'on pose $x = ay$, en substituant cette valeur de x dans l'équation et divisant chaque terme par a^m, il en résultera

$$y^m - 1 = 0. \tag{2}$$

On obtiendra donc toutes les valeurs de $\sqrt[m]{A}$ en multipliant l'une d'elles par les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$.

492. Supposons la quantité A réelle, et distinguons les deux cas de A positif et de A négatif, en considérant les

deux équations

$$(3) \qquad x^m - A = 0, \qquad (4) \qquad x^m + A = 0.$$

Soit alors a la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{A}$; en posant $x = ay$, on ramènera les équations (3) et (4) à celles-ci :

$$(5) \qquad y^m - 1 = 0, \qquad (6) \qquad y^m + 1 = 0.$$

Les équations (5) et (6) sont réciproques, et on les résoudra au moyen de ce qui a été dit dans les n°s 484 et 485.

Examinons successivement le cas où m est impair, et celui où m est pair.

L'équation $y^{2n+1} - 1 = 0$ a une racine égale à 1. Elle n'a pas d'autre racine réelle; car elle ne peut être vérifiée par une valeur négative de y; et si l'on donne à y une valeur positive différente de 1, y^{2n+1} ne sera pas égal à 1. En divisant le premier membre par $y - 1$, on obtient l'équation

$$(7) \qquad y^{2n} + y^{2n-1} + y^{2n-2} + \ldots + y^2 + y + 1 = 0.$$

La résolution de cette équation dépendra de celle d'une équation de degré sous-double.

L'équation $y^{2n+1} + 1 = 0$ a la racine réelle -1; les autres racines sont imaginaires; en divisant l'équation par le facteur $y + 1$, on aura une équation réciproque du degré $2n$. On peut aussi remarquer que les racines de $y^{2n+1} + 1 = 0$, sont celles de $y^{2n+1} - 1 = 0$, changées de signes.

L'équation $y^{2n} - 1 = 0$ a les deux racines réelles $+1$ et -1; les autres racines sont imaginaires. On pourrait diviser l'équation par $y^2 - 1$; on obtiendrait ainsi une équation réciproque du degré $2n - 2$, qui ne contiendrait que les puissances paires de y. Mais, de ce que

$$y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1),$$

on aura toutes les racines de $y^{2n} - 1 = 0$, en résolvant séparément les deux équations

$$y^n - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^n + 1 = 0.$$

L'équation $y^{2n} + 1 = 0$ n'a que des racines imaginaires; on la réduira à une autre de degré sous-double en divisant par y^n et faisant $y + \frac{1}{y} = z$. On peut aussi ramener la résolution de l'équation $y^{2n} + 1 = 0$ à celle d'une équation binôme de degré impair, en suivant la marche qui a été indiquée dans les n°s 211 et 212 (*).

493. Après la suppression des racines réelles de l'équa-

(*) Lorsque $m = 2^k \cdot n$, on peut faire dépendre la résolution de l'équation $y^m + 1 = 0$ de celle d'une équation du degré n, sans avoir à extraire des racines carrées de quantités imaginaires. Considérons, par exemple, l'équation

$$y^{40} + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad y^{40} + \frac{1}{y^{40}} = 0.$$

En faisant $y + \frac{1}{y} = s$, on a

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = s^2 - 2.$$

Soit $s^2 - 2 = v$, il en résultera

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = v^2 - 2.$$

Faisant de même $v^2 - 2 = u$, on aura

$$y^8 + \frac{1}{y^8} = u^2 - 2.$$

Faisant encore $u^2 - 2 = t$, on conclura de la relation précédente, d'après les formules du n° 485,

$$y^{40} + \frac{1}{y^{40}} = t^5 - 5t^3 + 5t.$$

Il suit de là que l'on aura toutes les racines de l'équation proposée en résolvant successivement les cinq équations

$$t^5 - 5t^3 + 5t = 0, \quad u^2 - 2 = t, \quad v^2 - 2 = u, \quad s^2 - 2 = v, \quad y^2 - sy + 1 = 0.$$

Toutes les valeurs de s devant être réelles (n° 493), les valeurs de v, u et t seront aussi réelles.

tion $y^m \mp 1 = 0$, la transformée en z qui résulte de la relation $y + \frac{1}{y} = z$, a toutes ses racines réelles. Pour le démontrer, représentons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ une des valeurs imaginaires de y, l'inverse de cette valeur sera

$$\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Mais $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ étant une racine de l'équation $y^m = \pm 1$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ est aussi une racine de cette équation; de sorte qu'on a

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m = \pm 1, \quad (\alpha - \beta\sqrt{-1})^m = \pm 1,$$

d'où l'on conclut

$$[(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})]^m = 1, \quad \text{ou} \quad (\alpha^2 + \beta^2)^m = 1;$$

et puisque $\alpha^2 + \beta^2$ est une quantité positive, il faut que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Donc

$$\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Cette dernière égalité fait voir que toutes les valeurs de $y + \frac{1}{y}$ sont réelles.

494. Nous indiquerons pour exemples les résultats suivants :

$y^5 - 1 = 0$. L'un des deux couples imaginaires est

$$\tfrac{1}{4}\left[-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}\sqrt{-1}\right];$$

l'autre en diffère seulement par le signe de $\sqrt{5}$.

$y^7 - 1 = 0$. Les racines imaginaires dépendent des valeurs de z données par l'équation

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0.$$

$y^9 - 1 = 0$. On a trois racines par l'équation $y^3 - 1 = 0$, les six autres dépendent des valeurs de z données par l'équation

$$z^3 - 3z + 1 = 0.$$

$y^6 + 1 = 0$. Les racines sont

$$\pm\sqrt{-1}, \quad \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}).$$

$y^8 + 1 = 0$. On a le couple de racines conjuguées

$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right];$$

et tous ceux qui en diffèrent seulement par le signe de $\sqrt{2}$ et par celui de la partie réelle $\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$.

$y^{10} + 1 = 0$. On a les deux racines $\pm\sqrt{-1}$, le couple

$$\tfrac{1}{4}\left[\sqrt{2(5+\sqrt{5})} \pm \sqrt{2(3-\sqrt{5})}\sqrt{-1}\right],$$

et tous ceux qui en diffèrent seulement par le signe de $\sqrt{5}$ et par celui de la partie réelle $\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}$.

Les racines des trois premières équations sont, au signe près, celles des équations

$$y^3 + 1 = 0, \quad y^7 + 1 = 0, \quad y^9 + 1 = 0,$$

et quant aux équations

$$y^6 - 1 = 0, \quad y^8 - 1 = 0, \quad y^{10} - 1 = 0,$$

leur résolution ne dépend que de celle des équations binômes jusqu'au cinquième degré.

495. Considérons les deux équations $y^m - 1 = 0$ et $y^n - 1 = 0$, et proposons-nous de reconnaître si elles peuvent avoir d'autres racines communes que l'unité. Il faudra chercher le plus grand commun diviseur des deux binômes $y^m - 1$ et $y^n - 1$. Or, en supposant $n < m$, et en effectuant la division de $y^m - 1$ par $y^n - 1$, on trouvera les

restes successifs $y^{m-n}-1$, $y^{m-2n}-1$, etc., de sorte que, si $m=nq+r$ (r étant moindre que n), la division pourra être continuée jusqu'à ce que le reste soit y^r-1. De même, si $n=rq'+r'$, la division de y^n-1 par y^r-1 conduira au reste $y^{r'}-1$. Ainsi de suite. Donc, si s est le plus grand commun diviseur des exposants m et n, le dernier diviseur sera y^s-1, et le reste correspondant sera $y^0-1=0$. Dans ce cas, les deux équations auront s racines communes. Si m et n sont premiers entre eux, les deux équations n'auront pas d'autre racine commune que l'unité.

496. Désignons par α l'une des racines imaginaires de $y^m-1=0$. Toutes les puissances entières, positives ou négatives, de α, seront des racines de la même équation; car, puisque $\alpha^m=1$, si n est un nombre entier, positif ou négatif, en élevant à la puissance $n^{ième}$, on aura

$$(\alpha^m)^n=1, \quad \text{ou} \quad (\alpha^n)^m=1.$$

Les puissances de α ne peuvent pas donner plus de m racines différentes, et on obtiendra toutes ces racines en ne considérant que les puissances dont les exposants seront les nombres positifs de 1 à m. Car, de $\alpha^m=1$ on conclut

$$\alpha^{m+1}=\alpha, \quad \alpha^{m+2}=\alpha^2, \ldots;$$

et pour les puissances négatives,

$$\alpha^{-1}=\alpha^m\times\alpha^{-1}=\alpha^{m-1}, \quad \alpha^{-2}=\alpha^m\times\alpha^{-2}=\alpha^{m-2}, \ldots.$$

Lorsque le nombre m est premier, les puissances de α dont les exposants sont les nombres de 1 à m sont toutes différentes. Car soit, s'il est possible, $\alpha^n=\alpha^{n'}$, n et n' étant moindres que m. On conclurait de cette égalité $\alpha^{n-n'}=1$; donc α serait une racine commune aux deux équations

$$y^m-1=0, \quad y^{n-n'}-1=0.$$

Or cela est impossible, puisque m étant premier, il est premier avec $n - n'$. Il suit de là que, *lorsque* m *est un nombre premier, on obtient toutes les racines de* $y^m - 1 = 0$ *en formant les puissances de l'une quelconque d'entre elles, autre que l'unité, depuis la première puissance jusqu'à la* m^ième^; on peut d'ailleurs remplacer α^m par α^0.

Quand m n'est pas premier, cette propriété n'a plus lieu qu'en choisissant une racine α qui ne soit pas comprise parmi celles des équations dont les degrés sont les diviseurs de m.

497. Soit $m = pq$, p et q étant premiers entre eux; et soient β une racine de $y^p - 1 = 0$ et γ une racine de $y^q - 1 = 0$. On aura

$$\beta^p = 1, \quad \text{et} \quad \gamma^q = 1,$$

d'où

$$\beta^{pq} = 1 \quad \text{et} \quad \gamma^{pq} = 1;$$

donc β et γ seront des racines de $y^m - 1 = 0$. Le produit $\beta\gamma$ sera aussi une racine de la même équation; car on conclut des égalités précédentes $(\beta\gamma)^{pq} = 1$. La racine β ayant p valeurs et la racine γ en ayant q, le produit $\beta\gamma$ en a pq. Toutes ces valeurs sont différentes. En effet, supposons qu'en nommant β' et γ' une racine de $y^p - 1 = 0$ différente de β, et une racine de $y^q - 1 = 0$ différente de γ, on ait $\beta\gamma = \beta'\gamma'$; il en résulterait $\beta^p\gamma^p = \beta'^p\gamma'^p$, par suite $\gamma^p = \gamma'^p$, puisque $\beta^p = \beta'^p$; donc aussi $\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^p = 1$. Or, $\gamma^q = \gamma'^q$, d'où $\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^q = 1$. Il faudrait donc que le rapport $\frac{\gamma}{\gamma'}$ fût une racine des deux équations $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$; et puisque p et q sont premiers entre eux, on devrait avoir $\gamma = \gamma'$ (n° 495), ce qui est contraire à l'hypothèse.

On conclut de là que, *si* p *et* q *sont premiers entre eux, on obtiendra toutes les racines de* $y^{pq} - 1 = 0$ *en multi-*

pliant toutes celles de $y^p - 1 = 0$ *par toutes celles de* $y^q - 1 = 0$.

498. Les méthodes qui viennent d'être exposées font connaître les expressions exactes des racines de l'équation $y^m \mp 1 = 0$, lorsque m est une puissance de 2, ou le produit de l'un des nombres 3, 5 et 15 par une puissance de 2. On peut exprimer, dans tous les cas, ces racines au moyen des lignes trigonométriques; mais, pour cette théorie, nous renverrons aux *Leçons de Géométrie analytique* de M. Lefébure de Fourcy ou aux *Éléments de Trigonométrie* de MM. Delisle et Gerono.

499. On donne particulièrement le nom d'équations trinômes aux équations qui peuvent être ramenées à cette forme :

$$x^{2m} + px^m + q = 0. \tag{8}$$

Si l'on pose $x^m = y$, il vient

$$y^2 + py + q = 0.$$

Soient α et β les deux valeurs de y ; les valeurs de x dépendront des deux équations binômes

$$x^m = \alpha, \quad x^m = \beta.$$

Quand les quantités α et β sont réelles, la résolution de ces équations se ramène à celle de l'équation $x^m = \pm 1$. Quand α et β sont imaginaires, on ne peut obtenir les expressions exactes des racines de l'équation (8), par les procédés algébriques, que dans le cas où le degré m est une puissance de 2.

Des équations irrationnelles.

500. Lorsqu'on veut faire disparaître des radicaux contenus dans une équation, on égale chaque radical à une inconnue; on obtient ainsi des équations qu'on peut immédiatement débarrasser des radicaux, en élevant les deux

membres de chaque équation à la puissance marquée par l'indice du radical. Ces nouvelles équations, jointes à celle qu'on obtient en remplaçant dans l'équation primitive chaque radical par l'inconnue à laquelle on l'a égalé, forment un système d'équations rationnelles, au moyen duquel on parvient à l'équation cherchée en éliminant toutes les inconnues auxiliaires.

Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt[3]{4x+7}+2\sqrt{x-4}=1;$$

on pose

$$\sqrt[3]{4x+7}=y, \quad \sqrt{x-4}=z,$$

ce qui donne

$$4x+7=y^3; \quad x-4=z^2.$$

Il faut éliminer y et z entre les deux dernières équations et

$$y+2z=1.$$

Celle-ci donne $y=1-2z$, et en substituant $1-2z$ à la place de y dans $4x+7=y^3$, il vient

$$4x+7=1-6z+12z^2-8z^3.$$

En éliminant z entre cette équation et $x-4=z^2$, on obtient

$$16x^3-184x^2+801x-1405=0.$$

On peut déduire directement la dernière équation de l'équation proposée. On conclut d'abord de celle-ci, en isolant le radical cubique,

$$\sqrt[3]{4x+7}=1-2\sqrt{x-4}.$$

En élevant les deux membres au cube, et transposant les termes, on obtient

$$(4x-13)\sqrt{x-4}=4x-27.$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, on parvient à l'équation ci-dessus $16x^3 - 184x^2 + \ldots = 0$.

Cette équation admet une racine commensurable qui est 5. Les deux autres racines dépendent de l'équation $16x^2 - 104x + 281 = 0$; elles sont imaginaires.

La racine réelle $x = 5$ ne convient pas à l'équation proposée, quand on considère seulement les valeurs arithmétiques des radicaux; mais elle vérifierait cette équation si l'on y changeait le signe du radical $\sqrt{x-4}$.

En général, lorsqu'on a fait disparaître les radicaux contenus dans une équation, l'équation rationnelle à laquelle on parvient doit donner toutes les valeurs de l'inconnue qui conviennent à l'équation proposée, et à toutes les équations qu'on peut en déduire en ayant égard aux différentes déterminations des radicaux; car, en égalant chaque radical à une inconnue, et en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par le degré du radical, on obtient des équations qui restent les mêmes pour toutes les déterminations des radicaux.

Il peut arriver qu'aucune des racines de l'équation finale produite par l'élimination des inconnues auxiliaires ne satisfasse à l'équation donnée, en considérant seulement les valeurs arithmétiques des radicaux; dans ce cas, l'équation, envisagée de cette manière, est impossible.

501. Les procédés que nous venons d'exposer peuvent aussi servir à former une équation rationnelle qui admette pour racine une expression irrationnelle donnée. On parvient alors à une équation dont les racines sont les diverses valeurs que prend l'expression proposée, quand on a égard à toutes les déterminations de chacun des radicaux qui y sont contenus.

Supposons, par exemple, que l'on demande de former une équation délivrée de radicaux qui admette pour racine

l'expression

$$x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$

On pourra poser

$$\sqrt[3]{a} = y, \quad \sqrt[3]{b} = z,$$

d'où

$$a = y^3, \quad b = z^3 \quad \text{et} \quad x = y + z;$$

on obtiendra l'équation demandée par l'élimination de y et de z entre les trois dernières équations.

On peut aussi éviter, pour cet exemple, de recourir à des inconnues auxiliaires. On conclut de l'équation $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, en élevant les deux membres au cube,

$$x^3 = a + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + b,$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$x^3 - a - b = 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

En remplaçant $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ par x, et en élevant ensuite les deux membres au cube, on obtient une équation du neuvième degré délivrée de radicaux.

On peut encore former l'équation cherchée d'après cette considération, que les racines de cette équation sont les diverses valeurs de l'expression $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, lorsque l'on combine de toutes les manières possibles les trois racines cubiques de a et les trois racines cubiques de b. Si l'on représente l'une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité par α, l'autre est α^2 (n° 212), et les combinaisons dont nous venons de parler fournissent neuf valeurs de x auxquelles correspondent les facteurs ci-après :

$$\begin{array}{lll}
x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}, \\
x - \alpha\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \alpha\sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \alpha\sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}, \\
x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}.
\end{array}$$

Pour former le produit de ces facteurs, on remarquera que l'on a $\alpha^3 = 1$, et $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, puisque 1, α et α^2 sont les trois racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$. En faisant après chaque multiplication partielle les réductions qui pourront être effectuées en vertu de ces deux égalités, on obtiendra une équation du neuvième degré en x qui ne contiendra aucun terme irrationnel.

Résolution générale de l'équation du quatrième degré.

502. Les calculs que nous avons développés dans le n° 488 conduisent à la résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Si l'on fait $p^2 = z$, dans l'équation (7) du n° 488, il vient

$$(2) \qquad z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0.$$

Cette équation étant du troisième degré, on pourra obtenir les expressions générales de ses racines (n° 215). En les désignant par $4z'$, $4z''$, $4z'''$, les valeurs de p seront $\pm 2\sqrt{z'}$, $\pm 2\sqrt{z''}$, $\pm 2\sqrt{z'''}$. Mais les valeurs de p peuvent aussi être exprimées au moyen des quatre racines de l'équation (1); et si l'on représente celles-ci par α, β, γ, δ, en observant que leur somme doit être nulle, on trouve, pour les six valeurs de p, $\pm(\alpha+\beta)$, $\pm(\alpha+\gamma)$, $\pm(\alpha+\delta)$. On a donc

$$\alpha + \beta = \pm 2\sqrt{z'}, \quad \alpha + \gamma = \pm 2\sqrt{z''}, \quad \alpha + \delta = \pm 2\sqrt{z'''}.$$

On déduit de là, en ayant toujours égard à la relation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$,

$$(3) \qquad \alpha = \pm\sqrt{z'} \pm \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''},$$

Comme α désigne l'une quelconque des quatre racines de l'équation (1), la formule (3) doit donner à la fois les expressions des quatre racines. D'un autre côté, l'équation (2) ne renfermant que le carré de b, elle reste la même quand on considère, au lieu de l'équation (1), l'équation $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$. La formule (3) doit donc donner aussi les racines de cette dernière équation. On voit, en effet, qu'en raison du double signe de chaque radical, l'expression de α admet huit déterminations différentes. Pour exclure les racines de l'équation $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$, on remarquera qu'en multipliant entre elles les trois quantités $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\alpha + \delta$, on obtient un produit qui se compose de la somme des produits trois à trois des racines α, β, γ, δ, augmentée de la quantité $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta$; cette dernière quantité étant nulle, puisqu'elle revient à $\alpha^2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, il en résulte que le produit $(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha + \delta)$ est égal à la somme des produits trois à trois des racines α, β, γ, δ. Or cette somme est égale à $-b$; par conséquent, on ne doit admettre dans la formule (3) que les combinaisons des signes des radicaux qui satisfont à la condition que le produit de ces trois radicaux ait le signe contraire à celui de b.

Supposons que les déterminations des trois radicaux représentées par $+\sqrt{z'}$, $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ soient telles, que leur produit ait le même signe que b; alors les quatre racines de l'équation (1) seront exprimées comme il suit :

$$(4)\qquad \begin{cases} +\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}, \\ +\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}, \\ -\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}, \\ -\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}. \end{cases}$$

503. L'équation (2) a nécessairement une racine positive, puisque son dernier terme est négatif. Les deux autres

racines doivent avoir le même signe; car le produit des trois racines est positif. Ces deux racines peuvent aussi être imaginaires.

La formule (3) montre que, lorsque les trois racines de l'équation (2) sont positives, l'équation (1) a toutes ses racines réelles. Réciproquement, l'équation (1) ne peut avoir toutes ses racines réelles, à moins que l'équation (2) n'ait ses trois racines positives; car les racines de l'équation (2) sont les carrés des sommes deux à deux des racines de l'équation (1); or, si les racines de l'équation (1) sont toutes réelles, les sommes deux à deux de ces racines seront aussi réelles, par conséquent les carrés de ces sommes seront positifs.

Si les racines z', z'', z''' sont positives, le produit $(+\sqrt{z'})\times(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})$ sera positif; par conséquent, les expressions (4) conviendront seulement au cas où b sera positif. Si b est négatif, on devra changer dans ces expressions le signe de l'un des radicaux.

Supposons maintenant que les racines z'' et z''' soient négatives. Dans ce cas les radicaux $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ peuvent être remplacés par $h\sqrt{-1}$ et $k\sqrt{-1}$, h et k désignant des quantités positives; le produit $(+\sqrt{z'})\times(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})$ devient donc $-hk\sqrt{z'}$; ainsi, pour que ce produit ait le même signe que b, il faut prendre pour $+\sqrt{z'}$ la détermination dont le signe est contraire à celui de b. De cette manière, les quatre racines sont

$$\begin{aligned}
&+\sqrt{z'}+(h-k)\sqrt{-1},\\
&+\sqrt{z'}-(h-k)\sqrt{-1},\\
&-\sqrt{z'}+(h+k)\sqrt{-1},\\
&-\sqrt{z'}-(h+k)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Ces quatre racines sont imaginaires, à moins que l'on n'ait

$h = k$; alors les deux premières expressions se réduisent à la quantité réelle $\sqrt{z'}$.

Supposons enfin que les deux racines z'' et z''' soient imaginaires : on aura $z'' = h + k\sqrt{-1}$ et $z''' = h - k\sqrt{-1}$. Les deux valeurs de $\sqrt{z''}$ pourront être exprimées par $\pm(m + n\sqrt{-1})$ (n° 208), et celles de $\sqrt{z'''}$ seront $\pm(m - n\sqrt{-1})$. Si l'on prend pour $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ les deux expressions conjuguées $m + n\sqrt{-1}$ et $m - n\sqrt{-1}$, on aura $(+\sqrt{z''}) \times (+\sqrt{z'''}) = m^2 + n^2$. Ainsi, pour que le produit $(+\sqrt{z'}) \times (+\sqrt{z''}) \times (+\sqrt{z'''})$ ait le même signe que b, il faudra prendre pour $+\sqrt{z'}$ la détermination dont le signe sera le même que celui de b. De cette manière les quatre racines seront

$$-\sqrt{z'} + 2m, \quad -\sqrt{z'} - 2m, \quad +\sqrt{z'} + 2n\sqrt{-1}, \quad +\sqrt{z'} - 2n\sqrt{-1}.$$

Les deux premières racines sont réelles, les deux autres sont imaginaires.

Remarque. — L'équation (2) est appelée la *réduite* de l'équation (1).

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES. DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Évaluation des fonctions symétriques des racines d'une équation.

504. On nomme *fonction symétrique* de plusieurs quantités, a, b, c, etc., toute expression composée de telle sorte qu'elle ne change pas lorsqu'on y échange entre elles ces quantités d'une manière quelconque; ainsi les coefficients d'une équation sont des fonctions symétriques des racines; de même

$$a^2b^3 + b^2a^3 + a^2c^3 + c^2a^3 + b^2c^3 + c^2b^3$$

est une fonction symétrique des trois quantités a, b, c.

On désigne abréviativement cette fonction par $S(a^2b^3)$, la lettre S étant employée pour exprimer le mot somme.

Quand chaque terme de la fonction ne contient qu'une seule lettre, comme $a^p + b^p + c^p +$ etc., on emploie la notation plus simple S_p.

La fonction S_p est dite *fonction symétrique simple, ou du premier ordre.* $S(a^2b^3)$ est *une fonction double, ou du deuxième ordre.* $S(a^m b^n c^p)$ est *une fonction triple, ou du troisième ordre*, etc.

Si l'on voulait former le développement de la fonction $S(a^m b^n c^p)$, il faudrait faire tous les arrangements trois à trois des lettres a, b, c, d, etc., qui devraient être contenues dans la fonction. On affecterait ensuite la première lettre de chaque arrangement de l'exposant m; la deuxième lettre, de l'exposant n; la troisième lettre, de l'exposant p.

Toutes les fonctions symétriques rationnelles qui ne sont pas comprises parmi celles que nous venons de définir, ne peuvent résulter que de la combinaison de deux ou de plusieurs de ces fonctions; c'est pourquoi celles-ci sont les seules dont on ait à s'occuper.

Lorsque les termes d'une fonction symétrique ont des coefficients autres que l'unité, il faut que leurs coefficients soient égaux; on a ainsi, par exemple, $S(\frac{2}{3}a^2b^3) = \frac{2}{3}S(a^2b^3)$.

505. *Les sommes des puissances semblables et entières des racines d'une équation, peuvent être exprimées rationnellement au moyen des coefficients.*

Soient $a, b, c, \ldots, k$ les m racines de l'équation

$$(1)\quad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0.$$

Le quotient de la division du premier membre de cette équation par $x - a$ est (n° 380)

$$\begin{array}{l|l|l}
x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} \ldots + a^{m-1} \\
\quad\quad + A_1 & \quad\quad + A_1a & \quad\quad + A_1a^{m-2} \\
 & \quad\quad + A_2 & \quad\quad + A_2a^{m-3} \\
 & & \quad\quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & \quad\quad + A_{m-1}.
\end{array}$$

En remplaçant successivement a par b, par c, etc., on a les quotients de la division du même polynôme par les facteurs $x - b$, $x - c$, etc.; et si l'on fait la somme de ces m quotients, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{array}{l|l|l}
mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} \ldots + S_{m-1} \\
\quad\quad + mA_1 & \quad\quad + A_1S_1 & \quad\quad + A_1S_{m-2} \\
 & \quad\quad + mA_2 & \quad\quad + A_2S_{m-3} \\
 & & \quad\quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & \quad\quad + mA_{m-1}.
\end{array}$$

Cette somme doit être égale au polynôme dérivé du premier

membre de l'équation proposée (n° 413),

$$mx^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + (m-2)A_2 x^{m-3} \ldots + A_{m-1}.$$

Il suit de là que les coefficients des mêmes puissances de x dans ces deux expressions sont égaux, ce qui fournit les $m-1$ équations

$$(2)\quad \begin{cases} S_1 + A_1 = 0, \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0, \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} + A_1 S_{m-2} + A_2 S_{m-3} \ldots + (m-1)A_{m-1} = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir les sommes S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc., on multiplie l'équation proposée par x^n; il vient

$$x^{m+n} + A_1 x^{m+n-1} + A_2 x^{m+n-2} \ldots + A_{m-1} x^{n+1} + A_m x^n = 0;$$

remplaçant successivement x par chacune des racines a, b, c, etc., et ajoutant tous les résultats, on a

$$(3)\quad S_{m+n} + A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} \ldots + A_{m-1} S_{n+1} + A_m S_n = 0.$$

Si l'on fait successivement, dans cette dernière relation, $n = 0, 1, 2$, etc., en remarquant que $S_0 = a^0 + b^0 + \ldots = m$, on obtient

$$(4)\quad \begin{cases} S_m + A_1 S_{m-1} + A_2 S_{m-2} \ldots + A_{m-1} S_1 + mA_m = 0, \\ S_{m+1} + A_1 S_m + A_2 S_{m-1} \ldots + A_{m-1} S_2 + A_m S_1 = 0, \\ S_{m+2} + A_1 S_{m+1} + A_2 S_m \ldots\ldots + A_{m-1} S_3 + A_m S_2 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

En résolvant par ordre les équations (2) et (4), on trouvera successivement S_1, S_2, S_3, etc., et chacune de ces sommes sera déterminée au moyen des coefficients de l'équation et des sommes précédentes, par une équation du premier degré. On voit que S_2 dépend seulement des deux premiers coefficients A_1 et A_2, que S_3 dépend seulement des trois premiers coefficients A_1, A_2, A_3, etc., et que la somme

des puissances $m^{\text{ièmes}}$ et les sommes des puissances supérieures dépendent de tous les coefficients.

Exemple. — Calculer les sommes des puissances semblables et entières des racines de l'équation

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0.$$

On trouve

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 39, \quad S_3 = -89, \quad S_4 = 723,$$
$$S_5 = -2849, \quad S_6 = 16419, \quad \text{etc.}$$

Il est facile de vérifier ces résultats, en calculant les puissances des racines de l'équation proposée, qui sont 1, 2, 3, —5.

Pour évaluer les sommes des puissances négatives des racines, on pourrait donner à n des valeurs négatives dans l'équation (3); mais il est plus simple de remplacer dans l'équation proposée x par $\frac{1}{y}$. On a ainsi une transformée dont les racines sont a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, etc. Donc les sommes des puissances semblables positives des racines de cette transformée sont les sommes des puissances semblables négatives, S_{-1}, S_{-2}, etc., des racines de la proposée.

En appliquant cette méthode à l'équation numérique ci-dessus, on trouvera

$$S_{-1} = \frac{49}{30}, \quad S_{-2} = \frac{1261}{900}, \quad S_{-3} = \frac{31159}{27000}, \ldots$$

506. Au moyen des formules (2) et (4), lorsque l'on connaît les sommes S_1, S_2, S_3, etc., jusqu'à S_m, on peut trouver les coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_m$.

507. *Toute fonction algébrique, rationnelle et symétrique des racines d'une équation, peut être exprimée rationnellement par les coefficients de cette équation.*

Considérons la fonction $S(a^n b^p)$. Si l'on multiplie l'une

par l'autre les deux quantités

$$S_n = a^n + b^n + c^n + d^n + \ldots,$$
$$S_p = a^p + b^p + c^p + d^p + \ldots,$$

le produit contiendra deux sortes de termes; les uns seront de la forme a^{n+p}, et leur somme sera S_{n+p}; les autres seront de la forme $a^n b^p$, et leur somme sera la fonction $S(a^n b^p)$. Donc

$$S_n \times S_p = S_{n+p} + S(a^n b^p),$$

d'où

$$S(a^n b^p) = S_n \times S_p - S_{n+p}. \tag{5}$$

Pour évaluer la fonction $S(a^n b^p c^q)$, concevons que l'on multiplie l'une par l'autre les deux quantités

$$S(a^n b^p) = a^n b^p + a^n c^p + a^n d^p + b^n a^p \ldots,$$
$$S_p = a^q + b^q + c^q + d^q \ldots.$$

Il y aura dans le produit trois sortes de termes : 1° des termes formés de deux lettres avec les exposants $n+q$ et p, et dont la somme sera $S(a^{n+q} b^p)$; 2° des termes formés de deux lettres avec les exposants $p+q$ et n, et dont la somme sera $S(a^{p+q} b^n)$; 3° enfin, des termes formés de trois lettres différentes, dont la somme sera $S(a^n b^p c^q)$. Donc

$$S(a^n b^p) \times S_q = S(a^{n+q} b^p) + S(a^{p+q} b^n) + S(a^n b^p c^q);$$

et, en remplaçant $S(a^n b^p)$, $S(a^{n+q} b^p)$, $S(a^{p+q} b^n)$ par leurs valeurs déduites de la formule (5),

$$S(a^n b^p c^q) = S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2 S_{n+p+q}. \tag{6}$$

On évaluera de la même manière les fonctions symétriques dont les termes contiendront un plus grand nombre de lettres.

Lorsque quelques-uns des exposants deviennent égaux, les formules doivent être modifiées.

Soit $n = p$ dans la fonction $S(a^n b^p)$. Cette fonction est

composée d'autant de termes que l'on peut faire d'arrangements deux à deux avec les m racines, et ces termes sont tous différents, quand les deux exposants sont différents; mais s'ils deviennent égaux, les termes sont rendus égaux deux à deux, de sorte que $S(a^n b^p)$ est alors égale à $2S(a^n b^n)$, et on a, d'après la formule (5),

$$(7) \qquad S(a^n b^n) = \tfrac{1}{2}(S_n^2 - S_{2n}).$$

Pareillement, si $n = p$ dans la fonction $S(a^n b^p c^q)$, cette fonction deviendra $2S(a^n b^n c^q)$, et on conclura, par conséquent, de la formule (6),

$$(8) \qquad S(a^n b^n c^q) = \tfrac{1}{2}(S_n^2 S_q - S_{2n} S_q - 2 S_{n+q} S_n + 2 S_{2n+q}).$$

Si $n = p = q$, la fonction $S(a^n b^p c^q)$ sera $6S(a^n b^n c^n)$, et de là on conclut

$$(9) \qquad S(a^n b^n c^n) = \tfrac{1}{6}(S_n^3 - 3 S_{2n} S_n + 2 S_{3n}).$$

En général, lorsque α exposants deviennent égaux entre eux, la valeur de la fonction est égale à celle de la fonction générale du même ordre, divisée par le produit $2.3.4\ldots\alpha$.

Calcul de l'équation aux carrés des différences, au moyen des fonctions symétriques.

508. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Si l'on fait $\frac{m(m-1)}{2} = n$, l'équation aux carrés des différences pourra être représentée par

$$z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \ldots + B_n = 0 \text{ (n° 467)},$$

et il s'agira de déterminer les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Désignons par S_1, S_2, S_3, etc., les sommes des puissances semblables des m racines a, b, c, etc., de l'équation pro-

posée, et par s_1, s_2, s_3, etc., les sommes des puissances semblables des n racines $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$, etc., de l'équation aux carrés des différences. La question sera résolue si l'on parvient à obtenir s_1, s_2, s_3, etc., au moyen de S_1, S_2, S_3, etc.; car les sommes S_1, S_2, S_3, etc., pouvant être exprimées par les coefficients connus A_1, A_2, A_3, etc. (n° 505), on connaîtra ainsi les sommes s_1, s_2, s_3, etc., et, au moyen de ces sommes, on pourra évaluer les coefficients inconnus B_1, B_2, B_3, etc. (n° 506).

En développant les puissances $(x-a)^{2p}$, $(x-b)^{2p}$, etc., on a l'égalité

$$(x-a)^{2p}+(x-b)^{2p}+(x-c)^{2p}+\ldots=$$
$$mx^{2p}-2pS_1x^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2x^{2p-2}-\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}S_3x^{2p-3}+\ldots.$$

Si l'on suppose successivement dans cette égalité $x=a$, b, c, etc., et que l'on ajoute tous les résultats, en désignant, d'après la notation adoptée, $(a-b)^{2p}+(a-c)^{2p}+$ etc. par s_p, on obtient

$$2s_p=mS_{2p}-2pS_1S_{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2S_{2p-2}-\ldots.$$

Cette formule peut être simplifiée; car, dans le second membre, les termes également éloignés du terme du milieu sont égaux et de même signe; par conséquent, si l'on réunit les termes égaux, en désignant par K le terme du milieu, qui est $\pm\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p}S_p^2$, et en divisant les deux membres par 2, on a

$$(1)\quad s_p=mS_{2p}-2pS_1S_{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2S_{2p-2}+\ldots+\tfrac{1}{2}K;$$

la quantité K est positive ou négative, selon que p est un nombre pair ou un nombre impair.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

L'équation aux carrés des différences sera

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0.$$

On trouve, par les formules (2) et (4) du n° 505,

$$(2)\qquad \begin{cases} B_1 = -s_1, \\ B_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), \\ B_3 = \frac{1}{6}(3 s_1 s_2 - 2 s_3 - s_1^3). \end{cases}$$

Pour obtenir s_1, s_2, s_3, en fonction des sommes S_1, S_2, S_3, etc., on applique la formule (1) ci-dessus, qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} s_1 = 3 S_2 - S_1^2, \\ s_2 = 3 S_4 - 4 S_1 S_3 + 3 S_2^2, \\ s_3 = 3 S_6 - 6 S_1 S_5 + 15 S_2 S_4 - 10 S_3^2. \end{cases}$$

Il faut maintenant évaluer $S_1, S_2, \ldots, S_6$, au moyen des coefficients p et q de l'équation donnée. Pour cela, on fait, dans les équations (2) et (4) du n° 505,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = p, \quad A_3 = q, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 0, \ldots;$$

il en résulte

$$S_1 = 0, \quad S_2 = -2p, \quad S_3 = -3q,$$
$$S_4 = 2p^2, \quad S_5 = 5pq, \quad S_6 = 3q^2 - 2p^3.$$

Ces valeurs de S_1, S_2, S_3, etc., substituées dans les relations (3), conduisent à

$$s_1 = -6p, \quad s_2 = 18p^2, \quad s_3 = -66p^3 - 81q^2,$$

et la substitution des valeurs de s_1, s_2, s_3, dans les relations (2), donne enfin

$$B_1 = 6p, \quad B_2 = 9p^2, \quad B_3 = 4p^3 + 27q^2.$$

Par conséquent, l'équation aux carrés des différences est

$$z^3 + 6p^2z + 9p^2z + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

On peut simplifier, dans tous les cas, le calcul de l'équation aux carrés des différences, en faisant évanouir le second terme de l'équation proposée; car on diminue ainsi toutes les racines d'une même quantité, ce qui ne change pas leurs différences.

De l'élimination et du degré de l'équation finale.

509. Les propriétés des fonctions symétriques peuvent servir à effectuer l'élimination d'une inconnue entre deux équations.

Soient les deux équations à deux inconnues

$$(1)\quad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

$$(2)\quad x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}x + B_n = 0.$$

La première est du degré m, la seconde du degré n; m n'est pas inférieur à n, et les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., B_1, B_2, B_3, etc., sont des fonctions de y (n° 456).

Supposons qu'on ait résolu l'équation (1) par rapport à x, et soient a, b, c, etc., les m racines qui seront des fonctions de y. Si l'on fait successivement, dans l'équation (2), $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc., on obtiendra m équations qui ne contiendront que l'inconnue y, et qui seront

$$(3)\quad \begin{cases} a^n + B_1a^{n-1} + B_2a^{n-2} + \ldots + B_{n-1}a + B_n = 0, \\ b^n + B_1b^{n-1} + B_2b^{n-2} + \ldots + B_{n-1}b + B_n = 0, \\ c^n + B_1c^{n-1} + B_2c^{n-2} + \ldots + B_{n-1}c + B_n = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Toutes les valeurs de y qui satisfont à l'une des équations (3), conviennent aux équations (1) et (2). En effet, soit β une racine de la première équation

$$a^n + B_1a^{n-1} + \ldots = 0,$$

et soit α la valeur de x qui résulte de la substitution de β à la place de y dans a. Les valeurs $y = \beta$, $x = \alpha$ satisferont à l'équation (2); elles satisferont aussi à l'équation (1), puisque celle-ci est vérifiée par $x = a$, quelle que soit y. Il est facile de voir que, réciproquement, si $y = \beta$ et $x = \alpha$ est une solution du système des équations (1) et (2), la valeur $y = \beta$ devra vérifier l'une des équations (3).

Il suit de là qu'en faisant le produit de toutes les équations (3), on aura l'*équation finale* en y. Or, les facteurs de ce produit restant les mêmes quand on échange entre elles, d'une manière quelconque, les racines a, b, c, etc., le produit sera une fonction symétrique de ces racines; par conséquent il pourra être exprimé rationnellement par les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., de l'équation (1).

Prenons pour exemple deux équations que nous avons déjà traitées par le procédé du plus grand commun diviseur (*exemple* IV, page 512),

$$(y-2)x^2 - 2x + 5y - 2 = 0,$$
$$yx^2 - 5x + 4y = 0.$$

Soient a et b les valeurs de x déterminées par la seconde équation: en les substituant dans la première équation, on a

$$(y-2)a^2 - 2a + 5y - 2 = 0,$$
$$(y-2)b^2 - 2b + 5y - 2 = 0;$$

et en faisant le produit de ces deux équations, on obtient

$$(y-2)a^2b^2 - 2(y-2)S.a^2b + (y-2)(5y-2)S_2 - 2(5y-2)S_1$$
$$+ 4ab + (5y-2)^2 = 0.$$

Il faut évaluer les quantités ab, a^2b^2, S_1, S_2 et $S(a^2b)$. Or, a et b étant les deux racines de l'équation

$$yx^2 - 5x + 4y = 0,$$

on sait que

$$a+b=\frac{5}{y}, \quad \text{et} \quad ab=4, \quad \text{d'où} \quad a^2b^2=16.$$

On peut obtenir les valeurs des deux autres quantités sans recourir aux formules générales; car

$$S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab, \quad S(a^2b)=a^2b+ab^2=ab(a+b);$$

par suite,

$$S_2=\frac{25-8y^2}{y^2}, \quad S(a^2b)=\frac{20}{y}.$$

Ces diverses valeurs donnent, après toute réduction, l'équation finale

$$y^4+12y^3+87y^2-200y+100=0.$$

510. *Le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues, ne peut pas être supérieur au produit des degrés des deux équations.*

Le produit des premiers membres des m équations du système (3) (page 562), est une somme de termes tels que

$$B_h a^{n-h} \times B_k b^{n-k} \times B_l b^{n-l} \times \ldots, \text{ ou } (B_h B_k B_l \ldots)(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots);$$

et comme ce produit est une fonction symétrique des racines a, b, c, etc., le coefficient $B_h B_k B_l \ldots$ multiplie une somme qui se compose de tous les termes de la fonction symétrique $S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$; il suffit donc de démontrer que le plus fort exposant de y dans le produit

$$(B_h B_k B_l \ldots) \times S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$$

ne surpasse pas mn. Or l'exposant de y est au plus égal à h dans B_h, à k dans B_k, etc. (n° 456); par conséquent, la somme des exposants de y dans le produit $B_h B_k B_l \ldots$ n'est pas supérieure à $h+k+l\ldots$. D'un autre côté, en se

reportant aux équations (2) et (4) qui donnent S_1, S_2, etc. (n° 505), on voit que S_1 ne peut être que du premier degré en y, S_2 du deuxième degré, et en général, S_p du degré p. Donc le produit $S_{n-h} \times S_{n-k} \times S_{n-l} \ldots$ est au plus d'un degré marqué par $n - h + n - k + n - l +$ etc. ou $mn - (h + k + l +$ etc.); et, par suite, d'après les formules qui donnent les valeurs des fonctions doubles, triples, etc. (n° 507), la fonction symétrique

$$S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$$

est aussi, au plus, du même degré $mn - (h + k + l \ldots)$. Donc le plus fort exposant de y dans

$$(B_h B_k B_l \ldots) \times S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$$

n'est pas supérieur à

$$mn - (h + k + l \ldots) + (h + k + l \ldots) \quad \text{ou} \quad m \times n.$$

Cette démonstration a été étendue par Poisson, au cas où l'on élimine $m - 1$ inconnues entre m équations à m inconnues. (*Journal de l'École Polytechnique*, 9e cahier.)

Décomposition des fractions rationnelles.

511. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction dont les deux termes sont des fonctions entières de x. Supposons que les deux termes n'aient pas de facteurs communs, puisque, s'ils en avaient, on pourrait les supprimer; supposons aussi le degré du numérateur moindre que celui du dénominateur, attendu que, s'il était plus grand, on obtiendrait, en effectuant la division, une partie entière, avec une fraction dont le numérateur serait d'un degré moins élevé que le dénominateur. Soit, en outre,

$$F(x) = (x - a)^n F_1(x),$$

a étant une des racines de l'équation $F(x) = 0$, et $F_1(x)$ un polynôme entier qui ne contient plus le facteur $x - a$. Nous allons prouver qu'on pourra décomposer la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux autres, de cette manière :

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1} F_1(x)},$$

A étant une constante et $f_1(x)$ un polynôme entier.

En effet, on a identiquement, et quel que soit A,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^n F_1(x)}.$$

Pour que le facteur $x - a$ ne soit qu'à la puissance $n - 1$ dans le dénominateur de la dernière fraction, il suffit que le numérateur $f(x) - AF_1(x)$ soit divisible par $x - a$; or cette condition sera remplie si l'on a

$$f(a) - AF_1(a) = 0, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{f(a)}{F_1(a)}.$$

On obtient ainsi pour A une valeur finie, déterminée et différente de zéro, puisque, les polynômes $f(x)$ et $F_1(x)$ n'étant pas divisibles par $x - a$, les quantités $f(a)$ et $F_1(a)$ sont toutes deux différentes de zéro.

On voit de plus que, si le dénominateur $F(x)$ est du degré m, auquel cas le numérateur $f(x)$ sera au plus du degré $m - 1$, la fonction $f_1(x)$ sera au plus du degré $m - 2$, puisqu'elle est le quotient de $f(x) - AF_1(x)$ par $x - a$, et que $F_1(x)$ est tout au plus du degré $m - 1$.

Enfin les fonctions $f_1(x)$ et $F_1(x)$ n'auront aucun facteur commun; car, si elles en avaient un, le second membre de l'égalité (1) se réduirait à une fraction dont le dénominateur serait d'un degré moindre que celui de $F(x)$.

On aura, par une décomposition semblable,

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}F_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{n-2}F_1(x)};$$

$f_2(x)$ sera au plus du degré $m-3$, et n'aura aucun facteur commun avec $F_1(x)$. Il faut remarquer seulement que A_1 pourra être zéro, attendu que $f_1(x)$ pourra être divisible par $x-a$.

En continuant ainsi, on obtiendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

La fonction $\varphi(x)$ sera d'un degré inférieur à celui de $F_1(x)$, et n'aura avec $F_1(x)$ aucun facteur commun.

Si l'on a $F_1(x) = (x-b)^p F_2(x)$, b étant une seconde racine de l'équation $F(x) = 0$, il en résultera

$$\frac{\varphi(x)}{F_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{\varphi_1(x)}{F_2(x)}.$$

En poursuivant ces opérations, on parviendra à un développement qui ne comprendra que des fractions dont les numérateurs seront constants, et dont les dénominateurs seront les diverses puissances des facteurs correspondants aux racines de l'équation $F(x) = 0$.

512. Les explications par lesquelles nous avons établi cette proposition montrent en même temps comment on obtiendra les numérateurs A, A_1, etc. On aura d'abord

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}, \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{f(x) - AF_1(x)}{x-a}.$$

On aura ensuite

$$A_1 = \frac{f_1(a)}{F_1(a)}, \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f_1(x) - A_1F_1(x)}{x-a},$$

ainsi de suite.

Les coefficients B, B_1, etc., correspondants à la racine b, s'obtiendront de la même manière, au moyen des fonctions $\varphi(x)$ et $F_2(x)$.

Mais ce procédé serait peu commode, et il est avantageux de lui en substituer d'autres.

513. On peut employer la méthode des coefficients indéterminés dont on verra ci-après d'autres exemples. En supposant la décomposition effectuée, on aura une égalité dans laquelle on fera disparaître les dénominateurs; et comme cette égalité devra subsister quelle que soit la valeur de x, on devra égaler les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Il est facile de reconnaître qu'on obtiendra ainsi autant d'équations qu'il y aura de numérateurs à déterminer. Toutes ces équations seront d'ailleurs du premier degré.

Soit la fraction

$$\frac{x^3-2}{(x-1)^2(x+1)(x+2)}.$$

On posera

$$\frac{x^3-2}{(x-1)^2(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

En chassant les dénominateurs, et en égalant ensuite les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on obtient ces quatre équations

$$\begin{aligned} A_1 + B + C &= 1, \\ A + 2A_1 - C &= 0, \\ 3A - A_1 - 3B - C &= 0, \\ 2A - 2A_1 + 2B + C &= -2. \end{aligned}$$

On en conclut

$$A=-\tfrac{1}{6},\quad A_1=\tfrac{23}{36},\quad B=-\tfrac{3}{4},\quad C=\tfrac{10}{9}.$$

514. Si a est une racine simple de l'équation $F(x)=0$,

on pourra trouver immédiatement le numérateur de la fraction correspondante au facteur $x-a$, sans avoir à calculer le quotient de $F(x)$ par $x-a$. En effet, on a vu qu'en représentant ce quotient par $F_1(x)$, on a $A=\frac{f(a)}{F_1(a)}$; mais, d'un autre côté, la fonction dérivée $F'(x)$ étant la somme des quotients qu'on obtiendrait en divisant $F(x)$ par chacun de ses facteurs du premier degré (n° 413), et tous ces quotients, à l'exception de $F_1(x)$, renfermant le facteur $x-a$, et devenant par conséquent nuls quand on y fait $x=a$, on a $F_1(a)=F'(a)$; donc $A=\frac{f(a)}{F'(a)}$.

Considérons maintenant une racine multiple. Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)},$$

$F_1(x)$ étant le quotient de $F(x)$ par $(x-a)^n$, et ne contenant plus le facteur $x-a$.

On conclut de cette égalité, en chassant les dénominateurs, et mettant $\frac{F(x)}{(x-a)^n}$ au lieu de $F_1(x)$,

$$f(x)-A\frac{F(x)}{(x-a)^n}-A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}}\cdots-A_{n-1}\frac{F(x)}{x-a}=(x-a)^n\varphi(x).$$

On a, en changeant x en $a+x-a$,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots,$$

et puisque $F(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées sont nulles pour $x=a$,

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n+\frac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1}+\ldots.$$

En mettant ces développements à la place de $f(x)$ et de

$F(x)$, dans l'égalité précédente, il vient

$$\left.\begin{array}{l} f(a) - A\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} \\ + \left\{ f'(a) - A\dfrac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)} - A_1\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} \right\}(x-a) \\ + \text{ etc.} \\ + \left\{ \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)} - A\dfrac{F^{2n-1}(a)}{1.2\ldots(2n-1)} \cdots - A_{n-1}\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} \right\}(x-a)^{n-1} \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\} = (x-a)^n \varphi(x).$$

Il suit de cette égalité que le premier membre doit être divisible par $(x-a)^n$; et comme tous les termes qui suivent le dernier de ceux qui sont écrits sont divisibles par $(x-a)^n$, il faut que les coefficients de toutes les puissances de $x-a$, jusqu'à celui de $(x-a)^{n-1}$ inclusivement, soient nuls, cette condition fournit n équations, par lesquelles on déterminera les n coefficients A, $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

En prenant pour exemple la fraction $\dfrac{x^3-2x}{(x-1)^3(x+2)}$, on obtient le développement suivant :

$$-\frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{4}{9(x-1)^2} + \frac{23}{27(x-1)} + \frac{4}{27(x+2)}.$$

515. On peut effectuer la décomposition relative aux racines multiples par une méthode qui n'exige que l'emploi de la division algébrique.

En supposant, comme précédemment,

$$F(x) = (x-a)^n F_1(x),$$

on fera $x = a + z$ dans la fraction $\dfrac{f(x)}{F(x)}$; elle deviendra $\dfrac{f(a+z)}{z^n F_1(a+z)}$. Or, si l'on effectue la division de $f(a+z)$ par $F_1(a+z)$, en ordonnant ces polynômes suivant les puissances croissantes de z, et en arrêtant le quotient au terme du degré $n-1$, le reste sera un polynôme dont tous les

termes seront divisibles par z^n; soit $z^n R$ ce reste, R sera un polynôme entier, et on aura

$$\frac{f(a+z)}{F_1(a+z)} = A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{n-1} z^{n-1} + \frac{z^n R}{F_1(a+z)}.$$

D'où l'on conclura, en divisant par z^n et remplaçant z par $x-a$,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

Pour trouver les fractions simples correspondantes à une autre racine multiple b, on appliquera la même méthode à la fraction $\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}$. On obtiendra ainsi une troisième fraction sur laquelle on continuera l'opération.

516. Tout ce que nous venons de dire s'applique aux racines imaginaires aussi bien qu'aux racines réelles; mais, pour les racines imaginaires, il est préférable de modifier la forme du développement, de manière à n'obtenir que des fractions exprimées par des quantités réelles.

Considérons deux racines conjuguées, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et supposons d'abord que le facteur correspondant à ces racines n'entre qu'une fois dans le polynôme $F(x)$. Les numérateurs des fractions simples données par ces racines, seront

$$\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}, \quad \frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}.$$

La première quantité étant $A + B\sqrt{-1}$, la seconde est $A - B\sqrt{-1}$, et la somme des deux fractions est

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \quad \text{ou} \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

en réduisant au même dénominateur et en faisant

$$2A = M \quad \text{et} \quad -2(A\alpha + B\beta) = N.$$

Supposons actuellement que le facteur du second degré correspondant aux deux racines $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, entre plusieurs fois dans $F(x)$. Représentons ce facteur par $x^2 + px + q$, et soit $F(x) = (x^2 + px + q)^n F_1(x)$.

On posera, dans ce cas,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_{n-1} x + N_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

On conclut de cette égalité

$$(a)\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} Mx + N + (M_1 x + N_1)(x^2 + px + q) + \ldots \\ + (M_{n-1} x + N_{n-1})(x^2 + px + q)^{n-1} \end{array} \right\} F_1(x)$$
$$+ (x^2 + px + q)^n \varphi(x).$$

Celle-ci montre que $f(x) - (Mx + N) F_1(x)$ doit être divisible par $x^2 + px + q$, par conséquent, il faut que, si l'on fait $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ dans $f(x) - (Mx + N) F_1(x)$, le résultat soit zéro. On obtiendra ainsi une équation qui se partagera en deux autres, au moyen desquelles on déterminera M et N.

Soit

$$\frac{f(x) - (Mx + N) F_1(x)}{x^2 + px + q} = f_1(x);$$

la quantité $f_1(x) - (M_1 x + N_1) F_1(x)$ devra aussi être divisible par $x^2 + px + q$; et par conséquent, si l'on y remplace x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, le résultat devra être zéro, ce qui déterminera M_1 et N_1.

De même, en posant

$$\frac{f_1(x) - (M_1 x + N_1) F_1(x)}{x^2 + px + q} = f_2(x),$$

il faudra que $f_2(x) - (M_2 x + N_2) F_1(x)$ soit divisible par $x^2 + px + q$, et devienne par conséquent zéro quand on fera $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, ce qui déterminera M_2 et N_2. Ainsi de suite.

Comme $F_1(x)$ ne peut pas devenir zéro pour $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on aura pour tous les coefficients M, N, M_1, N_1, etc., des valeurs finies, ce qui démontre la possibilité de la décomposition qu'on avait établie d'une manière hypothétique.

Soit la fraction

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 1}{(x^2+1)^2(x^2 - 3x + 2)}.$$

On a

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 1, \quad F_1(x) = x^2 - 3x + 2,$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 1, \quad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

D'après ces valeurs, on trouve d'abord

$$M\sqrt{-1} + N = \frac{3 + 5\sqrt{-1}}{1 - 3\sqrt{-1}}; \quad \text{d'où} \quad M = \frac{7}{5}, \quad N = -\frac{6}{5}.$$

On a ensuite

$$f_1(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 + 1 - \frac{1}{5}(7x - 6)(x^2 - 3x + 2)}{x^2 + 1}$$

$$= \tfrac{1}{5}(10x^2 - 32x + 17);$$

$$M_1\sqrt{-1} + N_1 = \frac{7 - 32\sqrt{-1}}{5(1 - 3\sqrt{-1})}, \quad \text{d'où} \quad M_1 = -\frac{11}{50}, \quad N_1 = \frac{103}{50},$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{1}{5}(10x^2 - 32x + 17) - \frac{1}{50}(-11x + 103)(x^2 - 3x + 2)}{x^2 + 1}$$

$$= \tfrac{1}{50}(11x - 36);$$

$$M_2\sqrt{-1} + N_2 = \frac{-36 + 11\sqrt{-1}}{50(1 - 3\sqrt{-1})},$$

d'où

$$M_2 = -\frac{97}{500}, \quad N_2 = -\frac{69}{500}.$$

On a ainsi, pour les trois fractions partielles correspondantes au facteur $(x^2+1)^3$,

$$\frac{7x-6}{5(x^2+1)^3},\quad \frac{-11x+103}{50(x^2+1)^2},\quad \frac{-97x-69}{500(x^2+1)}.$$

En joignant à ces fractions celles que donnent les facteurs simples du trinôme x^2-3x+2, et qu'on obtient comme nous l'avons expliqué dans le n° 514, on a le développement suivant :

$$\frac{1}{4(x-1)}-\frac{7}{125(x-2)}-\frac{97x+69}{500(x^2+1)}$$
$$+\frac{-11x+103}{50(x^2+1)^2}+\frac{7x-6}{5(x^2+1)^3}.$$

517. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, pour calculer les coefficients M, N, M_1, N_1, etc., on pourrait employer la méthode des coefficients indéterminés. On peut aussi remarquer que, d'après l'égalité (a), en faisant passer tous les termes dans le premier membre, à l'exception du seul terme $(x^2+px+q)^n\varphi(x)$, le premier membre devra être divisible par $(x^2+px+q)^n$, ce qui exigera qu'il devienne nul, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$; de sorte qu'en mettant cette valeur de x dans ce polynôme et dans ses $n-1$ premières dérivées, et en égalant les résultats à zéro, on aura n équations qui se partageront chacune en deux autres, au moyen desquelles on déterminera les $2n$ coefficients M, N, M_1, N_1, etc.

518. Une fraction donnée $\frac{f(x)}{F(x)}$ ne peut être décomposée que d'une seule manière en fractions partielles, telles que celles que nous venons de considérer.

En effet, 1° les dénominateurs des fractions partielles ne peuvent être que des facteurs de $F(x)$. Car, soit X un fac-

teur du premier degré, ou un facteur du second degré de la forme $(x-\alpha)^2+\beta^2$, qui ne soit pas l'un de ceux de $F(x)$; si l'on suppose que l'une des fractions partielles ait pour dénominateur X^n, après la réduction de toutes ces fractions au même dénominateur, X divisera tous les numérateurs, à l'exception d'un seul; donc il ne divisera pas leur somme, donc la somme de ces fractions ne pourra pas être égale à $\frac{f(x)}{F(x)}$.

2°. Si X est un des facteurs de $F(x)$, et s'il entre dans $F(x)$ à la puissance n, et n'y entre pas à une puissance plus élevée, on verra, par le même raisonnement, qu'on ne pourra obtenir aucune fraction ayant pour dénominateur X^{n+1}, ou une puissance plus élevée de X. On en aura nécessairement une dont le dénominateur sera X^n; autrement, en réduisant toutes les fractions au même dénominateur, et les ajoutant, on obtiendrait une fraction dont le dénominateur ne contiendrait le facteur X qu'à une puissance inférieure à la $n^{ième}$.

3°. Enfin, la fraction donnée ne pourra pas être égale en même temps à plusieurs sommes de fractions ayant les mêmes dénominateurs, et des numérateurs différents; car, d'après ce qu'on a vu dans les n°s 514 et 516, en supposant la décomposition effectuée, on ne peut obtenir, pour le numérateur de chacune des fractions simples, qu'une seule valeur (*).

(*) La dernière partie des explications du n° 518 ne s'appliquerait plus, si l'on n'avait employé que la méthode du n° 515, pour établir la possibilité du développement et pour calculer les valeurs des constantes. Mais, dans ce cas, on ferait la démonstration comme il suit :

Supposons qu'il existe deux développements différents, et représentons-les par

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\ldots+\frac{B}{(x-b)^p}+\ldots,\quad \frac{A'}{(x-a)^{n'}}+\ldots+\frac{B'}{(x-b)^{p'}}+\ldots$$

n et n' étant les plus forts exposants de $x-a$ dans les deux développements.

Si l'on n'a pas $n = n'$, soit $n > n'$; on conclura de l'égalité des deux développements, en mettant la fraction $\frac{A}{(x-a)^n}$ seule dans un membre, et en multipliant par $(x-a)^n$, que la constante A serait égale à une quantité qui deviendrait nulle pour $x = a$; il faudrait donc que l'on eût $A = 0$. Il suit de là que les plus forts exposants de $x - a$, de part et d'autre, sont égaux. Cela posé, si l'on n'a pas $A = A'$, en retranchant de chacun des deux développements la quantité $\frac{A'}{(x-a)^n}$, les restes devront être égaux, ce qui sera contraire à la conclusion ci-dessus, puisque l'un d'eux contiendra encore en dénominateur $(x-a)^n$, et dans l'autre il n'y aura pour dénominateur que des puissances moindres de $x - a$.

Les deux fractions correspondantes aux plus hautes puissances de $x - a$ devant être les mêmes de part et d'autre, on pourra les supprimer, et en raisonnant de la même manière, on prouvera que les fractions qui auront pour dénominateurs les plus hautes puissances du même binôme $x - a$, ou d'un autre binôme, dans l'un et l'autre reste, devront être identiques. En continuant ainsi, on démontrera que les fractions simples des deux développements sont égales chacune à chacune.

On fera une démonstration semblable pour les fractions correspondantes aux facteurs du second degré de la forme $(x-\alpha)^2 + \beta^2$.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

Développements par la méthode des coefficients indéterminés.

519. Considérons une expression fractionnaire

$$\frac{a + bx + cx^2}{m + nx + px^2 + qx^3}.$$

Si l'on effectue la division du numérateur par le dénominateur, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, il en résultera une suite qui se prolongera indéfiniment, et qu'on peut représenter par

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

les coefficients A, B, C, D, etc., étant des quantités indépendantes de x, qu'il s'agit de déterminer. Ce quotient, multiplié par le diviseur $m + nx + px^2 + qx^3$, devra reproduire le dividende $a + bx + cx^2$; or, en effectuant la multiplication, on obtient le produit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
mA + mB & x + mC & x^2 + mD & x^3 + mE & x^4 + \ldots \\
+ nA & + nB & + nC & + nD & \\
 & + pA & + pB & + pC & \\
 & & + qA & + qB &
\end{array}$$

Pour que ce produit soit identique avec le dividende, il faut que les coefficients des trois premiers termes soient respectivement égaux aux coefficients a, b, c, et que les coefficients de tous les autres termes soient nuls; de sorte

que l'on doit avoir

$$mA = a,$$
$$mB + nA = b,$$
$$mC + nB + pA = c,$$
$$mD + nC + pB + qA = 0,$$
$$mE + nD + pC + qB = 0,$$
etc.

La première équation fait connaître la valeur de A. La deuxième donne la valeur du coefficient B au moyen de celle de A. La troisième fait connaître la valeur du coefficient C au moyen de celles de B et de A. D'après la quatrième équation et les suivantes, qui sont toutes de la même forme, on obtient chaque coefficient du quotient, à partir de celui de la troisième puissance de x, en ajoutant les trois coefficients précédents multipliés respectivement par les rapports $-\frac{n}{m}$, $-\frac{p}{m}$ et $-\frac{q}{m}$.

520. Les suites qui proviennent du développement d'une expression fractionnaire sont toujours formées suivant une loi analogue à celle que nous venons d'observer. Elles sont appelées *séries récurrentes;* et elles donnent lieu à trois questions que nous mentionnerons sans nous y arrêter : 1° *trouver le terme général d'une série récurrente,* c'est-à-dire une expression au moyen de laquelle on puisse obtenir un terme quelconque de la série sans connaître les termes précédents; 2° *trouver la somme d'un certain nombre de termes d'une série récurrente;* 3° *une série étant donnée, reconnaître si elle est récurrente, et, dans ce cas, trouver la fraction génératrice.* (*Voyez,* pour la résolution de ces questions, les *Leçons d'Algèbre* de M. Lefébure de Fourcy, ou les *Éléments d'Algèbre* de M. Bourdon.)

521. Proposons-nous de trouver le développement de $(1 + x)^m$, l'exposant m étant un nombre quelconque, posi-

tif ou négatif. Soit

$$(1) \qquad (1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots;$$

le premier terme du développement doit être 1, puisque l'expression proposée $(1+x)^m$ se réduit à 1 quand on suppose $x=0$.

Comme on a $(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$, on obtiendra le développement de $(a+x)^m$ en remplaçant, dans le second membre de l'équation (1), x par $\frac{x}{a}$, et multipliant tous les termes par a^m; il viendra ainsi

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned}(a+x)^m = a^m &+ Aa^{m-1}x + Ba^{m-2}x^2 \\ &+ Ca^{m-3}x^3 + Da^{m-4}x^4 + \ldots.\end{aligned}\right.$$

En changeant dans la dernière égalité x en $x+u$, on obtient

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}(a+x+u)^m = a^m &+ Aa^{m-1}(x+u) + Ba^{m-2}(x+u)^2 \\ &+ Ca^{m-3}(x+u)^3 + Da^{m-4}(x+u)^4 + \ldots.\end{aligned}\right.$$

On peut aussi obtenir le développement de $(a+x+u)^m$ en remplaçant, dans l'équation (2), a par $a+x$ et x par u; et de cette manière il vient

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned}(a+x+u)^m = (a+x)^m &+ A(a+x)^{m-1}u \\ &+ B(a+x)^{m-2}u^2 + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Puisque les seconds membres des équations (3) et (4) sont les expressions d'une même quantité mise sous deux formes différentes, ils doivent être égaux; et, comme cette égalité devra subsister sans qu'on attribue aucune valeur particulière à u, il faudra qu'il y ait séparément égalité entre les multiplicateurs des mêmes puissances de u.

Pour obtenir les multiplicateurs des diverses puissances de u dans le second membre de l'équation (3), il faut développer les quantités $(x+u)^2$, $(x+u)^3$, etc. Les exposants

étant des nombres entiers, les développements sont connus; mais la méthode que nous exposons comprend la démonstration de la formule qui a été établie dans le chapitre XI, pour le cas où m est un nombre entier.

En formant par la multiplication les développements de $(x+u)^2$, $(x+u)^3$, etc., on conclut, par analogie, que les deux premiers termes du développement de $(x+u)^n$, n étant un nombre entier, sont $x^n + nux^{n-1}$. On peut d'ailleurs prouver, par la multiplication, que, si cette composition des deux premiers termes est vérifiée pour la puissance $n^{ième}$, elle est vraie pour la puissance $(n+1)^{ième}$; d'où il suit qu'elle est générale.

On conclut de là qu'en nommant V la partie indépendante de u dans le second membre de l'équation (3), et V_1 le multiplicateur de la première puissance de u, on a

$$V = a^m + Aa^{m-1}x + Ba^{m-2}x^2 + Ca^{m-3}x^3 + \ldots,$$
$$V_1 = Aa^{m-1} + 2Ba^{m-2}x + 3Ca^{m-3}x^2 + 4Da^{m-4}x^3 + \ldots.$$

La quantité V doit être égale à $(a+x)^m$, ce qui est l'équation (2). La quantité V_1 doit être égale à $A(a+x)^{m-1}$, ce qui fournit l'équation

$$A(a+x)^{m-1} = Aa^{m-1} + 2Ba^{m-2}x + 3Ca^{m-3}x^2 + \ldots.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $a+x$, et en remplaçant $(a+x)^m$ par le second membre de l'équation (2), on obtient celle qui suit :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} Aa^m + A^2a^{m-1}x + ABa^{m-2}x^2 + ACa^{m-3}x^2 + \ldots \\ = Aa^m + 2B\left|a^{m-1}x + 3C\right|a^{m-2}x^2 + 4D\left|a^{m-3}x^3 + \ldots\right. \\ \qquad + A\left|\qquad + 2B\right|\qquad + 3C\left| \end{array}\right.$$

Dans cette dernière équation, comme dans les précédentes, les coefficients A, B, C, D, etc., sont des nombres indépendants de a et de x, et l'équation doit être vérifiée sans que l'on attribue des valeurs particulières à a et à x; il faut donc qu'il y ait séparément égalité entre les coeffi-

cients des mêmes puissances de x ou de a, ce qui fournit les équations ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{l} 2B + A = A^2 \\ 3C + 2B = AB \\ 4D + 3C = AC \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{A(A-1)}{2} \\ C = \dfrac{B(A-2)}{3} \\ D = \dfrac{C(A-3)}{4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Ces équations sont formées suivant une loi facile à reconnaître, et d'après cette loi, si les coefficients de x^{n-1} et de x^n dans le second membre de l'équation (1) sont H et K, on aura

$$nK + (n-1)H = AH, \quad \text{d'où} \quad K = \frac{H(A-n+1)}{n}.$$

On pourrait d'ailleurs parvenir directement à cette dernière relation en écrivant dans l'équation (1) les deux termes $Hx^{n-1} + Kx^n$, et en écrivant aussi dans les équations suivantes les termes qui en résulteraient.

Il ne s'agit plus actuellement que de déterminer le coefficient A.

Suivant ce qui a été dit plus haut, lorsque l'exposant m est un nombre entier, on a $A = m$. Soit $m = \frac{p}{q}$; dans ce cas $(1+x)^m = \sqrt[q]{(1+x)^p}$; or les deux premiers termes du développement de $(1+x)^p$ étant $1 + px$, on trouve, par la règle qui a été donnée pour l'extraction des racines (n° 338), que les deux premiers termes du développement de $\sqrt[q]{(1+x)^p}$, ou $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, sont $1 + \frac{p}{q}x$.

Pour m négatif, soit $m = -p$; on a

$$(1+x)^{-p} = \frac{1}{(1+x)^p};$$

or les deux premiers termes du développement de $(1+x)^p$ étant $1+px$, on reconnaît par la division que les deux premiers termes du développement de $\frac{1}{(1+x)^p}$ sont $1-px$. On a donc, dans tous les cas, $A=m$.

En remplaçant A par m dans les équations ci-dessus, on en conclut

$$B=\frac{m(m-1)}{1.2},\quad C=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$D=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},\ldots;$$

on a généralement pour la relation entre les coefficients de x^n et de x^{n-1},

$$K=\frac{H(m-n+1)}{n};$$

et en reportant dans l'équation (1) les valeurs des coefficients A, B, C, D, etc., on obtient la formule suivante :

$$(6)\quad (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Le terme qui en a n avant lui dans cette formule, ou le terme général, est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n.$$

Quand m est un nombre entier positif, le développement s'arrête au $m+1^{ième}$ terme; car lorsqu'on fait $n=m+1$, ou $n>m+1$, le coefficient du terme général devient nul. Quand m est fractionnaire ou négatif, le développement se prolonge indéfiniment.

522. Lorsqu'on emploie la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir le développement d'une fonction, on admet l'existence de ce développement, en lui attribuant

une forme déterminée qu'il n'est pas toujours possible de justifier à priori; et lorsque l'on a trouvé les valeurs des coefficients en vertu de certaines propriétés de la fonction proposée, il faudrait que l'on fût assuré que ces propriétés appartiennent exclusivement à cette fonction. En outre, quand on veut faire usage du développement pour l'évaluation numérique de la fonction, après avoir donné des valeurs aux lettres, si le développement se prolonge indéfiniment, il faut qu'en se bornant à un nombre limité de termes on puisse obtenir une valeur aussi approchée qu'on le veut de la fonction. Il est donc nécessaire d'avoir recours, pour établir la légitimité de la formule (6), et les autres formules de développements, à un mode de démonstration différent de celui qui vient d'être employé, et plus rigoureux.

Propositions sur les séries.

523. Considérons une série quelconque

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots.$$

u_n sera le terme qui en aura n avant lui, ou le *terme général* de la série; cette quantité u_n étant une fonction de n, telle qu'en attribuant à n les valeurs entières positives 0, 1, 2, 3, etc., on en déduise successivement tous les termes. Représentons en outre par s_n la somme des n premiers termes, de sorte qu'on ait

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1}.$$

Suivant les notions qui ont été établies dans le chapitre VIII (n° 237), si, lorsque n croîtra indéfiniment à partir d'une certaine valeur, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite fixe s, la série sera convergente, et la limite s sera alors la *somme* de la série. Si, au contraire, pour des valeurs de plus en plus grandes de n, la somme s_n ne

s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente et n'aura pas de somme

524. Lorsque la série est convergente, si l'on considère les sommes s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, etc., en attribuant à n une valeur suffisamment grande, ces sommes diffèrent très-peu les unes des autres, puisqu'elles doivent être toutes très-peu différentes de la limite s. Or on a

$$s_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$
$$s_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2};$$
etc.,

par conséquent

$$s_{n+1} - s_n = u_n, \quad s_{n+2} - s_{n+1} = u_{n+1}, \quad s_{n+3} - s_{n+2} = u_{n+2}, \ldots.$$

Donc, pour que la série soit convergente, il faut d'abord qu'on puisse donner à n une valeur assez grande pour que chacun des termes de la série, à partir de u_n, soit moindre qu'une quantité aussi petite que l'on veut.

Comme on a en outre

$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1}, \quad s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots,$$

il faut encore que, pour une valeur suffisamment grande de n, la somme d'un nombre quelconque des termes u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc., à partir de u_n, soit moindre que toute limite.

Réciproquement, lorsque toutes ces conditions sont remplies, la série (1) est convergente; car les sommes s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, etc., pouvant devenir aussi peu différentes les unes des autres qu'on le veut, ces sommes convergent nécessairement vers une limite qui diffère très-peu de s_n.

525. Supposons que les termes de la série (1) n'aient pas

tous le même signe, et désignons les valeurs numériques de ces termes par

$$(2) \qquad U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3, \ldots.$$

Toutes les fois que ces quantités formeront une série convergente, la série (1) sera, à plus forte raison, convergente; car la série (2) étant convergente, il s'ensuivra que les sommes des quantités U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, etc., prises en tel nombre que l'on voudra, à partir de U_n, pourront devenir moindres que toute limite, si l'on donne à n une valeur suffisamment grande. La même condition aura donc lieu, à plus forte raison, pour les sommes que l'on obtiendrait en substituant aux quantités ci-dessus les quantités u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc., qui, par hypothèse, ont respectivement les mêmes valeurs numériques que les précédentes, sans être toutes positives.

526. Lorsque, pour toutes les valeurs de n plus grandes qu'un certain nombre m, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ reste constamment plus petit qu'une quantité r plus petite que l'unité, la série (2) est convergente. Car, dans ce cas, les termes de la série, à partir de U_m, sont tous inférieurs, à l'exception de U_m seulement, aux termes correspondants de la progression géométrique

$$U_m,\ U_m r,\ U_m r^2,\ U_m r^3, \ldots;$$

et comme il est toujours possible d'assigner dans cette progression, dont la raison est plus petite que 1, un terme tel, que les sommes formées avec les termes suivants en tel nombre que l'on veut soient moindres que toute limite, la même chose a lieu, à plus forte raison, pour la série (2). Il suit aussi de là, qu'en prenant la somme des m premiers termes de la série (2) pour une valeur approchée de la somme de la série, l'erreur est moindre que $\frac{U_m}{1-r}$.

Si, pour les valeurs de n qui surpassent un certain nombre m, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constamment plus grand qu'une quantité r plus grande que l'unité, la série est divergente, puisque les termes à partir de U_m vont en augmentant. Dans ce cas, la série (1), dont les termes sont les mêmes, aux signes près, que ceux de la série (2), est aussi divergente.

Lorsque les termes de la série (1) sont alternativement positifs et négatifs, on a vu que la série est toujours convergente, si les termes décroissent de manière à devenir moindres que toute limite (n° 240).

527. Considérons deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une quantité variable x:

$$(3) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

$$(4) \qquad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots.$$

Soient s_n la somme des n premiers termes de la première série, et s'_n la somme des n premiers termes de la seconde série, de sorte qu'on ait

$$s_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

$$s'_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1};$$

et concevons que l'on multiplie entre elles les expressions de s_n et de s'_n. En prenant les termes du produit dans lesquels l'exposant de x sera moindre que n, et désignant la somme de ces termes par s''_n, on aura

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} s''_n = a_0 b_0 &+ [a_1 b_0 + a_0 b_1] x + [a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2] x^2 + \ldots \\ &+ [a_{n-1} b_0 + a_{n-2} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-2} + a_0 b_{n-1}] x^{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Les termes qui composent la somme s''_n pourront être considérés comme les n premiers termes d'une série dont le

terme général aura pour expression

$$(6) \qquad [a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n] x^n.$$

Cela posé, nous allons démontrer que, *si, pour une valeur particulière de* x, *les séries* (3) *et* (4) *étant uniquement composées de termes positifs, sont convergentes et ont respectivement pour sommes* s *et* s′, *la série dont le terme général est l'expression* (6) *est aussi convergente et a pour somme* $s \times s'$; *et la même propriété a lieu si, les termes des séries* (3) *et* (4) *n'étant pas tous positifs, chacune d'elles ne cesse pas d'être convergente quand on change les signes des termes négatifs.*

Supposons d'abord que les termes des séries (3) et (4) soient tous positifs. Dans ce cas on voit immédiatement que l'on a

$$s''_n < s_n s'_n.$$

D'un autre côté, en désignant par m le nombre entier $\frac{1}{2}(n-1)$ ou $\frac{1}{2}(n-2)$, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair, le produit des deux sommes s_{m+1} et s'_{m+1} ne donnera que des termes dans lesquels l'exposant de x sera moindre que n; de sorte que ces termes se trouvent tous compris dans l'expression de s''_n; donc on a

$$s''_n > s_{m+1} s'_{m+1}.$$

Mais si l'on conçoit que le nombre n croisse indéfiniment, le nombre m croîtra aussi indéfiniment, et les sommes s_n et s_{m+1} convergeront l'une et l'autre vers la limite s; en même temps les sommes s'_n et s'_{m+1} convergeront vers la limité s'. Donc la somme s''_n, qui est comprise entre les deux produits $s_n s'_n$ et $s_{m+1} s'_{m+1}$, convergera vers la limite ss'.

Supposons actuellement que les différents termes des séries (3) et (4) conservent les mêmes valeurs numériques, et que ces termes ou quelques-uns d'entre eux changent de signe. Il suit de l'explication qui vient d'être donnée, que

dans le cas où tous les termes sont positifs, si l'on fait croître indéfiniment le nombre n, la différence $s_n s'_n - s''_n$ converge vers zéro. Or, cette différence se compose de tous les termes du produit $s_n s'_n$ dans lesquels l'exposant de x est plus grand que $n-1$; de sorte qu'on a

$$s_n s'_n - s''_n = a_{n-1} b_{n-1} x^{2n-2} + [a_{n-1} b_{n-2} + a_{n-2} b_{n-1}] x^{2n-3} + \ldots$$
$$+ [a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1}] x^n.$$

Donc, si, pour des valeurs croissantes de n, la différence $s_n s'_n - s''_n$ converge vers zéro lorsque tous les termes qui la composent ont le signe $+$, la même chose aura encore lieu si tous les termes, ou quelques-uns d'entre eux, changent de signe, en conservant les mêmes valeurs numériques. Par conséquent, la série dont le terme général est l'expression (6) sera encore convergente et aura pour somme ss'.

Démonstration de la formule du binôme pour un exposant quelconque.

528. Soit la série

$$(1) \quad 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

dont le terme général est

$$(2) \quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n.$$

Lorsque m est un nombre entier positif, cette série se réduit à un polynôme composé d'un nombre fini de termes, et elle a pour somme $(1+x)^m$. Supposons que m soit fractionnaire ou négatif, et cherchons quelles sont les conditions nécessaires pour que la série, qui se compose alors d'un nombre infini de termes, soit convergente.

En désignant par u_n le terme qui en a n avant lui, et

par u_{n+1} le terme suivant, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n}{n+1}x, \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}x.$$

Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre n, la fraction $\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ convergera vers l'unité; donc la valeur numérique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aura pour limite la valeur numérique de x. Par conséquent, la série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1; elle sera divergente toutes les fois que la valeur numérique de x sera plus grande que l'unité (n° 526).

Pour reconnaître quelle est la somme de la série (1), lorsqu'elle est convergente, attribuons à m deux valeurs différentes h et k, la série proposée se changera successivement dans les deux suivantes :

$$(3) \quad 1 + hx + \frac{h(h-1)}{1.2}x^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

$$(4) \quad 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1.2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

Si l'on multiplie entre elles ces deux séries, il en résultera une nouvelle série dont le terme général sera

$$(5) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{h(h-1)\ldots(h-n+1)}{1.2\ldots n} + \frac{h(h-1)\ldots h-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{k}{1} + \ldots \\ + \frac{h}{1}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \end{array}\right] x^n.$$

Cette série sera aussi convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1 (n° 527). De plus, si l'on représente la somme de la série (1) par $\varphi(m)$, celle de la

série (3) sera $\varphi(h)$, celle de la série (4) sera $\varphi(k)$, et la série dont le terme général est l'expression (5) aura pour somme $\varphi(h) \times \varphi(k)$.

Supposons maintenant que h et k deviennent des nombres entiers positifs. Dans ce cas les séries (3) et (4) sont composées d'un nombre fini de termes, et elles ont respectivement pour sommes $(1+x)^h$ et $(1+x)^k$; par conséquent, la série dont le terme général est l'expression (5) est aussi composée d'un nombre limité de termes; et elle a pour somme $(1+x)^{h+k}$; d'où il suit que l'on a pour toutes les valeurs entières et positives de h et k

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-n+1)}{1.2\ldots n} + \frac{k(h-1)\ldots(h-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{k}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{h}{1}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$= \frac{(h+k)(h+k-1)\ldots(h+k-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

Pour que cette dernière égalité soit vérifiée par toutes les valeurs entières positives des nombres h et k, il faut nécessairement que les deux membres soient identiques. En effet, ces deux membres étant des fonctions entières de h et de k, du degré n, si l'on développe les opérations indiquées et qu'on ordonne ensuite chaque membre par rapport à k, on aura une égalité de cette forme :

$$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \ldots = B_0 + B_1 k + B_2 k^2 + \ldots,$$

les coefficients A_0, A_1, A_2, etc., B_0, B_1, B_2, etc., étant des fonctions entières de h, et les deux membres ne contenant que les puissances de k inférieures à la $(n+1)^{ième}$.

Supposons maintenant qu'on ait donné à h une valeur fixe, choisie arbitrairement. L'égalité ci-dessus devant avoir lieu pour toutes les valeurs entières positives de k, il faudra que l'on ait $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, etc.; car, si ces

conditions n'avaient pas lieu, en réunissant tous les termes dans un seul membre, on aurait une équation du degré n, à une seule inconnue k, qui ne pourrait être vérifiée pour plus de n valeurs différentes de k, ce qui est contraire à la supposition. D'ailleurs, cette conclusion devant subsister quelle que soit la valeur de h, pourvu qu'elle soit un nombre entier, on peut appliquer aux égalités $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, etc., un raisonnement semblable; par conséquent, celles-ci doivent être aussi vérifiées pour toutes les valeurs de h.

Il suit de cette démonstration que la série dont le terme général est l'expression (5) est toujours composée avec $h+k$, comme les séries (3) et (4) sont composées respectivement avec h et avec k; ainsi, les sommes des deux dernières séries étant exprimées par $\varphi(h)$ et $\varphi(k)$, la somme de la série dont le terme général est l'expression (5) sera $\varphi(h+k)$; et puisque cette somme est aussi égale à $\varphi(h) \times \varphi(k)$, on aura

$$\varphi(h) \times \varphi(k) = \varphi(h+k). \tag{6}$$

En remplaçant dans cette équation k par $k+l$, on obtient

$$\varphi(h) \times \varphi(k) \times \varphi(l) = \varphi(h+k+l).$$

On aura donc, en considérant un nombre quelconque de quantités h, k, l, etc.,

$$\varphi(h) \times \varphi(k) \times \varphi(l) \times \text{etc.} = \varphi(h+k+l+\ldots).$$

Si l'on suppose les quantités h, k, l, etc., toutes égales à une fraction positive $\frac{p}{q}$, et que le nombre de ces quantités soit q, il viendra

$$\left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \varphi(p), \quad \text{d'où} \quad \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \left[\varphi(p)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Or, p étant un nombre entier, $\varphi(p)$ est $(1+x)^p$. Donc

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}}.$$

En supposant dans l'équation (6) $k = -h$, on trouve

$$\varphi(0) = \varphi(h) \times \varphi(-h);$$

or, pour $m = 0$, la série (1) se réduit à 1; d'où il suit que $\varphi(0) = 1$; la dernière équation donne donc

$$\varphi(-h) = \frac{1}{\varphi(h)}.$$

D'ailleurs on vient de voir que, pour h positif, on a

$$\varphi(h) = (1 + x)^h;$$

donc

$$\varphi(-h) = \frac{1}{(1+x)^h}, \quad \text{ou} \quad \varphi(-h) = (1+x)^{-h}.$$

Il est donc démontré que, lorsque x est compris entre 1 et -1, on a, pour toutes les valeurs de m,

$$(7)\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

529. La formule (7) peut être employée pour les extractions de racines. Supposons que l'on ait à calculer la racine $n^{ième}$ d'un nombre p. En posant $p = y \pm z$, on aura

$$p^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{n}}\left(1 \pm \frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{n}};$$

or, si l'on choisit les nombres z et y, de manière que le second soit plus grand que le premier, et que $y^{\frac{1}{n}}$ soit une quantité rationnelle, la formule (7) donnera le développement de $\left(1 \pm \frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$ en une série convergente; on obtiendra une valeur approchée de cette quantité en calculant la somme d'un nombre suffisant de termes de la série à partir du premier, et il ne restera qu'à multiplier cette valeur approchée par la quantité rationnelle $y^{\frac{1}{n}}$.

530. Quand on emploie la formule (7) à ces sortes d'applications, il est nécessaire d'avoir des limites de l'erreur que l'on commet en ne prenant qu'une partie des termes de la série.

Pour trouver ces limites, supposons d'abord x positif; et, comme la valeur de x doit être plus petite que 1, représentons-la par $\frac{1}{a}$; a sera un nombre plus grand que 1.

Désignons par N le terme de la série qui en a n avant lui; la quantité par laquelle il faudra multiplier N pour avoir le terme suivant, sera

$$\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{1}{a}.$$

Cette quantité peut être d'abord positive, mais elle devient négative dès que l'on a $n > m$. Si, en outre, le nombre $m+1$ est positif, la fraction $\frac{m-n}{n+1}$ ou $-\frac{n-m}{n+1}$, ou encore $-\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)$, est comprise entre -1 et zéro; par conséquent, la valeur numérique du rapport ci-dessus est plus petite que $\frac{1}{a}$. La suite des termes de la série, à partir de N, peut s'écrire ainsi :

$$N - N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{a} + N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+2}\right)\frac{1}{a^2} - \ldots$$

Ces termes vont en décroissant et ils sont alternativement positifs et négatifs, donc leur somme est plus petite que N, et elle est plus grande que $N - N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{a}$. L'erreur que l'on commet en ne prenant que les termes qui précèdent N est donc comprise entre ces deux limites.

Supposons maintenant x négatif, et posons $x = -\frac{1}{a}$. La somme des termes de la série, à partir de celui qui en

a n avant lui, sera

$$N + N\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{a} + N\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{n+2}\right)\frac{1}{a^2} + \ldots.$$

Cette somme est moindre que celle de tous les termes de la progression géométrique indéfinie

$$N + N\frac{1}{a} + N\frac{1}{a^2} + \ldots;$$

et elle est plus grande que celle de tous les termes de la progression

$$N + N\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{a} + N\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)^2\frac{1}{a^2} + \ldots.$$

Or les sommes de ces progressions sont

$$\frac{Na}{a-1} \quad \text{et} \quad \frac{Na(n+1)}{(n+1)a-(n-m)}.$$

L'erreur que l'on commet en ne prenant que les termes de la série qui précèdent N est donc comprise entre ces deux quantités.

Si, après avoir calculé la somme des termes qui précèdent N, on prend, pour la somme des termes à partir de N, la moitié de la somme des deux fractions $\frac{Na}{a-1}$ et $\frac{Na(n+1)}{(n+1)a-(n-m)}$; l'erreur sera moindre que la moitié de la différence de ces fractions; ce qui donne pour limite supérieure de l'erreur

$$\frac{Na(m+1)}{2(a-1)[(n+1)a-(n-m)]} \text{ ou } \frac{Na(m+1)}{2(a-1)[n(a-1)+m+a]}.$$

Lorsque le nombre $m+1$ est négatif, les limites de l'erreur sont encore celles que nous avons obtenues; mais, dans ce cas, pour que les termes décroissent à partir de N,

il faut que la valeur de n vérifie l'inégalité $n > \frac{-m-a}{a-1}$; et, si la valeur de x est négative, la somme des termes, à partir de N, est plus grande que la somme de la progression dont la raison est $\frac{1}{a}$, et elle est plus petite que celle de la progression dont la raison est $\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{a}$.

531. Quand on veut appliquer la formule (7) aux extractions de racines, on peut remplacer m par $\frac{1}{n}$; il vient alors

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{2n^2}x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3.n^3}x^3$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2.3.4.n^4}x^4 + \ldots.$$

Par le changement de m en $-m$ dans la même formule, on obtient

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

En supposant $m = 1$, et en changeant x en $-x$, on retrouve la formule qui donne la somme des termes d'une progression décroissante par quotient, prolongée indéfiniment, savoir :

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Développements des exponentielles e^x *et* a^x, *et de* $l(1+x)$.

532. Remplaçons dans la formule (7) du n° 528 x par αx et m par $\frac{1}{\alpha}$, il viendra pour toutes les valeurs de αx comprises entre $+1$ et -1, et, par conséquent,

pour toutes les valeurs de x comprises entre $+\frac{1}{\alpha}$ et $-\frac{1}{\alpha}$,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots.$$

Si l'on suppose que α décroisse indéfiniment, on trouvera en passant aux limites, et pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \ldots.$$

En supposant dans la dernière formule $x = 1$, on obtient

$$\lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots$$

ou, en remplaçant la série numérique qui forme le second membre de cette égalité, par la lettre e qui en désigne la somme (n° 238),

$$\lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Cette formule est celle que nous avons obtenue dans la note du n° 302, mais elle est ici démontrée pour toutes les valeurs positives et négatives de α. En écrivant αx au lieu de α, on a

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e;$$

d'où l'on conclut

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim.\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x = e^x.$$

Donc

$$(1).\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

La formule (1) subsiste pour toutes les valeurs de x. Il est d'ailleurs facile de s'assurer, au moyen du principe

du n° 526, que la série qui forme le second membre est toujours convergente.

533. Soit a une quantité positive quelconque; en indiquant par la lettre l les logarithmes dont la base est e, on a

$$a = e^{la}, \quad \text{d'où} \quad a^x = e^{xla};$$

donc

$$(2) \qquad a^x = 1 + xla + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

534. La formule du développement de $(1+x)^m$ donne

$$\frac{(1+x)^m - 1}{m} = x - \frac{x^2}{2}(1-m) + \frac{x^3}{3}(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)$$
$$- \frac{x^4}{4}(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right) + \ldots.$$

Si, dans cette dernière équation, on suppose que m converge vers zéro, on trouve en passant aux limites, et pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1,

$$\lim. \frac{(1+x)^m - 1}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

D'un autre côté,

$$(1+x)^m = e^{ml(1+x)} = 1 + ml(1+x) + \frac{m^2 l^2 (1+x)}{2} + \ldots$$

d'où

$$\frac{(1+x)^m - 1}{m} = l(1+x) + \frac{ml^2(1+x)}{2} + \ldots,$$

et en faisant converger m vers zéro,

$$\lim. \frac{(1+x)^m - 1}{m} = l(1+x).$$

Donc

$$(3) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

La formule (3) subsiste tant que la valeur numérique

de x est inférieure à l'unité; et il est facile de voir, au moyen du principe du n° 526, que, dans ce cas, la série qui forme le second membre est convergente. Mais cette série devient divergente quand la valeur de x est supérieure à l'unité, et l'équation (3) cesse d'être exacte. Dans le cas particulier où $x = 1$, le second membre devient $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$ etc.; or cette série est convergente (n° 240); donc

$$l(2) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots.$$

Pour $x = -1$, le second membre de l'équation (3) devient $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} -$ etc., et comme la somme des quantités $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc., en nombre infini, a une valeur infinie (n° 239), la formule (3) donne $l(0) = -\infty$, ce qui est exact.

En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, et en observant que

$$l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = l\left(\frac{n+1}{n}\right) = l(n+1) - ln,$$

on trouve

$$(4) \qquad l(n+1) = ln + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots.$$

Cette formule peut servir à calculer les logarithmes des nombres entiers consécutifs.

En changeant dans la formule (3) x en $-x$, on obtient

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

donc

$$l(1+x) - l(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

et si l'on pose $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$, d'où $x = \frac{m-n}{m+n}$, il vient, pour toutes les valeurs positives de m et de n,

$$l\frac{m}{n} = lm - ln = 2\left[\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \ldots\right].$$

En faisant $m = n + z$, on a

$$l(n+z) = ln + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{(2n+z)^3} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{(2n+z)^5} + \ldots\right].$$

et pour $z = 1$,

$$l(n+1) = ln + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right].$$

La dernière formule peut être employée préférablement à la formule (4).

535. Les diverses formules que nous venons d'établir ne donnent que les logarithmes népériens. Si l'on veut avoir les logarithmes vulgaires, il faudra multiplier ceux qu'on trouvera au moyen de ces formules par le module $\frac{1}{l10}$ (n° 302). En désignant ce module par M, on aura, d'après la formule (3),

$$(5) \qquad \log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right),$$

et d'après la formule (4),

$$(6) \qquad \log(n+1) - \log n = M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right).$$

Évaluation des erreurs qui résultent de la proportion à laquelle on a recours pour calculer, au moyen des Tables, le logarithme d'un nombre, ou le nombre correspondant à un logarithme.

536. Soit n un nombre entier quelconque; désignons par d une quantité plus petite que l'unité, et par M le module par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour obtenir les logarithmes vulgaires. Puisqu'on a $\log(n+d) - \log n = \log\left(1 + \frac{d}{n}\right)$, on trouve, en remplà

çant x par $\frac{d}{n}$ dans la formule (5) du n° 535,

$$\log(n+d) - \log n = \mathrm{M}\left(\frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \ldots\right).$$

Si le nombre n est très-grand, les termes $\frac{d^2}{2n^2}$, $\frac{d^3}{3n^3}$, etc., seront tous très-petits comparativement au terme $\frac{d}{n}$; on pourra donc obtenir une valeur fort approchée de la différence $\log(n+d) - \log n$, en se bornant au seul terme $\mathrm{M}\frac{d}{n}$. Comme la valeur de ce terme est proportionnelle à la quantité d, il s'ensuit que, pour des nombres suffisamment grands, les différences des logarithmes sont à très-peu près proportionnelles aux différences des nombres; ce qui justifie le procédé que nous avons indiqué dans le n° 306.

On peut aisément obtenir une limite de l'erreur que l'on commet en calculant par ce procédé la différence $\log(n+d) - \log n$. Soit

$$\log(n+d) - \log n = \delta \quad \text{et} \quad \log(n+1) - \log n = \Delta.$$

On a trouvé dans le n° 535,

$$\log(n+1) - \log n = \mathrm{M}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right).$$

Cette dernière formule donne

$$\Delta < \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{et} \quad \Delta > \frac{\mathrm{M}}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

D'après la formule que nous avons trouvée plus haut pour le développement de la différence $\log(n+d) - \log n$, on a

$$\delta < \frac{\mathrm{M}d}{n} \quad \text{et} \quad \delta > \frac{\mathrm{M}d}{n}\left(1 - \frac{d}{2n}\right).$$

Pour obtenir par approximation la valeur de la différence $\log(n+d) - \log n$, on pose la proportion $1 : d :: \Delta : x$,

d'où $x = d\Delta$. Or, le produit $d\Delta$ est compris entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$; et puisque, d'après les inégalités ci-dessus, la vraie différence δ est comprise entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{d}{2n}\right)$, elle est comprise à fortiori entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. Donc l'erreur que l'on commet en prenant $d\Delta$ au lieu de δ est moindre que la différence $\frac{Md}{n} - \frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ ou $\frac{Md}{2n^2}$.

Le logarithme népérien de 10 est 2,30258...; il fait partie de ceux qui se trouvent dans les Tables de Callet. Si l'on veut le calculer au moyen des formules du n° 534, on fera d'abord $n = 1$ dans la formule (4); on aura ainsi $l2$, d'où l'on conclura $l4 = 2l2$; en faisant $n = 4$ dans la même formule, on trouvera $l5$, et on aura $l10 = l2 + l5$. En divisant l'unité par ce logarithme, on a $M = 0,43...$; par conséquent, lorsque le nombre n est plus grand que 10000, la fraction $\frac{Md}{2n^2}$, dans laquelle d est une quantité moindre que 1, a une valeur moindre que $\frac{0,43.....}{200000000}$; cette valeur est donc moindre que le quart de l'unité décimale du 8e ordre. L'erreur que l'on commet en prenant $d\Delta$ pour la valeur approchée de δ ne peut donc pas influer sur les sept premières décimales du logarithme demandé.

On déduit aussi des relations ci-dessus une limite de l'erreur qui résulte de la proportion qu'on établit entre les différences des nombres et celles des logarithmes, quand on cherche le nombre auquel appartient un logarithme donné. Supposons que n et $n + 1$ soient les nombres dont les logarithmes comprennent le logarithme donné, que ce logarithme soit $\log n + \delta$, et que le nombre correspondant soit $n + d$. La valeur approchée de ce nombre, calculée par

le procédé du n° 306, sera $n + \frac{\delta}{\Delta}$; ainsi l'erreur sera $d - \frac{\delta}{\Delta}$. Or, suivant ce qui précède, la valeur absolue de la différence $d\Delta - \delta$ est moindre que $\frac{Md}{2n^2}$; on a donc

$$d - \frac{\delta}{\Delta} < \frac{Md}{2n^2\Delta};$$

et puisque $\Delta > \frac{M}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$, on a, à plus forte raison,

$$d - \frac{\delta}{\Delta} < \frac{d}{2n-1}.$$

Quand le nombre n est plus grand que 10000, la fraction $\frac{d}{2n-1}$ est moindre que $\frac{1}{20000}$. L'erreur que l'on commet en prenant le quotient $\frac{\delta}{\Delta}$ pour la valeur de d, n'influe donc pas sur les quatre premières décimales du nombre cherché.

537. Les limites que nous venons de calculer supposent que les logarithmes des nombres entiers sont connus exactement. Il resterait à tenir compte de l'inexactitude des logarithmes donnés par les Tables; mais nous renverrons pour ces détails à une Note de M. Vincent, qui se trouve dans l'*Algèbre* de M. Bourdon. Nous nous bornerons à dire que l'auteur de cette Note y fait voir que, lorsqu'il s'agit de trouver le logarithme d'un nombre, on obtient ce logarithme à moins d'une unité du septième chiffre décimal, et lorsqu'il s'agit de trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné, la caractéristique de ce logarithme étant 4, l'erreur que l'on commet dans l'évaluation du nombre a pour limite $\frac{1}{D}$, D représentant la différence des logarithmes des nombres entiers qui comprennent le nombre cherché, considérée comme un nombre entier.

CHAPITRE DIX-NEUVIÈME.

DE L'USAGE DES FONCTIONS DÉRIVÉES DANS LES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM. ÉVALUATION DES QUANTITÉS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{0}{0}$.

De l'usage des fonctions dérivées dans les questions de maximum et de minimum.

538. On dit que la valeur d'une fonction d'une variable est maximum ou minimum pour une valeur particulière a de x, lorsqu'en donnant à x des valeurs suffisamment voisines de a, soit plus petites, soit plus grandes, la fonction prend des valeurs toutes plus petites ou toutes plus grandes que pour $x = a$; ou, en d'autres termes, $f(x)$ est maximum ou minimum pour $x = a$, lorsque la différence $f(a+h) - f(a)$ reste toujours négative ou toujours positive, quel que soit le signe de h, tant que cette quantité est suffisamment petite.

On peut dire aussi que la valeur d'une fonction est maximum lorsqu'elle cesse de croître et commence à décroître, et qu'elle est minimum lorsqu'elle cesse de décroître et commence à croître.

539. Lorsque la fonction $f(x)$ est entière, on a

$$(1) \qquad f(a+h) - f(a) = f'(a)\,h + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Si l'on attribue à h une valeur suffisamment petite, la différence $f(a+h) - f(a)$ aura le signe de son premier terme (n° 372). Donc, si $f'(a)$ n'est pas nulle, cette différence changera de signe avec h; et par conséquent $f(a)$ ne sera ni un maximum ni un minimum.

Si $f'(a)$ est nulle et si $f''(a)$ a une valeur différente de zéro, la différence $f(a+h)-f(a)$ aura le même signe que $f''(a)$, quel que soit le signe de h, pourvu que cette quantité soit suffisamment petite. Donc, quand $f''(a)$ sera une quantité négative, $f(a)$ sera un maximum; quand $f''(a)$ sera une quantité positive, $f(a)$ sera un minimum.

Si l'on a en même temps $f'(a)=0$ et $f''(a)=0$, $f(a)$ ne sera ni un maximum ni un minimum, à moins que l'on n'ait aussi $f'''(a)=0$; et dans ce cas $f(a)$ sera un maximum si $f^{\text{IV}}(a)$ est une quantité négative, et un minimum si $f^{\text{IV}}(a)$ est une quantité positive.

En général, pour que $x=a$ donne un maximum ou un minimum de $f(x)$, il est nécessaire et il suffit que la première des fonctions dérivées successives de $f(x)$ qui n'est pas réduite à zéro soit d'ordre pair; et suivant que cette fonction est négative ou positive pour $x=a$, la valeur correspondante de la fonction est un maximum ou elle est un minimum.

Soit $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$.

En égalant à zéro la fonction dérivée du premier ordre, on obtient l'équation

$$x^2-6x+5=0.$$

Les racines de cette équation sont 1 et 5. La valeur $x=1$ réduit $f''(x)$ à -12; par conséquent, la valeur de $f(x)$ pour $x=1$ est un maximum. La valeur $x=5$ réduit $f''(x)$ à $+12$; donc elle rend $f(x)$ minimum.

Soit $f(x)=x^3-3x^2+3x+7$.

La première dérivée de cette fonction est $3x^2-6x+3$, ou $3(x-1)^2$, elle ne devient nulle que pour $x=1$. Cette valeur de x réduit aussi $f''(x)$ à zéro, et $f'''(x)$ est un nombre. Par conséquent, la fonction proposée n'admet ni maximum ni minimum.

Soit encore $f(x)=x^3-3x^2+6x+7$.

En égalant à zéro la dérivée du premier ordre, on obtient une équation qui n'a que des racines imaginaires; ainsi la fonction proposée n'admet ni maximum ni minimum.

Dérivées des fonctions qui dépendent des diverses opérations, des logarithmes et des exponentielles.

540. Quand $f(x)$ est une fonction entière, on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{1.2}f''(x) + \frac{h^2}{1.2.3}f'''(x) + \ldots.$$

Les fonctions dérivées étant entières, leurs valeurs sont finies tant que x ne devient pas infini; par conséquent, si h converge vers zéro, le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ convergera vers $f'(x)$. Donc, *la dérivée d'une fonction entière d'une variable est la limite vers laquelle converge le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ces accroissements tendent indéfiniment vers zéro.*

541. Lorsque $f(x)$ est une fonction quelconque, on appelle encore dérivée de cette fonction la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pour des valeurs de h qui décroissent indéfiniment; et l'on désigne toujours cette dérivée par $f'(x)$.

Il suit de cette définition que *la dérivée d'une constante est zéro*. La dérivée de $f(x)+a$, a étant une constante, est la même que celle de $f(x)$. Celle de $-f(x)$ est $-f'(x)$; et, généralement, la dérivée de $af(x)$ est $af'(x)$.

542. Soient X, Y, Z, U,... des fonctions quelconques d'une variable x; désignons par X_1, Y_1, Z_1, U_1,... ce que deviennent ces fonctions quand x devient $x+h$; et

par X', Y', Z', U',... les dérivées de ces mêmes fonctions, c'est-à-dire les limites des rapports $\frac{X_1 - X}{h}$, $\frac{Y_1 - Y}{h}$,....

Si l'on a $X = Y + Z + U + \ldots$, il en résultera

$$\frac{X_1 - X}{h} = \frac{Y_1 - Y}{h} + \frac{Z_1 - Z}{h} + \frac{U_1 - U}{h} + \ldots;$$

et en passant aux limites

$$X' = Y' + Z' + U' + \ldots.$$

Donc, *la dérivée de la somme de plusieurs fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions.*

543. Soit $X = YZ$, on aura

$$X_1 - X = Y_1 Z_1 - YZ = Y_1(Z_1 - Z) + Z(Y_1 - Y);$$

donc

$$\frac{X_1 - X}{h} = Y_1 \frac{Z_1 - Z}{h} + Z \frac{Y_1 - Y}{h}.$$

Lorsqu'on passera à la limite, en faisant $h = 0$, Y_1 deviendra Y, et l'on trouvera

$$X' = YZ' + ZY'.$$

Donc, *la dérivée du produit de deux fonctions est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant chaque fonction par la dérivée de l'autre.*

Si la fonction X est le produit d'un nombre quelconque de facteurs Y, Z, U, V,..., en faisant $ZUV\ldots = F(x)$, on aura, d'après la règle précédente,

$$X' = Y'F(x) + YF'(x).$$

En faisant ensuite $UV\ldots = F_1(x)$, d'où $F(x) = ZF_1(x)$, on aura

$$F'(x) = Z'F_1(x) + ZF'_1(x);$$

par conséquent

$$X' = Y'ZUV\ldots + Z'YUV\ldots + YZF'_1(x).$$

On pourra continuer de la même manière, aussi longtemps que l'exigera le nombre des facteurs; et de là il suit que *la dérivée du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs.*

Cette règle comprend, comme cas particulier, la première proposition du n° 413.

544. Si toutes les fonctions Y, Z, U,... sont égales, on aura $X = Y^m$ et $X' = mY^{m-1}Y'$. Donc, pour obtenir *la dérivée de la $m^{ième}$ puissance d'une fonction, il faut multiplier la dérivée de la fonction par l'exposant et par la $(m-1)^{ième}$ puissance de la fonction.*

545. Soit $X = \frac{1}{Z}$. On conclut de là

$$X_1 - X = \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z} = -\frac{Z_1 - Z}{Z_1 Z};$$

donc

$$\frac{X_1 - X}{h} = -\frac{1}{Z_1 Z} \cdot \frac{Z_1 - Z}{h},$$

et en passant à la limite

$$X' = -\frac{Z'}{Z^2}.$$

On déduit de là la dérivée d'une fraction $\frac{Y}{Z}$; car en considérant cette fraction comme le produit $Y \times \frac{1}{Z}$, et en appliquant la règle du n° 543, on a, pour la dérivée de ce produit,

$$Y' \cdot \frac{1}{Z} - Y \cdot \frac{Z'}{Z^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{ZY' - YZ'}{Z^2}.$$

Donc, *pour obtenir la dérivée d'une fraction, il faut multiplier la dérivée du numérateur par le dénominateur,*

soustraire de ce produit celui de la dérivée du dénominateur par le numérateur, et diviser la différence par le carré du dénominateur.

Si l'on a $X = \frac{1}{Z^m}$, il en résultera $X' = -\frac{mZ^{m-1}Z'}{Z^{2m}}$, ou $X' = -mZ^{-m-1}.Z'$, ce qui prouve que *la dérivée d'une puissance négative se forme suivant la même règle que celle d'une puissance positive.*

546. pour $X = \sqrt[m]{Y}$, on a, d'après la division de $a^m - b^m$ par $a - b$,

$$X_1 - X = \sqrt[m]{Y_1} - \sqrt[m]{Y} = \frac{Y_1 - Y}{\sqrt[m]{Y_1^{m-1}} + \sqrt[m]{Y_1^{m-2}}.\sqrt[m]{Y} + \ldots + \sqrt[m]{Y^{m-1}}};$$

d'où

$$\frac{X_1 - X}{h} = \frac{Y_1 - Y}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{Y_1^{m-1}} + \sqrt[m]{Y_1^{m-2}}\sqrt[m]{Y} + \ldots + \sqrt[m]{Y^{m-1}}},$$

et en passant à la limite

$$X' = \frac{Y'}{m\sqrt[m]{Y^{m-1}}}.$$

En faisant usage de l'exposant fractionnaire, on a

$$X = Y^{\frac{1}{m}} \quad \text{et} \quad X' = \frac{1}{m}.Y'.Y^{\frac{1}{m}-1};$$

de sorte que la dérivée est formée suivant la même règle que celle d'une puissance entière.

Dans le cas où $m = 2$, on a

$$X = \sqrt{Y} \quad \text{et} \quad X' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}.$$

Donc, *la dérivée d'un radical du second degré est égale à la dérivée de la quantité sous le radical, divisée par deux fois le radical.*

547. Supposons $X = \log Y$; on en conclura

$$X_1 - X = \log Y_1 - \log Y = \log \frac{Y_1}{Y}.$$

Soit $\frac{Y_1 - Y}{h} = \theta$, d'où $Y_1 = Y + \theta h$; on aura

$$\frac{X_1 - X}{h} = \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{\theta h}{Y}\right) = \frac{\theta}{Y} \log\left(1 + \frac{\theta h}{Y}\right)^{\frac{Y}{\theta h}}.$$

Si l'on fait converger h vers zéro, la quantité $\left(1 + \frac{\theta h}{Y}\right)^{\frac{Y}{\theta h}}$ convergera vers e (n° 533), et θ convergera vers la dérivée Y'; donc, en passant aux limites, on aura

$$X' = \frac{Y' \log e}{Y}.$$

Donc, *pour obtenir la dérivée d'un logarithme, il faut calculer la dérivée de la quantité dont on doit prendre le logarithme, la diviser par cette quantité, et la multiplier par le logarithme du nombre* e *dans le système auquel appartient le logarithme que l'on considère, ou par le module de ce système.*

548. Soit $X = a^Y$, d'où $X_1 - X = a^Y(a^{Y_1 - Y} - 1)$. Si l'on fait

$$Y_1 - Y = \eta, \quad \text{et} \quad \frac{a^\eta - 1}{\eta} = \beta,$$

il en résultera

$$\lim \frac{\eta}{h} = Y', \quad \text{et} \quad a = (1 + \eta\beta)^{\frac{1}{\eta}} \quad \text{ou} \quad a = \left[(1 + \eta\beta)^{\frac{1}{\eta\beta}}\right]^\beta.$$

Pour $\eta = 0$, la dernière relation devient $a = e^\beta$, d'où $\beta = la$, donc, $\lim \frac{a^\eta - 1}{\eta} = la$. Mais

$$\frac{a^\eta - 1}{h} = \frac{a^\eta - 1}{\eta} \cdot \frac{\eta}{h}, \quad \text{donc} \quad \lim \frac{a^\eta - 1}{h} = Y' la;$$

et puisque $X_1 - X = a^Y(a^{Y_1 - Y} - 1) = a^Y(a^\eta - 1)$,

$$\lim \frac{X_1 - X}{h} = a^Y . Y' la, \quad \text{ou} \quad X' = a^Y . Y' la.$$

Donc, *la dérivée d'une fonction exponentielle est égale à la dérivée de l'exposant, multipliée par la fonction et par le logarithme népérien de la base.*

549. Quand on a calculé la dérivée d'une fonction, en prenant la dérivée de cette fonction dérivée on a la seconde dérivée de la fonction proposée, ou la dérivée du second ordre. La dérivée de cette seconde dérivée est la troisième dérivée, ou la dérivée du troisième ordre de la fonction. Ainsi de suite.

550. Puisque la première dérivée d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque cette dérivée est positive pour une valeur particulière a de x; en désignant par h une quantité très-petite, le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est aussi positif; donc, si h est positif, on a $f(a+h) > f(a)$, c'est-à-dire que la fonction croît avec x. Si, au contraire, la dérivée est négative pour $x = a$, le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est aussi négatif pour h suffisamment petit; donc, h étant positif, on a $f(a+h) < f(a)$, c'est-à-dire que la fonction décroît lorsque x augmente.

Il suit de là que, pour que la fonction cesse de croître et commence à décroître, ou pour qu'elle cesse de décroître et commence à croître, c'est-à-dire pour qu'elle devienne maximum ou minimum, il faut et il suffit que la dérivée change de signe. Il y a maximum quand la dérivée passe du positif au négatif, et minimum quand la dérivée passe du négatif au positif.

Supposons, par exemple, que l'on demande le maximum de la fraction $\frac{x^3-1}{x^4+x}$. La dérivée de cette fraction est $-\frac{x^6-6x^3-1}{(x^4+x)^2}$. Le dénominateur $(x^4+x)^2$ étant toujours positif, cette dérivée ne peut changer de signe qu'autant que le numérateur change de signe, et, par conséquent, devient zéro. D'ailleurs l'équation $x^6-6x^3-1=0$ a seulement deux racines réelles $x=\sqrt[3]{3\pm\sqrt{10}}$: le premier membre est négatif pour les valeurs de x comprises entre ces deux racines, il est positif pour toutes les autres valeurs de x; et le contraire a lieu pour la fonction dérivée. On conclut de là que la fraction proposée est minimum pour $x^3=3-\sqrt{10}$, et qu'elle est maximum pour $x^3=3+\sqrt{10}$.

Soit encore la fraction $\frac{x}{lx}$; sa dérivée est $\frac{lx-1}{(lx)^2}$; elle s'évanouit pour $lx=1$, ou $x=e$, et elle est négative quand $x<e$, positive quand $x>e$. La fraction proposée a donc une valeur minimum qui est le nombre e.

551. Quand la fonction $f(x)$ est entière, sa dérivée est aussi une fonction entière, et elle ne peut changer de signe qu'en devenant zéro. Soit a une racine de $f'(x)=0$; si $f''(a)>0$, la fonction $f'(x)$ est croissante pour des valeurs croissantes de x très-voisines de a, donc elle passe du négatif au positif; si $f''(a)<0$, la fonction $f'(x)$ est décroissante, donc elle passe du positif au négatif; si $f''(a)=0$, a est une racine multiple de $f'(x)=0$, et pour que $f'(x)$ change de signe lorsque x passe d'une valeur plus petite que a à une autre plus grande, il faut que le degré de multiplicité de la racine a soit impair. On retrouve ainsi, pour les fonctions entières, les règles qui ont été établies dans le n° 539 par la considération du développement de $f(x+h)$.

Évaluation des quantités qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

552. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières qui deviennent nulles quand on fait $x = a$; la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ prendra alors la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Si l'on divisait les deux termes par leur plus grand commun diviseur, on obtiendrait une expression équivalente qui aurait une valeur déterminée, quelle que fût celle de x. Mais on peut aussi trouver la valeur de la fraction pour $x = a$ sans recourir à l'opération du plus grand commun diviseur.

Si l'on fait $x - a = h$, d'où $x = a + h$, on aura, à cause de $f(a) = 0$ et $\varphi(a) = 0$, et en supprimant le facteur h, qui sera commun aux deux développements de $f(a+h)$ et $\varphi(a+h)$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a) + \frac{h}{1.2}f''(a) + \frac{h^2}{1.2.3}f'''(a) + \ldots}{\varphi'(a) + \frac{h}{1.2}\varphi''(a) + \frac{h^2}{1.2.3}\varphi'''(a) + \ldots};$$

d'où, en faisant $h = 0$, qui correspond à $x = a$,

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Si les quantités $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ sont toutes deux nulles, on trouvera, en supprimant une seconde fois le facteur h,

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Ainsi de suite.

On conclut de là cette règle générale: *pour obtenir la valeur d'une fraction* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *dont les deux termes sont des fonctions entières d'une variable* x, *et qui devient* $\frac{0}{0}$ *pour*

$x = a$, *il faut former la suite des fractions* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, $\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}$, etc.; *la valeur cherchée est celle de la première de ces fractions qui n'est pas* $\frac{0}{0}$ *pour* $x = a$.

553. Supposons maintenant que $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne soient plus des fonctions entières; si elles sont nulles pour $x = a$, en faisant $x = a + h$, on aura, à cause de $f(a) = 0$ et $\varphi(a) = 0$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}.$$

Lorsque h convergera vers zéro, le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ convergera vers $f'(a)$, et le rapport $\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}$ convergera vers $\varphi'(a)$; on aura donc, en passant aux limites,

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Si les deux quantités $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ sont nulles, on appliquera la même proposition à la fraction $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; de sorte que la valeur cherchée sera $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$. Si cette dernière fraction est encore $\frac{0}{0}$, il faudra employer les dérivées du troisième ordre. Ainsi de suite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$. La dérivée du numérateur est $\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$, celle du dénominateur est 1, et le quotient de la division de la première quantité par la seconde, pour $x = 0$, est $\frac{1}{3}$. Ce nombre est la valeur cherchée.

Soit encore la fraction $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ qui est $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$. La dérivée du numérateur est $e^x + e^{-x}$; celle du dénominateur est 1, et le quotient de la division de la première quantité par la seconde, pour $x = 0$, est 2. Ce nombre est la valeur cherchée.

554. On peut parvenir autrement à ces résultats. On a, pour le premier exemple,

$$\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^2 - \ldots$$

donc

$$\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x + \ldots.$$

Pour $x = 0$, le second membre de la dernière égalité se réduit à $\frac{1}{3}$.

A l'égard du second exemple, en remplaçant les exponentielles e^x et e^{-x} par leurs développements, on a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2 + \frac{2x^2}{1.2.3} + \frac{2x^4}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

Pour $x = 0$, le second membre de cette égalité se réduit à 2.

555. Lorsque les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent infinies pour une valeur de x, la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ se présente sous une forme indéterminée. On peut considérer cette fraction comme le quotient de la division de $\frac{1}{\varphi(x)}$ par $\frac{1}{f(x)}$, et ces deux dernières quantités deviennent l'une et l'autre zéro pour $x = a$.

Quand $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières, elles ne deviennent infinies que pour $x = \infty$. Dans ce cas, pour

obtenir la valeur correspondante de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, il suffit de diviser les deux termes par la plus haute puissance de x.

Soit

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots}{Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots}.$$

Si $m > n$, en divisant par x^m et faisant $x = \infty$, le numérateur deviendra a, et le dénominateur sera zéro; la valeur de la fraction sera donc infinie. Si $m = n$, après la division par x^m, en faisant $x = \infty$, le numérateur devient a, et le dénominateur devient A; la valeur de la fraction est donc $\frac{a}{A}$. Si $m < n$, la valeur de la fraction pour $x = \infty$ est zéro.

Il en sera de même, en faisant $x = \infty$, si les deux termes de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sont des quantités irrationnelles, développées et ordonnées suivant les puissances décroissantes de x. La valeur de la fraction sera l'infini, une quantité finie, ou zéro, suivant que le degré du numérateur sera plus grand que celui du dénominateur, égal à celui du dénominateur, ou plus petit que celui du dénominateur.

556. Si, pour $x = a$, $f(x)$ est zéro, et $\varphi(x)$ est ∞, le produit $f(x) \times \varphi(x)$ se présentera sous une forme indéterminée; mais on peut considérer ce produit comme le quotient de la division de $f(x)$ par $\frac{1}{\varphi(x)}$, et ces deux quantités sont zéro pour $x = a$ (*).

(*) Le produit xlx est $0 \times \infty$ pour $x = 0$. En mettant ce produit sous cette forme $\frac{x}{\frac{1}{lx}}$, la dérivée du numérateur est 1, celle du dénominateur est $-\frac{1}{x(lx)^2}$, et le quotient de la division de la première quantité par la seconde

est $-x(lx)^2$ qui est aussi $0 \times \infty$ pour $x = 0$; mais, puisque la valeur de la première expression xlx, pour $x = 0$, est égale à celle de $-x(lx)^2$, en désignant cette valeur par θ, on a

$$\theta = -\theta lx \quad \text{ou} \quad \theta(1 + lx) = 0;$$

et puisque lx est $-\infty$ pour $x = 0$, $\theta = 0$.

On peut parvenir autrement à ce résultat. En faisant $x = \frac{1}{z}$, on a

$$xlx = -\frac{lz}{z}.$$

Soit $lz = \gamma$, il en résultera

$$z = e^{\gamma} = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{1.2} + \ldots.$$

Donc

$$\frac{z}{lz} = \frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{\gamma}{1.2} + \frac{\gamma^2}{1.2.3} + \ldots.$$

Pour $z = +\infty$, qui correspond à $x = 0$, le premier terme du développement de $\frac{z}{lz}$ est zéro, les termes $\frac{\gamma}{1.2}$, $\frac{\gamma^2}{1.2.3}$, etc., sont infinis, et comme ils sont tous positifs, leur somme est infinie. Donc $\frac{z}{lz} = \infty$; par conséquent $\frac{lz}{z} = 0$.

CHAPITRE VINGTIÈME.

ADDITIONS.

I. — *Sur la théorie de l'élimination.*

1. En considérant un système de deux équations de degré quelconque à deux inconnues, on peut se proposer deux questions, que l'on confond assez ordinairement l'une avec l'autre, mais qui sont cependant distinctes. On peut vouloir trouver toutes les solutions communes aux deux équations par rapport à l'une et à l'autre inconnue, ou seulement une équation à une seule inconnue, par laquelle on puisse obtenir toutes les valeurs de cette inconnue qui conviennent aux deux équations avec des valeurs correspondantes de l'autre inconnue, les mêmes pour chaque équation. La théorie qui a été exposée dans le chapitre XV, pour la résolution de ces deux questions, est imparfaite, en ce qu'elle ne fait pas connaître quel sera le degré de multiplicité des racines de l'équation finale en y, et elle ne comprend pas les valeurs de y auxquelles correspondent des valeurs infinies de x. M. Labatie a donné des règles qui font disparaître ces imperfections. M. Ossian Bonnet s'est aussi occupé de la résolution des équations simultanées à deux inconnues. M. Bonnet donne d'abord une définition précise des solutions multiples et de leur degré de multiplicité. Au moyen de cette définition, il prouve, 1° que, si $A = BQ + R$, les solutions des deux systèmes $A = 0$, $B = 0$, et $B = 0$, $R = 0$, ont, dans l'un et dans l'autre, le même degré de multiplicité; 2° que le système $CA = 0$, $B = 0$ équivaut toujours aux deux systèmes $C = 0$,

$B = o$, et $A = o$, $B = o$. Il conclut de ces deux lemmes un procédé rigoureux de résolution, indépendant du théorème de MM. Labatie et Sarrus, et ensuite une démonstration nouvelle de ce théorème, qui n'est plus qu'une abréviation de sa méthode. Ce travail de M. Bonnet a été inséré dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* (février, mars, avril et mai 1846). L'auteur annonçait qu'il s'occuperait aussi de l'élimination proprement dite, c'est-à-dire du cas où le procédé de l'élimination est employé seulement pour obtenir une ou plusieurs équations indépendantes de l'une des inconnues, et qui donnent toutes les valeurs de l'autre inconnue. C'est ce sujet que je vais traiter : les résultats sont ceux auxquels M. Labatie était parvenu; mais les démonstrations sont de M. Bonnet, qui ne les avait pas encore publiées, et qui a bien voulu me les communiquer.

2. Soient $f(x, y) = o$ et $F(x, y) = o$ deux équations algébriques à deux inconnues. Supposons qu'on ait résolu chacune d'elles par rapport à x, et soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les racines de la première, $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ celles de la seconde. Ces quantités sont des fonctions de y, et, pour qu'un couple de valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$ soit une solution des deux équations, il faut et il suffit que, lorsqu'on fera $y = \beta$, une ou plusieurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$, et une ou plusieurs des racines $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$, deviennent α. Il suit de là que, si l'on forme le produit P de toutes les différences $x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, \ldots, x_2 - x'_1, x_2 - x'_2, \ldots$, et si $y = \beta$ ne rend infinie aucune des racines $x_1, x_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots$ de l'une et de l'autre des deux équations, cette valeur β de y devra vérifier $P = o$; et réciproquement, toute valeur qui vérifiera l'équation $P = o$, sera une valeur convenable de y.

3. Supposons d'abord que les coefficients des termes

du plus haut degré par rapport à x, dans les deux équations, soient numériques. Dans ce cas, les racines $x_1, x_2, \ldots$, x'_1, $x'_2, \ldots$ ne deviennent ni infinies ni $\frac{0}{0}$ pour aucune valeur de y. On a, en outre,

$$f(x,y) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots,$$
$$F(x,y) = x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots = (x-x'_1)(x-x'_2)(x-x'_3)\ldots;$$

donc, en substituant dans la seconde équation les racines de la première,

$$F(x_1, y) = (x_1 - x'_1)(x_1 - x'_2)(x_1 - x'_3)\ldots,$$
$$F(x_2, y) = (x_2 - x'_1)(x_2 - x'_2)(x_2 - x'_3)\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par suite,

$$P = F(x_1, y) \times F(x_2, y) \times F(x_3, y)\ldots.$$

On peut évaluer ce produit en fonction rationnelle de la seule inconnue y, au moyen des fonctions symétriques.

Écrivons le produit P sous cette autre forme :

$$P = (x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_1^{n-2} + \ldots)(x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + B_2 x_2^{n-2} + \ldots)\ldots.$$

Après la substitution des valeurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$, un terme quelconque de la fonction P contiendra au plus m coefficients de $F(x,y)$ et n coefficients de $f(x,y)$. En effet, il est d'abord évident, par l'expression ci-dessus de P, qu'un terme quelconque de ce produit, avant la substitution, ne contient pas plus de m coefficients de la suite B_1, B_2.... Il en est encore de même après la substitution des valeurs de $x_1, x_2, \ldots$, puisque cette opération ne peut introduire que des coefficients de $f(x,y)$. D'un autre côté, on peut former la quantité P en substituant dans la première équation les racines de la seconde, et de cette manière, un terme de P contiendra au plus n coefficients de $f(x,y)$.

4. Soient actuellement

$$f(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots,$$
$$F(x, y) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots.$$

On pourra écrire les équations $f(x, y) = 0$ et $F(x, y) = 0$ de cette manière :

$$x^m + \frac{A_1}{A_0} x^{m-1} + \frac{A_2}{A_0} x^{m-2} + \ldots = 0,$$
$$x^n + \frac{B_1}{B_0} x^{n-1} + \frac{B_2}{B_0} x^{n-2} + \ldots = 0.$$

D'après la remarque précédente, le dénominateur d'un terme du produit P ne pourra être que $A^n B_0^m$, ou le produit de deux puissances moins élevées de A_0 et de B_0. Donc, en multipliant P par $A_0^n B_0^m$, on aura une fonction entière de y. Soit $F = PA_0^n B_0^m$; nous allons démontrer que $F = 0$ est l'équation finale.

Cela serait évident si l'équation finale ne devait contenir que des racines pour lesquelles on n'eût ni $A_0 = 0$, ni $B_0 = 0$, et si l'équation $F = 0$ n'avait aussi que de semblables racines; car alors les racines de $F = 0$ seraient les mêmes que celles de $P = 0$; et, d'un autre côté, comme les racines qui devraient être données par l'équation finale ne rendraient infinie aucune des racines $x_1, x_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots$, elles devraient toutes satisfaire à l'équation $P = 0$; mais il faut prouver que la proposition énoncée subsiste aussi, en considérant les valeurs de y qui annulent un des coefficients A_0 et B_0, ou qui les annulent tous les deux.

Supposons d'abord que, pour $y = \delta$, on ait $A_0 = 0$, et que B_0 ne soit pas nul; dans ce cas, une ou plusieurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont infinies. Supposons que les racines infinies soient x_1 et x_2; on a

$$PB_0^m =$$
$$(B_0 x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + \ldots)(B_0 x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + \ldots)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots,$$

ou bien

$$PB_0^m =$$

$$x_1^n x_2^n \left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_1} + \ldots\right)\left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_2} + \ldots\right)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots;$$

et, en multipliant les deux membres par A_0^n,

$$PA_0^n B_0^m =$$

$$(A_0 x_1 x_2)^n \left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_1} + \ldots\right)\left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_2} + \ldots\right)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots.$$

Nous allons d'abord démontrer que le produit $A_0 x_1 x_2$ a, pour $y = \beta$, une valeur finie, différente de zéro. En considérant le produit de toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$, dont le dernier terme est A_m, on a

$$A_0 x_1 x_2 x_3 \ldots = A_m, \quad \text{d'où} \quad A_0 x_1 x_2 = \frac{A_m}{x_3 x_4 \ldots}.$$

Or, si $y = \beta$ n'annule pas A_m, aucune des racines $x_3, x_4, \ldots$ n'est zéro quand on fait $y = \beta$; par conséquent, le second membre de la dernière égalité a une valeur finie, différente de zéro.

Si A_m est annulé par $y = \beta$, il y a des racines nulles; mais, dans ce cas, que l'on augmente toutes les racines d'un même nombre h, tel qu'aucune des racines ne soit égale à $-h$; le dernier terme de l'équation ne sera plus zéro. On aura alors

$$A_0 (x_1 + h)(x_2 + h) = \frac{A'_m}{(x_3 + h)(x_4 + h)\ldots}.$$

Il suit de là que le produit $A_0 (x_1 + h)(x_2 + h)$ aura pour $y = \beta$ une valeur finie, différente de zéro; or ce produit est égal à $A_0 x_1 x_2 \left(1 + \frac{h}{x_1}\right)\left(1 + \frac{h}{x_2}\right)$, et lorsque x_1 et x_2 deviennent infinies, il a la même valeur que le produit $A_0 x_1 x_2$.

Revenons maintenant à l'expression ci-dessus du produit $PA_0^n B_0^m$. Lorsqu'on fait $y = \beta$, les deux premiers facteurs

polynômes de cette quantité se réduisent à B_0, puisque x_1 et x_2 sont infinies. Chacun des facteurs suivants a une valeur finie qui n'est pas zéro, à moins que l'une des racines x_3, x_4... ne prenne une valeur égale à celle d'une des racines de l'équation $F(x, y) = 0$, auquel cas il y aurait une valeur α de x qui vérifierait les deux équations avec $y = \beta$. Donc, puisque $A_0 x_1 x_2$ est une quantité finie, différente de zéro, si, pour $y = \beta$ qui annule A_0, les deux équations n'ont aucune solution commune, finie ou infinie, $PB_0^m A_0^n$ ou F a une valeur différente de zéro; et si les deux équations ont une solution commune $x = \alpha$, F est zéro.

Si $y = \beta$ annule A_0 et B_0, en supposant toujours que x_1 et x_2 soient les racines de $f(x, y) = 0$ qui deviennent infinies, les deux premiers facteurs polynômes de $PA_0^n B_0^m$ sont nuls quand on y fait $y = \beta$, et tous les autres facteurs ont des valeurs finies; donc $F = 0$.

Il est démontré par là que l'équation $F = 0$ donne toutes les valeurs finies de y qui vérifient les deux équations avec une valeur finie ou infinie de x.

5. L'équation $F = 0$ peut avoir des racines égales; mais, relativement au degré de multiplicité de ces racines, nous considérerons seulement le cas où l'une des équations ne contient pas y; de sorte que le système proposé est $f(x) = 0$, $F(x, y) = 0$. Dans ce cas, les racines x_1, x_2, x_3,... de la première équation sont des quantités numériques, et l'on peut ne pas tenir compte du coefficient A_0 qui est aussi un nombre. On a

$$F = PB_0^m = (B_0 x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + \ldots)(B_0 x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + \ldots)\ldots.$$

Il résulte de cette composition de la quantité F que, si l'équation $f(x) = 0$ admet p racines égales à α, et si, par la substitution de α, $F(x, y) = 0$ admet p' racines égales à β, F admet le facteur $(y - \beta)^{pp'}$.

6. Il reste à expliquer comment on obtient l'équation $F = 0$, quand on fait usage du procédé d'élimination par le plus grand commun diviseur. Considérons pour cela les égalités

$$cA = Bq + Rr,$$
$$c_1 B = Rq_1 + R_1 r_1,$$
$$c_2 R = R_1 q_2 + R_2 r_2,$$
$$c_3 R_1 = R_2 q_3 + r_3.$$

Soient $F_1 = 0$ l'équation finale du système $B = 0$, $R = 0$; $F_2 = 0$ celle du système $R = 0$, $R_1 = 0$; $F_3 = 0$ celle du système $R_1 = 0$, $R_2 = 0$.

Soient m, n, p, p_1, p_2 les degrés de A, B, R, R_1, R_2, par rapport à x; et α, β, ρ, ρ_1, ρ_2 les coefficients des premiers termes de ces polynômes.

En substituant dans A les racines de $B = 0$, on aura une suite d'égalités

$$cA' = R'r, \quad cA'' = R''r, \quad cA''' = R'''r, \ldots$$

d'où l'on conclura $\dfrac{c^n F}{\beta^m} = \dfrac{r^n F_1}{\beta^p}$, ou $c^n F = r^n F_1 \beta^{m-p}$.

On aura semblablement

$$c_1^p F_1 = r_1^p F_2 \rho^{n-p_1},$$
$$c_2^{p_1} F_2 = r_2^{p_1} F_3 \rho_1^{p-p_2},$$
$$c_3^{p_2} F_3 = r_3^{p_2} \rho_2^{p_1}.$$

Par suite, en multipliant membre à membre,

$$F = \left(\frac{r}{c}\right)^n \left(\frac{r_1}{c_1}\right)^p \left(\frac{r_2}{c_2}\right)^{p_1} \left(\frac{r_3}{c_3}\right)^{p_2} \beta^{m-p} \rho^{n-p_1} \rho_1^{p-p_2} \rho_2^{p_1}.$$

Il est à remarquer que c, c_1, c_2, c_3 peuvent n'être pas les facteurs les plus simples par lesquels il faut multiplier pour rendre les divisions possibles.

II. — *Méthode de* M. Cauchy, *pour l'évaluation des fonctions symétriques rationnelles et entières des racines d'une équation* (*).

1. Soit une équation

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0.$$

Soient a, b, c, ..., i, k, l les racines, et V une fonction symétrique quelconque rationnelle et entière de ces racines.

Supposons qu'on ait éliminé de l'expression de V, par un moyen quelconque, toutes les racines, excepté a; il en résultera une valeur de cette fonction sous la forme d'un polynôme rationnel et entier par rapport à a, de sorte qu'en ordonnant ce polynôme suivant les puissances de a, on aura

$$V = A_0 a^\mu + A_1 a^{\mu-1} \ldots + A_{\mu-1} a + A_\mu.$$

A_0, A_1, etc., étant des quantités composées rationnellement avec les coefficients de l'équation proposée.

Soit, en outre, en remplaçant x par a dans l'équation,

$$A = a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} \ldots + p_{m-1} a + p_m.$$

Nous allons démontrer que si l'on divise le polynôme V par le polynôme A, le reste sera indépendant de a, et sera la valeur de la fonction V.

En effet, si Q et R désignent le quotient et le reste de la division de V par A, on aura $V = AQ + R$, et, comme A est nul,

$$V = R.$$

Le reste R est au plus du degré $m-1$ en a; représentons-

(*) Cette méthode a été publiée par M. Cauchy dans ses anciens *Exercices de Mathématiques* (4e année).

le par

$$q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

On aura donc aussi

$$V = q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

Mais puisque V est une fonction symétrique, on peut remplacer a par b, par c, etc.; et comme, par ces changements, q_0, q_1, etc. conservent leurs valeurs, il s'ensuit qu'en écrivant x au lieu de a, dans le second membre de la dernière équation ci-dessus, cette équation, du degré $m-1$, sera satisfaite par m valeurs différentes de x; ce qui est impossible, à moins que les coefficients des puissances de x ne soient tous nuls. Donc le reste R est q_{m-1}, et

$$V = q_{m-1}.$$

2. Cette démonstration suppose que les m racines sont inégales; mais les conclusions qui s'en déduisent subsistent encore quand l'équation $X = 0$ a des racines égales. Pour le prouver, il suffit de considérer, au lieu de l'équation $X=0$ qui a des racines égales, une autre équation $U = 0$ dont toutes les racines soient inégales, et qu'on obtiendrait en faisant subir des modifications insensibles aux coefficients de X. Par exemple, si $X = 0$ a trois racines égales à a, et que toutes les autres racines soient différentes, on prendra

$$U = \frac{X(x-a-h)(x-a-h')}{(x-a)^2}.$$

Le polynôme U ne diffère de X qu'en ce que deux des trois racines égales à a sont remplacées par $a+h$ et $a+h'$; et l'on modifierait d'une manière semblable le polynôme X, si, outre les trois racines égales à a, l'équation proposée avait plusieurs racines égales à b, d'autres égales à c, etc. Cela posé, en substituant l'équation $U = 0$ à $X = 0$, et conservant les notations précédentes, on aura $V = q_{m-1}$;

mais puisque cette équation aura lieu quelque petites que soient les quantités h, h', etc., elle aura lieu aussi à la limite quand on fera $h = 0$, $h' = 0$, etc.

3. Voici maintenant quelle est la méthode que M. Cauchy déduit de la proposition précédente, pour calculer la valeur de la fonction symétrique V.

Divisons X par $x - a$, et soit X_1 le quotient; divisons de même X_1 par $x - b$, et soit X_2 le quotient; divisons encore X_2 par $x - c$, et soit X_3 le quotient; continuons d'enlever ainsi de X tous les facteurs du premier degré jusqu'à $x - k$; de sorte que X_{m-1} ne contiendra plus que le seul facteur $x - l$. Cela posé, considérons les m équations

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_{m-1} = 0.$$

La première est la proposée, et elle a pour racines $a, b, c, \ldots, k, l$; la deuxième a pour racines $b, c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière au moyen de a et des coefficients de la proposée; la troisième a pour racines $c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière au moyen de b et des coefficients de la précédente, c'est-à-dire par a, b et les coefficients de la proposée. En général, les coefficients de l'une quelconque de ces équations sont exprimés sous forme entière par les coefficients de la proposée et les racines qui n'appartiennent pas à l'équation que l'on considère. Enfin, désignons par A la valeur de X pour $x = a$, par B la valeur de X_1 pour $x = b$, par C celle de X_2 pour $x = c$, et ainsi de suite: en sorte que I sera la valeur de X_{m-3} pour $x = i$, K celle de X_{m-2} pour $x = k$, et L celle de X_{m-1} pour $x = l$. On aura

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots, \quad I = 0, \quad K = 0, \quad L = 0.$$

Cela posé, V est une fonction symétrique, non-seulement

des racines de l'équation $X = 0$, mais aussi de celles de l'une quelconque des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_{m-1} = 0.$$

Nous allons faire voir qu'en s'appuyant sur cette remarque, on peut, à l'aide du théorème fondamental qui a été démontré en premier lieu, éliminer successivement chaque racine de l'expression de V.

D'abord l'équation $L = 0$, où l entre au premier degré, permet de chasser immédiatement l de l'expression de V. Considérant alors V comme une fonction symétrique des deux racines k et l de l'équation $X_{m-2} = 0$, dont l'une est déjà éliminée, on l'ordonnera par rapport à k, et on la divisera par K, suivant ce qui a été dit ci-dessus (1); le reste de la division ne contiendra plus k et sera la valeur de la fonction V débarrassée des racines k et l. On considérera cette valeur de V comme une fonction symétrique des trois racines i, k, l de l'équation $X_{m-3} = 0$, dont les deux dernières ont été éliminées, et après l'avoir ordonnée par rapport à i, on la divisera par I afin d'éliminer i; le reste de la division ne contiendra pas i et sera la valeur de V débarrassée des trois racines i, k, l. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait éliminé de V chacune des racines a, b, c, ..., i, k, l; on aura alors la valeur de cette fonction exprimée par les coefficients de l'équation proposée.

4. L'expression définitive de V s'obtient par de simples divisions, et comme les premiers termes des polynômes A, B, C, ..., I, K, L, qui servent successivement de diviseurs, ont tous l'unité pour coefficient, ces divisions n'introduiront aucun dénominateur; par conséquent, si l'expression de V est entière non-seulement par rapport aux racines a, b, c, ..., i, k, l, qui y entrent symétriquement, mais encore par rapport aux coefficients p_1, p_2,

p_3, etc., qui peuvent aussi y entrer, l'expression définitive de V sera aussi entière par rapport à ces coefficients; et enfin, si ces coefficients sont des nombres entiers, la valeur de V sera elle-même un nombre entier. Cette proposition, qu'on aurait peine à démontrer complétement au moyen de la méthode qui a été exposée dans le chapitre XVII, se déduit immédiatement de celle de M. Cauchy.

III. — *Sur les racines imaginaires. Théorème de* M. Cauchy.

1. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle et entière par rapport à z, du degré m, qui pourra contenir des coefficients imaginaires. Représentons par

$$\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \quad \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}, \ldots,$$

les m racines de cette équation; ces racines pourront ne pas être toutes inégales, et s'il y a des racines réelles, elles seront comprises dans les mêmes expressions, en réduisant à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$. Soit aussi $U + V\sqrt{-1}$ ce que devient le polynôme $f(z)$ quand on y remplace z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} \\ = [x - \alpha_1 + (y - \beta_1)\sqrt{-1}]\,[x - \alpha_2 + (y - \beta_2)\sqrt{-1}]\ldots \end{cases}$$

On peut mettre l'expression $x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1}$ sous cette autre forme

$$r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p).$$

On a alors

$$r = [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos p = \frac{x - \alpha}{r}, \quad \sin p = \frac{y - \beta}{r}, \quad \operatorname{tang} p = \frac{y - \beta}{x - \alpha}.$$

En faisant de même

$$U + V\sqrt{-1} = R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P),$$

on a

$$\operatorname{tang} P = \frac{V}{U},$$

et l'égalité (1) se change dans la suivante,

$$R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P) =$$
$$r_1(\cos p_1 + \sqrt{-1}\sin p_1) \times r_2(\cos p_2 + \sqrt{-1}\sin p_2) \times \ldots;$$

d'où l'on conclut

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots.$$

2. Considérons les variables x et y comme les coordonnées d'un point indéterminé M d'un plan, et α et β comme celles d'un point fixe A dans le même plan. Les quantités r et p seront alors les coordonnées polaires du point M par rapport au point fixe A.

Lorsqu'un angle varie d'une manière continue, la tangente de cet angle peut changer de signe en devenant nulle, ou en devenant infinie; et chaque fois qu'elle change de signe en devenant nulle, elle passe du négatif au positif quand l'angle est croissant, et elle passe, au contraire, du positif au négatif, quand l'angle est décroissant. Soient p' et p'' deux angles quelconques déterminés; supposons $p'' > p'$, et soient $k\pi$ et $(k+n)\pi$ les multiples de π immédiatement inférieurs à p' et à p''. Les valeurs de l'angle p comprises entre p' et p'' pour lesquelles la tangente sera zéro, seront

$$(k+1)\pi, \quad (k+2)\pi, \ldots, (k+n)\pi;$$

donc, si l'angle p est constamment croissant depuis p' jusqu'à p'', sa tangente passera n fois du positif au négatif en devenant nulle. Si l'angle p varie depuis p' jusqu'à p'' sans être constamment croissant, sa tangente, en devenant nulle,

pourra passer tantôt du négatif au positif, et tantôt du positif au négatif; mais l'excès du nombre de fois qu'elle passera du négatif au positif sur le nombre de fois qu'elle passera, au contraire, du positif au négatif, sera égal à n; car si l'angle p, en variant depuis p' jusqu'à p'', prend plusieurs fois une des valeurs intermédiaires $(k+1)\pi$, $(k+2)\pi, \ldots, (k+n)\pi$; il la prendra alternativement en croissant et en décroissant, et il devra la prendre une fois de plus en croissant qu'en décroissant.

3. Supposons maintenant un contour fermé quelconque, qui soit tel qu'en aucun de ses points on n'ait à la fois $U=0$ et $V=0$. Si l'on construit des points A_1, A_2, etc., qui aient pour coordonnées les différents couples α_1 et β_1, α_2 et β_2, etc., aucun de ces points ne sera situé sur le contour; et, si le point dont les coordonnées sont x et y parcourt le contour entier, lorsqu'il sera revenu à sa position initiale, l'angle p_i correspondant au point A_i, et dont ce point sera le sommet, aura augmenté de 2π ou il aura repris sa valeur primitive, suivant que le point A_i sera situé dans l'intérieur ou à l'extérieur du contour. Donc, si n est le nombre des points intérieurs au contour, l'angle P aura augmenté de $2n\pi$; par conséquent l'excès du nombre de fois que la tangente de cet angle, ou le rapport $\frac{V}{U}$, aura passé du négatif au positif en devenant nul, sur le nombre de fois que ce rapport aura passé du positif au négatif en devenant nul, sera égal à $2n$; ou, en d'autres termes :

Si $f(z) = f(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$, *en supposant que l'on prenne successivement pour* x *et* y *les coordonnées de tous les points d'un contour fermé quelconque, tel qu'en aucun point de ce contour on n'ait à la fois* $U=0$, $V=0$, *et en calculant l'excès du nombre de fois que le rapport* $\frac{V}{U}$, *en devenant nul, passe du négatif au*

positif, sur le nombre de fois que ce rapport passe en devenant nul du positif au négatif, pendant que le point x, y *parcourt le contour en avançant toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'il ait repris sa position initiale; si* Δ *est cet excès, le nombre des points dont les coordonnées* $x = \alpha$, $y = \beta$ *vérifient l'équation*

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

et qui sont situés dans l'intérieur du contour fermé, est $\frac{1}{2}\Delta$ (*).

4. Au moyen de ce théorème, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

dont la partie réelle est comprise entre deux limites données a et a', et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites b et b'. On considérera le contour formé par les quatre droites $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$; l'excès Δ pour ce contour entier sera évidemment égal à la somme des valeurs de cet excès calculées successivement par rapport à chacun des quatre côtés, en supposant que le point mobile avance tou-

(*) M. Cauchy, en faisant connaître ce théorème remarquable, n'en avait pas donné une démonstration élémentaire; celle qui vient d'être exposée est de M. Sturm; elle a paru en 1836, dans le *Journal* de M. Liouville (tome I, page 290). MM. Sturm et Liouville en ont donné d'autres qui se trouvent dans le même volume, et par lesquelles, sans avoir établi auparavant qu'une équation a toujours une racine, on prouve qu'une équation du degré m en a m. M. Sturm démontre aussi l'existence d'une racine par les considérations qui ont été employées dans la démonstration ci-dessus. A cet effet, il prouve que, lorsqu'il n'existe aucun point dans l'intérieur d'un contour fermé et sur ce contour même pour lequel on ait $U = 0$ et $V = 0$, l'excès Δ pour ce contour est nul; et que, pour un contour circulaire d'un rayon suffisamment grand, qui a son centre à l'origine, l'excès Δ ne peut être nul, et il est égal à $2m$, m étant le degré de l'équation.

jours dans le même sens. Or on aura

$$\frac{V}{U} = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \chi(x, y);$$

les valeurs de ce rapport pour les quatre côtés consécutifs seront $\chi(x, b)$, $\chi(a', y)$, $\chi(x, b')$, $\chi(a, y)$, et elles devront être considérées la première entre les limites $x = a$ et $x = a'$, la deuxième entre les limites $y = b$ et $y = b'$, la troisième entre les limites $x = a'$ et $x = a$, la quatrième entre les limites $y = b'$ et $y = b$.

5. Pour obtenir les parties de la valeur de Δ correspondantes à chacune de ces quatre fonctions, entre les limites indiquées, il faudra appliquer le théorème qui a été exposé dans le n° 434. Si, au lieu d'avoir à considérer, comme on l'a supposé pour la démonstration de ce théorème, une expression fractionnaire dont le numérateur soit d'un degré supérieur à celui du dénominateur, on a, au contraire, une fraction $\frac{V}{V_1}$, dont le dénominateur V_1 ait un degré supérieur à celui du numérateur V, en nommant R le reste de la division de V_1 par V, on aura $V_1 = VQ + R$. D'après cette égalité, lorsque V est zéro, V_1 et R ont la même valeur; donc les rapports $\frac{V}{V_1}$ et $\frac{V}{R}$ passent en même temps, en devenant nuls, du négatif au positif ou du positif au négatif. On est ainsi ramené au cas qui a été examiné dans le n° 434.

On peut aussi prouver, par des considérations semblables à celles du n° 433, que le théorème du n° 434 ne cesse pas de subsister quand les deux termes de la fraction $\frac{V}{V_1}$ ont un facteur commun algébrique, pourvu que les deux nombres α et β, qu'on doit substituer dans les fonctions V, V_1,

$V_2, \ldots, V_r$, soient différents de toutes les valeurs de x qui annulent le facteur commun.

6. Quand on prend un contour tel que l'équation $f(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = 0$ soit vérifiée par les coordonnées d'un de ses points, le théorème de M. Cauchy est soumis à des modifications pour lesquelles il faut avoir égard à la forme du contour. Mais, en considérant un contour rectangulaire, si le point correspondant à l'une des racines de l'équation est situé, par exemple, sur le côté $y = b$, les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x, b)}{\psi(x, b)}$, ou $\chi(x, b)$, ont un facteur commun qui est rendu nul par les valeurs de x correspondantes à $y = b$, ce qui fait connaître ces valeurs de x; et l'on trouve les limites des autres racines en modifiant la valeur $y = b$.

7. M. Sturm a fait voir qu'on peut considérer, au lieu d'un contour fermé, une droite indéfinie parallèle à l'un des axes des coordonnées. On détermine alors le nombre des racines auxquelles correspondent des points situés d'un même côté de cette droite.

Soit la droite $y = b$, parallèle à l'axe des x. On fera $y = b$ dans le rapport $\frac{U}{V}$; l'excès du nombre de fois que ce rapport passera en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passera en s'évanouissant du négatif au positif, pour les valeurs de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, sera égal à l'excès du nombre des racines pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera plus grand que b, ou auxquelles correspondront des points situés au-dessus de la droite $y=b$ sur le nombre des racines pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera plus petit que b, et auxquelles correspondront des points situés au-dessous de la droite.

Pour une droite $x = a$, parallèle à l'axe des y, si le

degré m de l'équation est pair, on fera $x = a$ dans le rapport $\frac{U}{V}$; l'excès du nombre de fois que ce rapport passera en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passera en s'évanouissant du négatif au positif, depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = +\infty$, sera égal à l'excès du nombre des racines qui auront une partie réelle plus petite que a, sur le nombre des racines qui auront une partie réelle plus grande que a.

Si le degré m de l'équation est impair, on appliquera la même règle en prenant au lieu du rapport $\frac{U}{V}$ le rapport $-\frac{V}{U}$, dans lequel on fera $x = a$, et on fera ensuite croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Cette proposition se démontre de la même manière que celle qui est relative à un contour fermé; il faut seulement considérer pour les deux premières règles, au lieu de la tangente de l'angle P exprimée par le rapport $\frac{V}{U}$ et qui serait nulle aux deux limites, la cotangente de cet angle exprimée par le rapport inverse $\frac{U}{V}$, qui devient nulle toutes les fois que l'angle P devient égal à un multiple impair de l'arc $\frac{\pi}{2}$, et qui passe toujours en s'évanouissant du positif au négatif quand l'angle P est croissant, et du négatif au positif quand l'angle P est décroissant.

IV. — *Sur la convergence des séries.*

1. Les séries présentent, sous le rapport de leur convergence, une particularité remarquable. Lorsque la convergence a lieu en réduisant les termes à leurs valeurs numériques et indépendamment des signes dont ils sont

affectés, si l'on change l'ordre des termes, de manière que chaque terme vienne occuper un rang déterminé, différent de celui qu'il occupait d'abord, on formera une nouvelle série qui sera encore convergente, et qui aura la même somme que la première. Mais lorsque la convergence n'a lieu que par l'effet des signes des termes, dont les valeurs numériques formeraient une série divergente, il peut arriver, en changeant l'ordre des termes, que la nouvelle série soit divergente, ou que, si elle reste convergente, la somme soit différente de celle de la première série (*).

2. Soit une série $u_0, u_1, u_3, \ldots, u_n$, etc. Désignons les valeurs numériques des termes par U_0, U_1, $U_2, \ldots$, U_n, etc. Si ces valeurs numériques forment une série convergente, le reste R_n, ou $U_n + U_{n+1} +$ etc., deviendra moindre que toute limite quand n sera suffisamment grand. Supposons que l'on change l'ordre des termes suivant une loi quelconque, et soit $u_p, u_q, \ldots, u_m$, etc. la nouvelle série produite par le changement d'ordre. On pourra prendre un nombre i plus grand que n, et assez grand pour que les termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$, dont la somme est s_n, se trouvent tous compris dans les i premiers termes de la série u_p, u_q, etc. Représentons par s'_i la somme de ces i premiers termes; cette somme s'_i pourra contenir, outre les termes qui donnent la somme s_n, d'autres termes qui se trouvaient compris dans la suite u_n, u_{n+1}, etc.; mais la somme de ces termes, quels que soient leurs signes, sera nécessairement moindre que R_n. Ainsi, on aura $s'_i = s_n + \theta R_n$, θ étant un nombre compris entre 0 et 1. Or, si l'on fait croître n et i au delà de toute limite, θR_n s'approchera indéfiniment de 0, et s_n, de la limite s. Donc s'_i s'approchera aussi indéfiniment de la limite s. Donc la série $u_p, u_q, \ldots, u_m$, etc., est convergente et a la même somme s que la série $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, etc.

(*) *Journal* de M. Liouville (tome IV, page 396).

3. Pour montrer que, lorsque la convergence a lieu seulement par l'effet des signes, la transposition des termes peut altérer la somme, ou rendre la série divergente, considérons la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$

Prenons successivement deux termes positifs et un terme négatif, de cette manière

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

On peut former cette nouvelle série au moyen de la première, en lui ajoutant celle qui résulte de la division de tous ses termes par 2. En effet, si l'on partage les termes en groupes de quatre termes, le $n^{ième}$ groupe est

$$\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n};$$

après la division de tous les termes par 2, en groupant chaque terme avec le suivant, le $n^{ième}$ groupe est

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n};$$

la somme de ces deux groupes est

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n},$$

et si l'on fait successivement $n=1$, $=2$, $=3$, etc., on obtient les groupes successifs de trois termes de la série $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+$ etc. Soient s_{2n} et s_{4n} les sommes des $2n$ et des $4n$ premiers termes de la premiere série; celle des $2n$ premiers termes de la série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+$ etc. sera $\frac{1}{2}s_{2n}$; et la

somme des $3n$ premiers termes de la série obtenue par la transposition des termes sera $s_{4n} + \frac{1}{2} s_{2n}$. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre n, les sommes s_{4n} et s_{2n} convergeront vers une même limite, qui est $l2$ (n° 534). Donc $s_{4n} + \frac{1}{2} s_{2n}$ convergera vers $\frac{3}{2} l2$. Ainsi la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

a pour somme $\frac{3}{2} l2$.

4. Par un autre changement dans l'ordre des termes de la même série, on pourra obtenir une série divergente; cela aurait lieu si l'on prenait alternativement des groupes de termes positifs, puis de termes négatifs, dans lesquels le nombre des termes croîtrait par degrés et indéfiniment, de manière que la valeur de chaque groupe fût toujours plus grande qu'un nombre donné; comme le groupe ci-dessous, par exemple,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \ldots + \frac{1}{3n-2},$$

dont la valeur est plus grande que $\frac{n}{3n-2}$ et par conséquent plus grande que $\frac{1}{3}$.

5. En considérant la série convergente

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots,$$

on en tire encore plus facilement une série divergente; il suffit de prendre alternativement deux termes positifs puis un terme négatif, comme il suit :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

En effet, si l'on pose

$$f(n)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n-2}}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{2n},$$

$$F(n)=1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

il viendra

$$F(n)-f(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Le second membre de cette égalité est plus grand que $\frac{n}{\sqrt{4n-1}}$ et par conséquent plus grand que $\frac{1}{2}\sqrt{n}$; il tend donc vers l'infini en même temps que n. Donc il en est de même de $F(n)-f(n)$, et, par suite, de $F(n)$, puisque $f(n)$ est une quantité finie.

FIN.

SBN
C07247
Biblioteca Nazionale NAPOLI

LIBRAIRIE DE BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE, par GARNIER; 3e édit. in-8°, revue, corrigée et augmentée..... 7 fr.

Suite de ces Éléments, 2e partie, ANALYSE ALGÉBRIQUE; par LE MÊME; nouv. édit., considérablement augmentée, in-8°..... 7 fr. 50 c.

MÉLANGES D'ANALYSE ALGÉBRIQUE ET DE GÉOMÉTRIE; par M. DE STAINVILLE, Répétiteur à l'École Polytechnique; 1 vol. in-8°, avec planches..... 7 fr. 50 c.

ANALYSE APPLIQUÉE A LA GÉOMÉTRIE DES TROIS DIMENSIONS, contenant les surfaces du 2e ordre, avec la théorie générale des surfaces courbes et des lignes à doubles courbures; par M. C.-F.-A. LEROY, Professeur à l'École Polytechnique, etc.; 3e édit., revue, corrigée et augmentée, in-8°, 1843..... 5 fr.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES D'ALGÈBRE; par AMADIEU, in-12, 2e édit., revue et corrigée..... 3 fr.

MÉMOIRE RELATIF A LA THÉORIE DES NOMBRES. *Loi réciproque*; par M. BRENNECKE, brochure in-4°, 1840..... 2 fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES INÉQUATIONS, par M. CANARD, in-8°..... 6 fr.

RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL; par CARNOT, in-8°, fig., 3e édit., 1839..... 4 fr.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1re partie, Analyse algébrique; par M. AUG. CAUCHY, in 8°, 1821..... 7 fr.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL; par COUSIN, 2 vol. in-4°, 6 pl..... 21 fr.

PRINCIPES MATHÉMATIQUES de feu Joseph-Anastase da Cunha, Professeur à l'Université de Coïmbre (comprenant ceux de l'Arithmétique, de la Géométrie, de l'Algèbre, de son Application à la Géométrie, et du Calcul différentiel et intégral, traités d'une manière entièrement nouvelle), trad. littér. du portugais; par D'ABREU, in-8°, 1816..... 7 fr.

RÉPONSES AUX QUESTIONNAIRES DES EXAMENS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR, contenant l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie, la Trigonométrie et la Géométrie descriptive; par MM. DAURIAC et JOANNET; vol. in-8° de 500 pages, avec 10 pl., 1847..... 7 fr. 50 c.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, par DEVELEY, Professeur de Mathematiques, etc.; in-4°, nouvelle édit., 1824. 14 fr.

ALGÈBRE D'ÉMILE; par LE MÊME, 1828..... 7 fr. 50 c.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE; par EULER, 2 vol. in 8°, 1807.

La première partie contient l'Analyse déterminée, revue et augmentée de Notes par Garnier. La deuxième partie contient l'Analyse indéterminée, revue et augmentée de Notes par Lagrange.

INSTITUTIONES CALCULI INTEGRALIS; par LE MÊME; 3 vol. in-4°.

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS; par LE MÊME; in-4°. *Petrop*, 1755.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES; par M. Liouville, Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

Il paraît par mois un numéro de 32 à 48 pages in-4°.

Prix pour l'année : 30 fr. pour Paris.
— 35 pour les départements.
— 40 pour l'étranger.

Nota. La publication de ce Recueil a commencé en 1836.

Quatorze volumes sont publiés. — Prix : 420 fr.

MOYEN DE SUPPLÉER PAR L'ARITHMÉTIQUE A L'EMPLOI DE L'ALGÈBRE dans les questions d'intérêts composés, d'annuités, d'amortissement, etc., terminé par une application spéciale du même procédé à l'extinction de la dette publique; par Juvigny; in-8°, 1825. 2 fr.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL; par Lacroix; 2e édit., revue, corrigée et considérablement augmentée; 3 vol. in-4° avec 18 pl.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE; par le même; 19 édit., 1849..... 4 fr.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE; par le même; 6e édition..... 4 fr.

LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS; servant de Commentaire et de Supplément à la Théorie des fonctions analytiques; par Lagrange; in-4°, 1808 ..... 15 fr.

TRAITÉ D'ALGÈBRE, par M. Lefébure de Fourcy, Chevalier de la Légion d'honneur, Examinateur des aspirants à l'École Polytechnique, docteur ès sciences, etc., in-8°..... 7 fr. 50 c.

ÉLÉMENTS DE CALCUL INTÉGRAL; par Lebesgue et Jacquier, 2 vol. in-4°..... 36 fr.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE, contenant un grand nombre de problèmes; par Lhuilier; 2 vol. in-8°.

PRINCIPIORUM CALCULI DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS EXPOSITIO ELEMENTARIA; par le même; in-4°..... 20 fr.

ÉLÉMENTS D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE et d'Analyse algébrique, appliqués à la recherche des lieux géométriques; par le même; in-4°. 15 fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE de Calcul différentiel et de Calcul intégral; par Lubbe, Professeur à l'Université de Berlin; traduit do l'allemand par M. Kartscher; in-8°, 1832..... 7 fr.

TRAITÉ D'ALGÈBRE; par Maclaurin, 1 vol. in-4°..... 15 fr.

TRAITÉ D'ALGÈBRE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École spéciale Militaire; par M. Reynaud, 1 vol. in-8°, 9e édit., 1837..... 5 fr.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL; par Sanson, in-8°..... 2 fr. 50 c.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE, professé à la Faculté des Sciences de Paris; par M. Serret, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique; vol. in-8°, 1849..... 7 fr. 50 c.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, à l'usage des colléges et des aspirants aux Écoles du Gouvernement (ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE); par M. Terquem, professeur, in-8°, 1842. 5 fr.

ESSAIS DE MATHÉMATIQUES, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique; par M. Tarbil, Professeur à l'École militaire de Saint-Cyr, in-8°, 1819..... 2 fr.

Digitized by Google

Digitized by Google